数理解析研究所講究録
第 815 巻 1992 年 97-109

Monge-Ampère方程式について

京都教育大　森本　徹(Tohru Morimoto)

序. 独立変数x, y未知関数zについての2階の方程式:

$$Hr+2Ks+Lt+M+N(rt-s^2)=0$$

はMonge-Ampère方程式として古くから知られている。ここでr, s, tは2階の偏微分$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$を表わす。また$H, K, \cdots, N$は$x$, y, z及び$p(=\frac{\partial z}{\partial x})$, $q(=\frac{\partial z}{\partial y})$の関数である。

1未知関数の1階の偏微分方程式系についてはHamilton, Jacobi, Lie等の理論により極めて透明な理解が得られている。高階の方程式一般に対してはもはやこのような簡明さを望むことはできないが, 2階の非線型方程式の中でMonge-Ampère方程式の族は, ある意味で1階の方程式と相い近い点もあり, 幾何学的になじみやすく, 一方内容も多様性に富んでいて, 興味深い対象であると思われる。

Monge-Ampère方程式の座標によらないintrinsicな定

式は，この方程式を接触多様体上の外微分式系とみなすことによって得られる。即ち5次元接触多様体M上の外微分式系Σで接触形式ωとある2次の外微分形式θ及びそれらの外微分から生成されるものを，拡張された意味でのMonge-Ampère方程式と考える。そしてその最大次元（2次元）の積分多様体を拡張された意味での解と考える。

この観点に立つと，幾何学的に興味深い問題がいろいろ生じてくる。接触同値による分類の問題，積分の問題，大域的な問題，解の特異点，等々。

ここでは，まずMonge-Ampère方程式の輪郭を理解していただくために，[5]に従ってMonge-Ampère方程式の定式，おおまかな分類について述べる。積分についても少し言及する。続いて，接触多様体上に大域的に定義されたMonge-Ampère方程式の1つの興味深い例として，"$rt-s^2=0$"型のMonge-Ampère方程式が3次元射影空間（の射影余接束）上に自然に定義されることを示す。そしてその大域解について1つの顕著な事実を述べる。最後に解の特異点について問題の方向を述べ，石川剛郎氏による結果に触れる。

1. Monge-Ampère外微分式系．　Mを5次元接触多様体とし，その接触構造をDで表わす。Dは接束TMの余次元1

の部分束で，局所的に接触形式ωを用いて　$\omega=0$ で定義される。

M上の外微分式系Σで局所的にωとある2次の外微分形式θ及びそれらの外微分から生成されるものをM-A系と呼ぼう。そしてその最大次元の積分多様体をM-A系の解と呼ぶ。

これはMonge-Ampère方程式の自然な拡張であることを見よう。今 $N\to X$ を fibred manifold とし $\dim N=3$, $\dim X=2$とする。この局所切断σの1-jet $j^1_x\sigma$ 全体のなす空間を$J^1(N;X)$で表わす。これには自然な接触構造が入る。X, Nの局所座標系を(x,y), (x,y,z)とするとJ^1の局所座標系として(x,y,z,p,q)（ここで $p(j^1\sigma)=\frac{\partial(z\circ\sigma)}{\partial x}$, $q(j^1\sigma)=\frac{\partial(z\circ\sigma)}{\partial y}$）がとれ，$J^1$の接触構造は

$$\omega = dz - p\,dx - q\,dy = 0$$

によって定義される。

さて今J^1上にM-A系Σが定義されているとし，その解Sを考えよう。S上ωは消えるので，Sは特にLegendre多様体である。ここでJ^1のLegendre多様体について次のことに注意しよう。$N\to X$の局所切断σに対して $J^1\to X$ の局所切断 $j^1\sigma$ が定まり，これをグラフと見ると $j^1\sigma$ は J^1のLegendre多様体である。逆にJ^1のLegendre多様体Lで$L\to X$ が immersion になっているものは局所的に$j^1\sigma$の

形をしている。

そこでSは$j^1\sigma