数理解析研究所講究録
第 814 巻 1992 年 203-217

スーパーサドル型ジュリア集合の超安定多様体について

京都大学人間・環境学研究科　宇敷重広 (Shigehiro Ushiki)

0. はじめに

2次元複素力学系 $f:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$ において、f の不動点の固有値の一方が0、他方の絶対値が1より大のとき、この不動点を**スーパーサドル**とよぶ。この時、絶対値が1より大きい固有値にたいする不安定多様体の存在は古くからしられている。固有値0に対応する「超安定多様体」が存在することを [2] において示した。ここでは2次元複素力学系において、1次元部分空間が不変になっており、その中にジュリア集合があり、そのノーマル方向が超吸引的になっている場合について考察する。結論は、「超安定多様体」の族がジュリア集合上のファイバーバンドルになっているということである。

1. スーパーサドル型ジュリア集合

$f:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$ は y 軸 $\mathbb{C}_y=\{0\}\times\mathbb{C}\subset\mathbb{C}^2$ の近傍において複素解析的であるとし、y 軸は f のもとで不変であるとする。すなわち、

$$\text{仮定 1.}\qquad f(\mathbb{C}_y)\subset\mathbb{C}_y$$

とする。f を成分で表して、$f(x,y)=(f_1(x,y),f_2(x,y))$ とする。仮定1は $f_1(0,y)=0$ と表せる。次に、

$$\text{仮定 2.}\qquad \det Df=0 \quad \text{on} \quad \mathbb{C}_y$$

とする。この仮定はたいへん特殊なものであるが、証明の都合上、これを課する。さらに、$J\subset\mathbb{C}_y$ を $f|_{\mathbb{C}_y}:\mathbb{C}_y\to\mathbb{C}_y$ のジュリア集合として、

$$\text{仮定 1'.}\qquad J \text{ はコンパクト}$$

とする。

$p=(0,y_0)\in J$ にたいし、

$$a(p)=f_2(0,y_0),\quad b(p)=\frac{\partial f_2}{\partial y}(0,y_0),$$

$$c(p)=\frac{\partial f_2}{\partial x}(0,y_0),$$

$$h_p(\xi,\eta) = f_2(\xi, y_0+\eta) - a(p) - b(p)\eta - c(p)\xi$$

とおく。次に、これもテクニカルな仮定であるが、ジュリア集合が一様に双曲型であることを仮定する。すなわち、

$$\text{仮定 3.} \qquad \exists\beta > 1, \quad \text{s.t.} \quad |b(p)| \geq \beta \ \text{ for } \ \forall p \in J.$$

仮定1より、$\frac{\partial f_1}{\partial y}(0,y) = 0$ である。従って、$p = (0,y) \in \mathbb{C}_y$ のとき、

$$\det Df = \frac{\partial f_1}{\partial x}(0,y)\frac{\partial f_2}{\partial y}(0,y)$$

であるが、仮定3より、

$$b(p) = \frac{\partial f_2}{\partial y}(0,y) \neq 0$$

が $J \in \mathbb{C}$ の近傍で成り立つので、仮定2から

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(0,y) = 0$$

である。よって、$\mathbb{C}_y$ の近傍で解析的な関数 $g(x,y)$ を使って、

$$f_1(x,y) = x^2 g(x,y)$$

と書くことができる。$p = (0,y_0) \in J$ にたいし、

$$g_p(\xi,\eta) = g(\xi, y_0+\eta)$$

と置こう。ノーマル方向に関する非退化の条件として、

$$\text{仮定 4.} \qquad g_p(0,0) \neq 0 \ \text{ for } \ p \in J.$$

を仮定する。以上の仮定をみたす「ジュリア集合」J をスーパーサドル型という。

2. 定数、定義など

正の実数 ϵ にたいし、

$$B_\epsilon = \{(\xi,\eta) \in \mathbb{C}^2 \mid |\xi|^2 + |\eta|^2 \leq \epsilon^2\}$$

とし、

$$\alpha = \inf_{p\in J,(\xi,\eta)\in B_\epsilon} |g_p(\xi,\eta)|, \quad m_g = \sup_{p\in J,(\xi,\eta)\in B_\epsilon} |g_p(\xi,\eta)|,$$

$$m_h = \sup_{p\in J,(\xi,\eta)\in B_\epsilon} (|\frac{\partial^2 h_p}{\partial \xi^2}(\xi,\eta)| + |\frac{\partial^2 h_p}{\partial \xi\partial\eta}(\xi,\eta)| + |\frac{\partial^2 h_p}{\partial \eta^2}(\xi,\eta)|),$$

$$m_c = \sup_{p\in J} |c(p)|, \quad M_g = \sup_{p\in J,(\xi,\eta)\in B_\epsilon} |\frac{\partial g_p}{\partial \eta}(\xi,\eta)|$$

とおく。十分小さな ϵ を選んでおけば、これらは全て有限の値であるとしてよい。

$h_p(0,0)=0,\ \frac{\partial h_p}{\partial \xi}(0,0)=0,\ \frac{\partial h_p}{\partial \eta}(0,0)=0$ なので、次の命題が成り立つ。

命題 $p \in J,\ (\xi,\eta) \in B_\epsilon$ について

$$|\frac{\partial h_p}{\partial \xi}(\xi,\eta)| \le (|\xi|+|\eta|)m_h,$$

$$|\frac{\partial h_p}{\partial \eta}(\xi,\eta)| \le (|\xi|+|\eta|)m_h,$$

$$|h_p(\xi,\eta)| \le (|\xi|+|\eta|)^2 m_h.$$

$p=(0,y_0)\in J$ とし、$(\xi,\eta)\in B_\epsilon$ を p のまわりの座標と考えて、

$$f(\xi, y_0+\eta) = (\xi^2 g_p(\xi,\eta), a(p)+c(p)\xi+b(p)\eta+h_p(\xi,\eta))$$

であるので、 $f_p(\xi,\eta)=(f_{p,1}(\xi,\eta), f_{p,2}(\xi,\eta))$ を

$$f_p(\xi,\eta)=f(\xi,y_0+\eta)-f(0,y_0)$$

によって定義する。

$$f_{p,1}(\xi,\eta)=\xi^2 g_p(\xi,\eta)$$

$$f_{p,2}(\xi,\eta)=c(p)\xi+b(p)\eta+h_p(\xi,\eta)$$

となり、$f_p : B_\epsilon \to \mathbb{C}^2$, $f_p(0,0)=(0,0)$ である。

正の実数 r_0 と u_0 を十分小さく選んで、すべての $p\in J$ について

$$\mathbb{D}_{r_0}\times\mathbb{D}_{u_0}\subset B_\epsilon,\quad f_p(\mathbb{D}_{r_0}\times\mathbb{D}_{u_0})\subset B_\epsilon$$

が成り立つようにして置く。

正の定数 r と u を

$$u=\min(u_0, \frac{\beta-1}{8m_h}, 1)$$

$$r=\min(\frac{u}{2}, \frac{(\beta-1)u}{2m_c}, \frac{1}{2m_g}, \frac{\beta-1}{8uM_g})$$

で定める。以下の命題が成り立つ。

命題 $\xi\in\mathbb{D}_r,\ \eta\in\partial\mathbb{D}_u$ ならば、$|f_{p,2}(\xi,\eta)|>u$ が成り立つ。

証明

$$\begin{aligned}|f_{p,2}(\xi,\eta)| &= |c(p)\xi+b(p)\eta+h_p(\xi,\eta)|\\ &\ge \beta u - m_c r - (u+r)^2 m_h\\ &> \beta u - \frac{(\beta-1)u}{2} - 4u^2 m_h\end{aligned}$$

$$\geq \beta u - \frac{(\beta-1)u}{2} - 4u\frac{\beta-1}{8}$$
$$= u$$

命題　$(\xi,\eta) \in \mathbb{D}_r \times \mathbb{D}_u$ のとき、

$$|f_{p,1}(\xi,\eta)| \leq \frac{r}{2}, \quad |\frac{\partial f_{p,2}}{\partial \eta}(\xi,\eta)| > 1$$

が成り立つ。

証明

$$|f_{p,1}(\xi,\eta)| = |\xi|^2|g_p(\xi,\eta)| \leq r^2 m_g \leq \frac{r}{2}.$$

$$\begin{aligned}|\frac{\partial f_{p,2}}{\partial \eta}(\xi,\eta)| &= |b(p) + \frac{\partial h_p}{\partial \eta}(\xi,\eta)| \geq \beta - (|\xi| + |\eta|)m_h \\ &\geq \beta - (u+r)m_h \geq \beta - 2um_h \\ &\geq \beta - \frac{\beta-1}{4} = \frac{3}{4}(\beta-1) + 1 > 1.\end{aligned}$$

3.　グラフの引き戻し

$p \in J$ に対し、$q = f(p)$ とおく。解析的な写像 $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ によって、q の近傍において与えられた解析的曲線を引き戻して p の近傍にある解析的曲線にうつすことができる。この節ではこれについて考察する。

$$X_p = \{\varphi : \mathbb{D}_r \to \mathbb{D}_u \mid \varphi : \text{analytic}\},$$

$$X_q = \{\varphi : \mathbb{D}_r \to \mathbb{D}_u \mid \varphi : \text{analytic}\}$$

とし、sup ノルムで位相をいれる。

$\varphi_q \in X_q$ は $\mathbb{D}_r \times \mathbb{D}_u \subset B_\epsilon$ を q のまわりの座標と考えれば、φ_q のグラフ $\{(\xi,\eta) \in \mathbb{D}_r \times \mathbb{D}_u : \eta = \varphi_q(\xi)\}$ は解析的な曲線（の一部）である。$\psi_p \in X_p$ を、

$$f_{p,2}(\xi, \psi_p(\xi)) = \varphi_q(f_{p,1}(\xi, \psi_p(\xi)))$$

で定義する。以下で示すように、ψ_p は矛盾無く定義され、$\psi_p \in X_p$ となる。

補題　$\varphi_q \in X_q$ および $\xi \in \mathbb{D}_r$ が与えられたとき、

$$f_{p,2}(\xi,\eta) = \varphi_q(f_{p,1}(\xi,\eta))$$

をみたす $\eta \in \mathbb{D}_u$ がただ1つ存在する。

証明

$$N(\eta) = \eta - \frac{1}{b(p)}(f_{p,2}(\xi,\eta) - \varphi_q(f_{p,1}(\xi,\eta)))$$

とする。

$$
\begin{aligned}
|N(\eta)| &= |\eta - \frac{1}{b(p)}(c(p)\xi + b(p)\eta + h_p(\xi,\eta) - \varphi_q(f_{p,1}(\xi,\eta)))| \\
&= \frac{1}{|b(p)|}|c(p)\xi + h_p(\xi,\eta) - \varphi_q(f_{p,1}(\xi,\eta))| \\
&< \frac{1}{\beta}(m_c r + 4u^2 m_h + u) \\
&\leq \frac{1}{\beta}(\frac{\beta-1}{2}u + \frac{\beta-1}{2}u + u) = u
\end{aligned}
$$

となる。よって、$N:\mathbb{D}_u \to \mathbb{D}_u$ と考えて良い。

つぎに、N は $\mathbb{D}_u$ から $\mathbb{D}_u$ への縮小写像であることを示す。$\varphi_q:\mathbb{D}_r \to \mathbb{D}_u$ なので、$\mathbb{D}_{\frac{r}{2}}$ においては $|\varphi_q'| < \frac{4u}{r}$ がなりたつことに注意しておく。$\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{D}_u$ に対し、

$$
\begin{aligned}
|N(\eta_1) - N(\eta_2)| &\leq \frac{1}{\beta}(|h_p(\xi,\eta_1) - h_p(\xi,\eta_2)| + |\varphi_q(f_{p,1}(\xi,\eta_1)) - \varphi_q(f_{p,1}(\xi,\eta_2))|) \\
&\leq \frac{1}{\beta}(2um_h|\eta_1-\eta_2| + \frac{4u}{r}r^2M_g|\eta_1-\eta_2|) \\
&\leq \frac{1}{\beta}(\frac{\beta-1}{4} + \frac{\beta-1}{2})|\eta_1-\eta_2| \\
&= \frac{3}{4}\frac{\beta-1}{\beta}|\eta_1-\eta_2|
\end{aligned}
$$

となるが、$\frac{3(\beta-1)}{4\beta} < 1$ であるので、N は縮小写像であることがわかった。

上の補題より、各々の $\xi \in \mathbb{D}_r$ に対し、$N(\eta) = \eta$ はただ1つの解をもつ。これを $\psi_p(\xi)$ と書くことにしよう。$\psi_p(\xi)$ は

$$
f_{p,2}(\xi, \psi_p(\xi)) = \varphi_q(f_{p,1}(\xi, \psi_p(\xi)))
$$

の定める陰関数にほかならない。$\psi_p:\mathbb{D}_r \to \mathbb{D}_u$ は解析的な関数となるので、$\psi_p \in X_p$ として良い。

こうして得られた、グラフ変換による写像を

$$
\Gamma_p : X_q \to X_p
$$

であらわす。ただしここで $q = f(p)$ である。

4. グラフバンドルと不変セクション

スーパーサドル型ジュリア集合 J の各点 p においてグラフの集合 X_p を考え、

$$
X_J = \bigcup_{p\in J} X_p
$$

とする。X_J は J を底空間とし、X_p を p におけるファイバーとするファイバーバンドルとみなし、(直積としての) 位相をいれる。X_J の連続なクロスセクション全体のなす集合を Ξ であらわそう。$\varphi \in \Xi$ のとき、$p \in J$ におけるセクションの値を $\varphi_p \in X_p$ であらわすことにする。

Ξ におけるノルム $\|\varphi\|$ を

$$\|\varphi\| \;=\; \sup_{p\in J}\|\varphi_p\|$$

とする。ただし、$\|\varphi_p\|$ は X_p における sup ノルムである。

前節で定義したグラフ変換を使って、写像 $\Gamma : \Xi \to \Xi$ を

$$(\Gamma(\varphi))_p \;=\; \Gamma_p(\varphi_{f(p)})$$

で定義する。次の定理が得られる。

定理　$\Gamma : \Xi \to \Xi$ は縮小写像である。

証明　$\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)} \in \Xi$ とし、$\psi^{(1)} = \Gamma(\varphi^{(1)}),\ \psi^{(2)} = \Gamma(\varphi^{(2)})$ としよう。$q = f(p)$ とすると、$\psi_p^{(1)} = \Gamma_p(\varphi_q^{(1)}),\ \psi_p^{(2)} = \Gamma_p(\varphi_q^{(2)})$ であり、それらは、$\xi \in \mathbb{D}_r$ について、

$$f_{p,2}(\xi, \psi_p^{(1)}(\xi)) \;=\; \varphi_q^{(1)}(f_{p,1}(\xi, \psi_p^{(1)}(\xi)))$$

および、

$$f_{p,2}(\xi, \psi_p^{(2)}(\xi)) \;=\; \varphi_q^{(2)}(f_{p,1}(\xi, \psi_p^{(2)}(\xi)))$$

をみたす。ところで、

$$\begin{aligned}
|f_{p,2}(\xi, \psi_p^{(1)}(\xi)) - f_{p,2}(\xi, \psi_p^{(2)}(\xi))| \;&=\; |\int_{\psi_p^{(2)}(\xi)}^{\psi_p^{(1)}(\xi)} \frac{\partial f_{p,2}}{\partial \eta}(\xi,\eta)d\eta| \\
&=\; |\int_{\psi_p^{(2)}(\xi)}^{\psi_p^{(1)}(\xi)} (b(p) + \frac{\partial h_p}{\partial \eta}(\xi,\eta))d\eta| \\
&=\; |b(p)(\psi_p^{(1)}(\xi) - \psi_p^{(2)}(\xi)) + \int_{\psi_p^{(2)}(\xi)}^{\psi_p^{(1)}(\xi)} \frac{\partial h_p}{\partial \eta}(\xi,\eta)d\eta| \\
&\geq \beta|\psi_p^{(1)}(\xi) - \psi_p^{(2)}(\xi)| - (u+r)m_h|\psi_p^{(1)}(\xi) - \psi_p^{(2)}(\xi)| \\
&\geq (\beta - \frac{\beta-1}{4})|\psi_p^{(1)}(\xi) - \psi_p^{(2)}(\xi)| \\
&=\; (\frac{3}{4}(\beta-1)+1)|\psi_p^{(1)}(\xi) - \psi_p^{(2)}(\xi)|
\end{aligned}$$

であり、他方、

$$\begin{aligned}
&|\varphi_q^{(1)}(f_{p,1}(\xi, \psi_p^{(1)}(\xi))) - \varphi_q^{(2)}(f_{p,1}(\xi, \psi_p^{(2)}(\xi)))| \\
&\leq |\varphi_q^{(1)}(f_{p,1}(\xi, \psi_p^{(1)}(\xi))) - \varphi_q^{(2)}(f_{p,1}(\xi, \psi_p^{(1)}(\xi)))| \\
&+|\varphi_q^{(2)}(f_{p,1}(\xi, \psi_p^{(1)}(\xi))) - \varphi_q^{(2)}(f_{p,1}(\xi, \psi_p^{(2)}(\xi)))|
\end{aligned}$$

$$\leq \|\varphi_q^{(1)} - \varphi_q^{(2)}\| + \frac{2u}{r} r^2 M_g |\psi_p^{(1)}(\xi) - \psi_p^{(2)}(\xi)|$$
$$\leq \|\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}\| + \frac{\beta - 1}{4} |\psi_p^{(1)}(\xi) - \psi_p^{(2)}(\xi)|$$

である。以上を合わせて、

$$(\frac{1}{2}(\beta - 1) + 1)|\psi_p^{(1)}(\xi) - \psi_p^{(2)}(\xi)| \leq \|\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}\|$$

となり、これがすべての $p \in J, \xi \in \mathbb{D}_r$ について成り立つので、

$$\|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\| \leq \frac{1}{\frac{1}{2}(\beta - 1) + 1} \|\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}\|$$

がいえた。これは、$\Gamma : \Xi \to \Xi$ が縮小写像であることを示す。

Ξ の上の縮小写像 Γ はただ1つの不動点をもつ。すなわち、

定理　$\Gamma(\varphi) = \varphi$ をみたす $\varphi \in \Xi$ がただ1つ存在する。

これを$\sigma \in \Xi$ で表そう。

5. 超安定多様体

容易に確かめられるように、前節で求めた、Γ のもとで不変な曲線族 $\sigma \in \Xi$ は、すべての $p \in J$ について $\sigma_p(0) = 0$ を満たす。$p = (0, y_0) \in J$ にたいし、p を通る複素解析的曲線を、

$$W_p \ = \ \{(\xi, y_0 + \eta) \in \mathbb{C}^2 \mid \xi \in \mathbb{D}_r, \eta \in \mathbb{D}_u, \eta = \sigma_p(\xi)\}$$

で表す。

$$W_J \ = \ \bigcup_{p \in J} W_p$$

とおき、これを J の局所超安定多様体と言うことにする。W_J は J 上のファイバーバンドルで、各ファイバーは $\mathbb{C}^2$ 内に埋め込まれた開円板である。W_J を解析的に延長したものを J の超安定多様体という。

定理　$p = (0, y_0) \in J$, $(\xi, \eta) \in \mathbb{D}_r \times \mathbb{D}_u$ にたいし、

1）　$\eta = \sigma_p(\xi)$ 、すなわち $(\xi, y_0 + \eta) \in W_p$ ならば、

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{dist}(f^n(\xi, y_0 + \eta), f^n(p)) \ = \ 0.$$

2）　$\eta \neq \sigma_p(\xi)$ ならば、ある正の整数 n があって、

$$\mathrm{dist}(f^n(\xi, y_0 + \eta), f^n(p)) > u$$

が成り立つ。

証明　$\eta=\sigma_p(\xi)$ の場合、$(\xi_0,\eta_0)=(\xi,\eta)$ とし、

$$(\xi_{k+1},\eta_{k+1})=f_{p_k}(\xi_k,\eta_k), \qquad k=0,1,\cdots$$

とする。ただし、$p_k=f^k(p)$ とする。これは、点 $(\xi_0,y_0+\eta_0)$ から出発する f による軌道に対応するものである。σ の性質から、

$$\eta_k=\sigma_{p_k}(\xi_k)$$

であることがわかる。また、$|\xi_{k+1}|\le\frac{1}{2}|\xi_k|$ から、$\lim_{k\to\infty}\xi_k=0$ となり、$k>0$ のとき、$\xi_k\in\mathbb{D}_{\frac{r}{2}}$ から、

$$|\eta_k|\le\frac{4u}{r}|\xi_k|$$

が成り立つので、$\lim_{k\to\infty}\eta_k=0$　もいえた。すなわち、

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{dist}(f^n(\xi,y_0+\eta),p_n) \;=\; 0.$$

次に、$\eta\ne\sigma_p(\xi)$ の場合について考える。上の場合と同様に、$(\xi_0,\eta_0)=(\xi,\eta)$ とおき、$k=0,1,2,\cdots$ について (ξ_k,η_k) を定義する。これは、$\xi_k\in\mathbb{D}_r,\eta_k\in\mathbb{D}_u$ となっている k についてだけ定義できる。$p_k=(0,y_k)$ として、点 $(\xi_k,y_k+\eta_k)$ と W_{p_k} との「距離」を計るために、$|\eta_k-\sigma_{p_k}(\xi_k)|$ を調べれば良い。

$$\begin{aligned}
|\eta_{k+1}-\sigma_{p_{k+1}}(\xi_{k+1})| \;&=\; |f_{p_k,2}(\xi_k,\eta_k)-\sigma_{p_{k+1}}(f_{p_k,1}(\xi_k,\eta_k))|\\
&\ge |f_{p_k,2}(\xi_k,\eta_k)-f_{p_k,2}(\xi_k,\sigma_{p_k}(\xi_k))|-|f_{p_k,2}(\xi_k,\sigma_{p_k}(\xi_k))-\sigma_{p_{k+1}}(f_{p_k,1}(\xi_k,\eta_k))|\\
&\ge (\frac{3}{4}(\beta-1)+1)|\eta_k-\sigma_{p_k}(\xi_k)|-|\sigma_{p_{k+1}}(f_{p_k,1}(\xi_k,\sigma_{p_k}(\xi_k)))-\sigma_{p_{k+1}}(f_{p_k,1}(\xi_k,\eta_k))|\\
&\ge (\frac{3}{4}(\beta-1)+1)|\eta_k-\sigma_{p_k}(\xi_k)|-\frac{4u}{r}r^2M_g|\eta_k-\sigma_{p_k}(\xi_k)|\\
&\ge (\frac{1}{4}(\beta-1)+1)|\eta_k-\sigma_{p_k}(\xi_k)|
\end{aligned}$$

となるので、定理の証明ができた。

6.　超安定多様体上の調和関数

スーパーサドル型のジュリア集合 J の超安定多様体 W_J で定義された実数値の関数で、力学系のダイナミクスに適合したものが存在する。この節ではこの「ポテンシャル」関数についてのべる。

定理　$W_J\setminus J$ において定義された、連続な正の実数値関数 $\rho:W_J\setminus J\to\mathbb{R}_+$ で、W_J の各ファイバー $W_p\setminus\{p\}$ において調和であり、$z\in W_J\setminus J$ に対し、

$$\rho(f(z)) \;=\; 2\rho(z)$$

を満たすものが存在する。

証明 $(x,y) \in W_J \subset \mathbb{C}^2$ に対し、

$$\chi_0(x,y) \;=\; -\log|x|$$

とおく。$|x| < r$ なので、$\chi_0(x,y) > \log\frac{1}{r} > 0$ であり、明らかに、$\chi_0(x,y)$ は $W_J \setminus J$ 上で連続であり、各ファイバー上で調和である。次に、

$$\chi_1(x,y) \;=\; -\frac{1}{2}\log|f_1(x,y)|$$

とおく。

$$\begin{aligned}\chi_1(x,y) \;&=\; -\frac{1}{2}\log|x^2g(x,y)| \\ &= -\log|x| - \frac{1}{2}\log|g(x,y)| \\ &= \chi_0(x,y) - \frac{1}{2}\log|g(x,y)|\end{aligned}$$

である。以下、$n \geq 1$ に対し、

$$\chi_{n+1}(x,y) \;=\; -\frac{1}{2^{n+1}}\log|f_1(f^{\circ n}(x,y))|$$

と定義する。$f^{\circ n}(x,y) = (x_n, y_n)$ と書くと、

$$\begin{aligned}\chi_{n+1}(x,y) \;&=\; -\frac{1}{2^{n+1}}\log|x_n^2 g(x_n,y_n)| \\ &= -\frac{1}{2^n}\log|x_n| - \frac{1}{2^{n+1}}\log|g(x_n,y_n)| \\ &= \chi_n(x,y) - \frac{1}{2^{n+1}}\log|g(x_n,y_n)|\end{aligned}$$

であるので、これより、

$$\chi_{n+1}(x,y) \;=\; -\log|x| - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^{k+1}}\log|g(x_k,y_k)|$$

と書ける。$(x_0,y_0) \in W_J \setminus J$ のとき、$k = 0,1,2,\cdots$ について $(x_k,y_k) \in W_J \setminus J$ なので、W_J において$\alpha \leq |g(x,y)| \leq m_g$ であったことを思い出せば、$n \to \infty$ のとき、$\chi_n(x,y) + \log|x|$ は $W_J \setminus J$ において一様収束することがわかった。

$$\rho(x,y) \;=\; \lim_{n\to\infty}\chi_n(x,y)$$

とおく。$z \in W_J \setminus J$ のとき、

$$\begin{aligned}\rho(f(z)) \;&=\; \lim_{n\to\infty}\chi_n(f(z)) \\ &= \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{2^{n+1}}\log|f_1(f^{\circ n}(f(z)))|\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{2^{n+1}} \log|f_1(f^{\circ(n+1)}(z))| \\
&= 2 \lim_{n\to\infty} \chi_n(z) \\
&= 2\rho(z)
\end{aligned}
$$

が成り立つ。

7. 数値実験

$f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ が第1節で述べた条件を満たすとき、超吸引的不動点 O の吸引鉢 $A(O)$ を、

$$A(O) \;=\; \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid \lim_{n\to\infty} f^{\circ n}(x,y) \;=\; O\}$$

によって定義すると、スーパーサドル型ジュリア集合 J は $A(O)$ の境界に含まれる。この時、J の超安定多様体も $A(O)$ の境界に含まれる。f がさらに x 軸を x 軸にうつすとし、x 軸内にもスーパーサドル型のジュリア集合があれば、これも $A(O)$ の境界に含まれるはずである。したがって、一つの吸引鉢 $A(O)$ が2つの相異なる形をした境界を同時にもつ。この意味で、吸引鉢の境界は部分のなかに全体の縮図が宿ると言う意味での自己相似性を持っていない。

x 軸、y 軸の両方がそれぞれ f のもとで不変であり、それぞれの軸内にスーパーサドル型ジュリア集合が存在する場合について数値実験を行ってみた。それぞれのスーパーサドル型ジュリア集合を J_x ,J_y で表す。

J_x と J_y の両方または一方が単位円周になっている場合については [2] において示したので、参照して頂きたい。そこで示したのは

$$f(x,y) \;=\; (x^2 - 4x^2y, y^2 + 2.7ixy^2)$$

$$f(x,y) \;=\; (x^2 - 4x^2y + x^3, y^2 + 2.7ixy^2)$$

$$f(x,y) \;=\; (x^2 - 4x^2y + x^3, y^2 + 2.7ixy^2 - y^3)$$

の場合である。

図1は

$$f(x,y) \;=\; (3x^2 - 2x^3 - 4x^2y, y^2 + 2.7ixy^2)$$

の場合である。J_x は $x=0$ と $x=1$ のふたつの超吸引的不動点をもつ複素力学系のジュリア集合であり、J_y は単位円周である。この図にはそのふたつのタイプのジュリア集合に似た形が見られる。図にしめしている領域は、

$$y = 0.9, \quad -0.9 \le \Re x \le 0.9, \quad -0.72 \le \Im x \le 0.72$$

である。

図2および図3は

$$f(x,y) \ = \ (x^2 - 4x^2y, -0.9y + y^2 + 2.7ixy^2)$$

の場合である。この場合、原点は不動点で、その固有値は 0 と -0.9 である。図に示している領域は、それぞれ、

$$y = 0.7, \quad -0.9 \leq \Re x \leq 0.9, \quad -0.72 \leq \Im x \leq 0.72$$

$$y = 0.7, \quad 0.4697 \leq \Re x \leq 0.7, \quad -0.05309 \leq \Im x \leq -0.05285$$

である。

図4に示したのは

$$f(x,y) \ = \ (3x^2 - 4x^2y - 2x^3, (0.7 + 0.2i)y + y^2 + 2.7ixy^2)$$

の場合である。領域は、

$$y = 0.5, \quad -0.4 \leq \Re x \leq 0.6, \quad -0.1 \leq \Im x \leq 0.7$$

である。

図5〜図8はいずれも

$$f(x,y) \ = \ (3x^2 - 4x^2y - 2x^3, 3y^2 + 2.7ixy^2 - 2y^3)$$

について計算したものである。この力学系は3つの超吸引的不動点を持っている。領域はそれぞれ、

$$y = 0.5, \quad -0.7 \leq \Re x \leq 0.7, \quad -0.56 \leq \Im x \leq 0.56$$

$$y = 0.5, \quad 0.4 \leq \Re x \leq 0.44, \quad 0.464 \leq \Im x \leq 0.496$$

$$y = 0.5, \quad 0.427133 \leq \Re x \leq 0.47135, \quad 0.4812912 \leq \Im x \leq 0.4812928$$

$$y = 0.5, \quad 0.4245 \leq \Re x \leq 0.4385, \quad 0.5364 \leq \Im x \leq 0.5476$$

である。

References

[1] Böttcher, Bull. Kasan Math. Soc. **14** (1905) p176.

[2] 宇敷重広、多次元複素力学系における Böttcher の定理と超安定多様体について、(preprint) 数理解析研究所講究録

[3] J.H.Hubbard and P. Papadopol, Superattractive fixed points in $\mathbb{C}^n$, preprint.

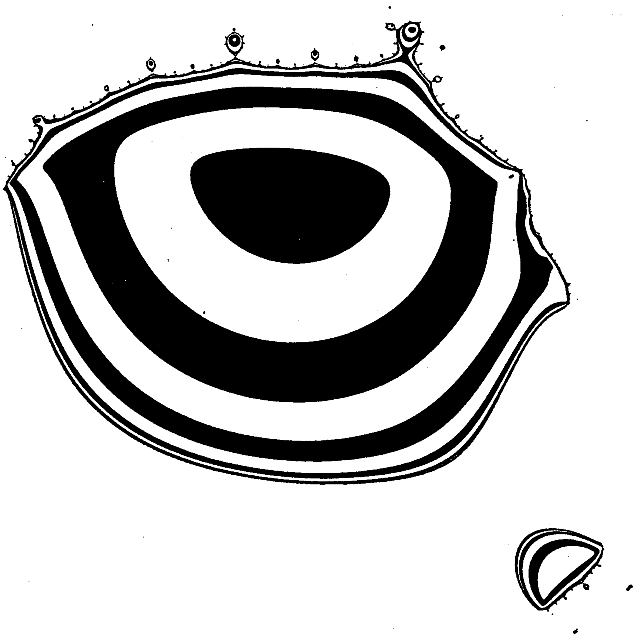

図1

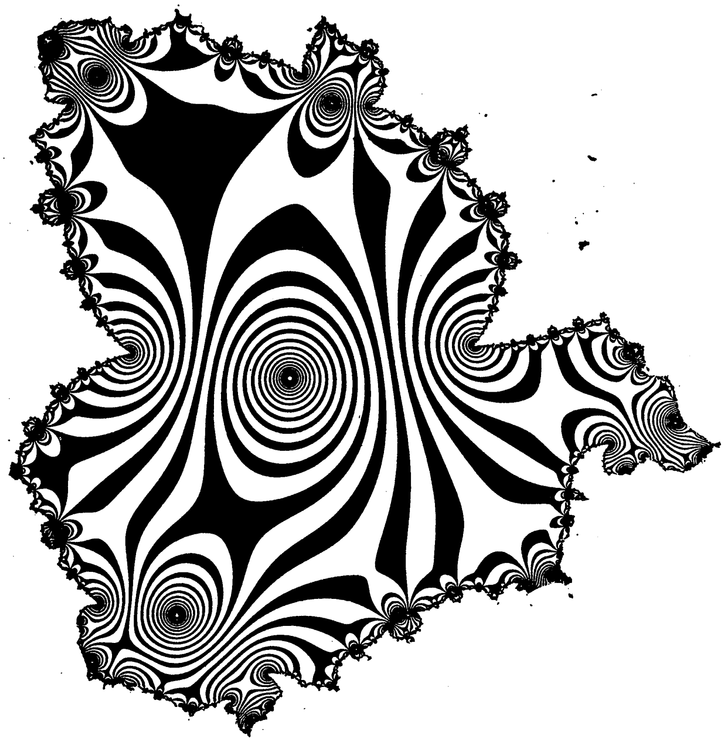

図2

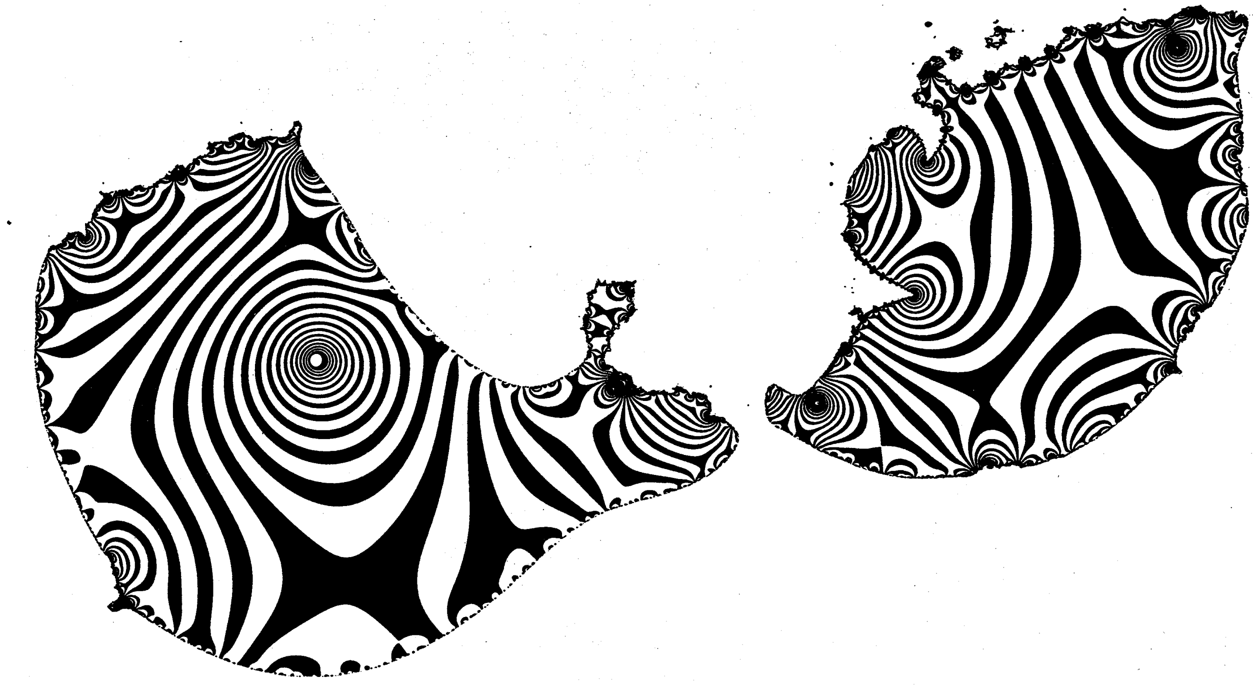

図3

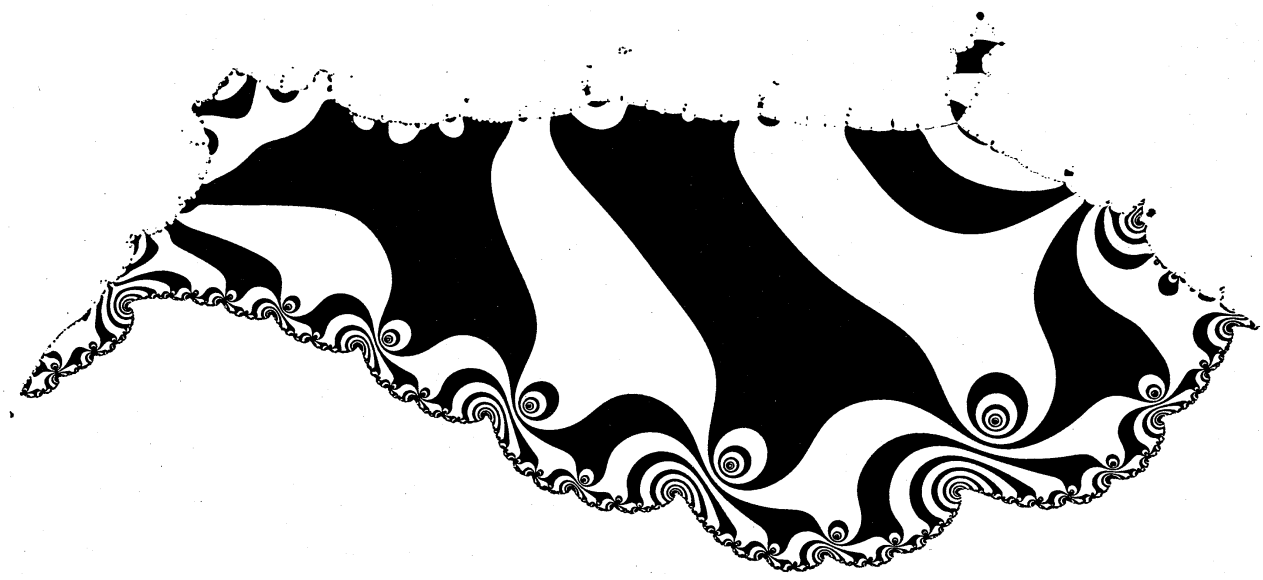

図4

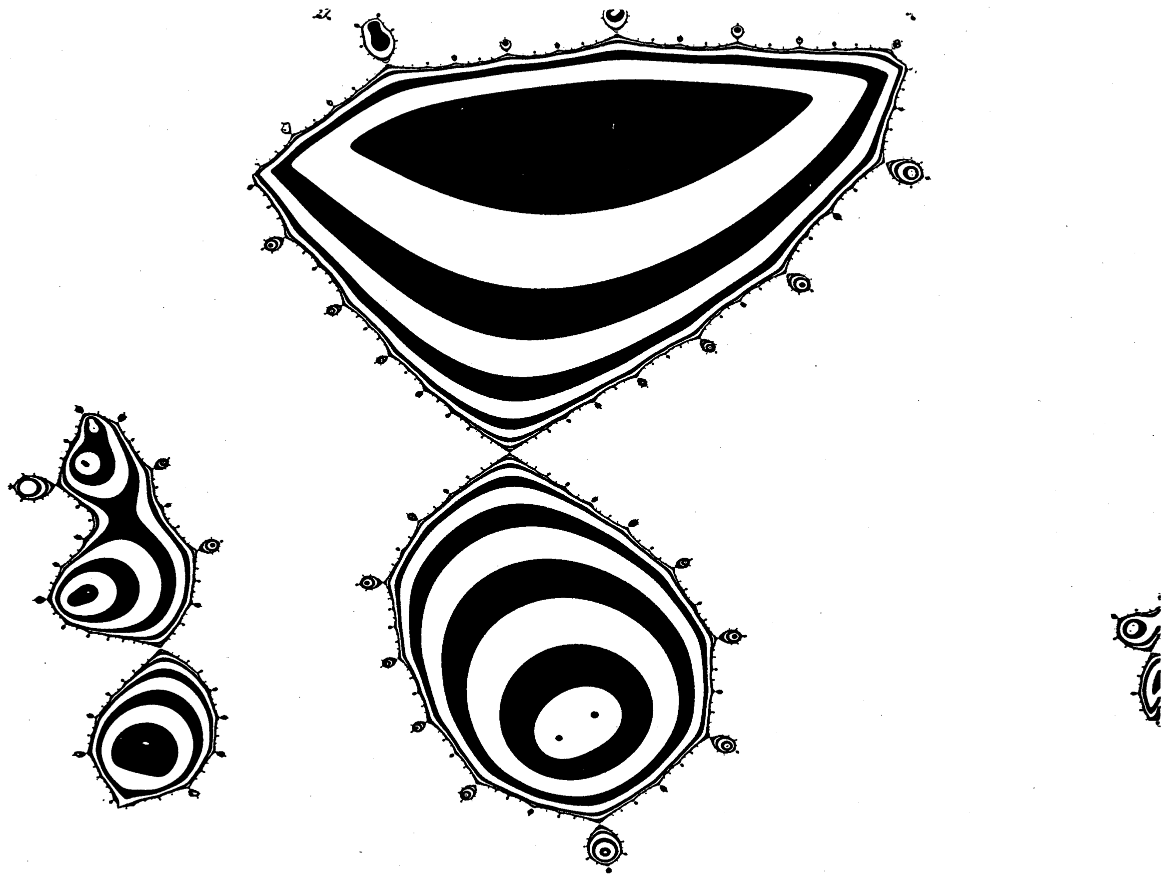

図5

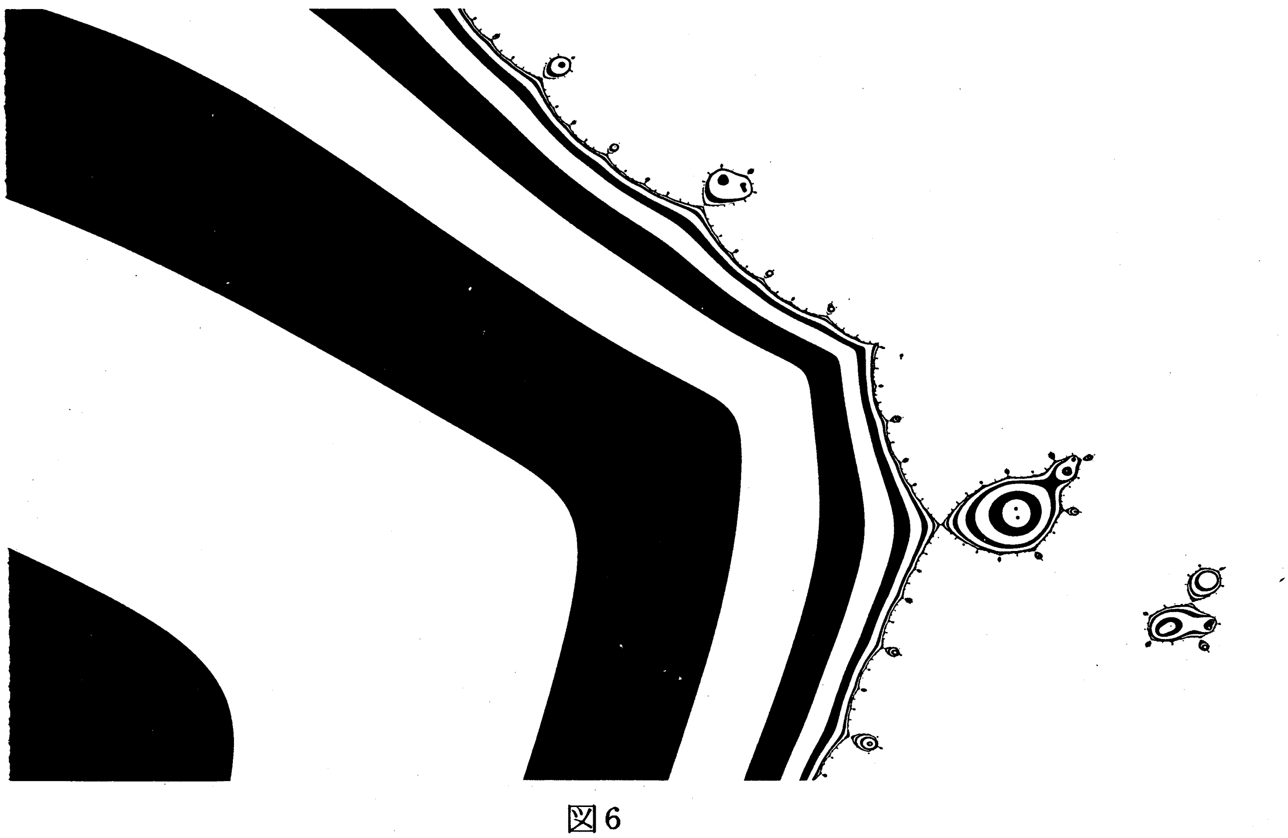

図6

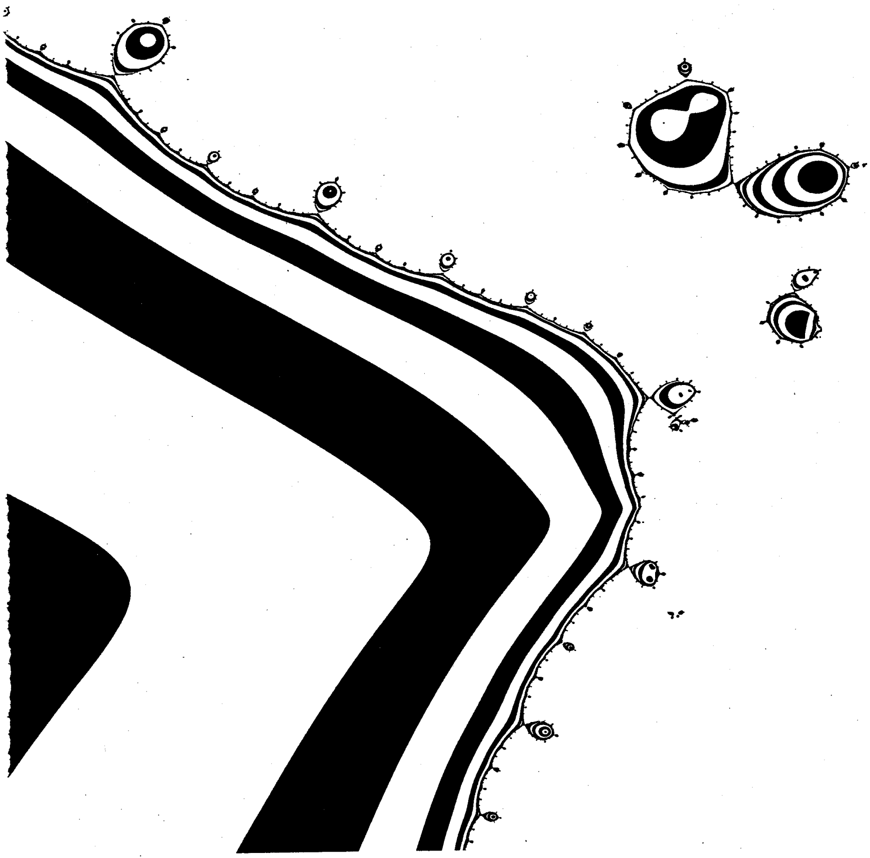

図7

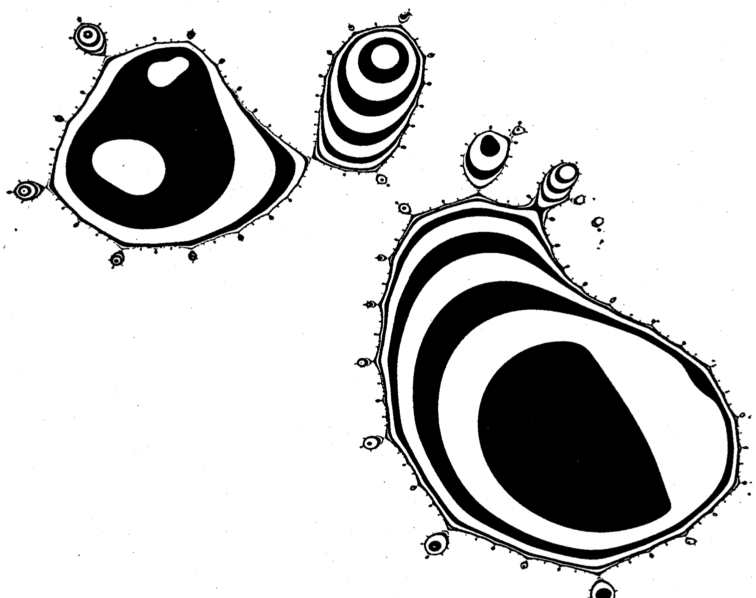

図8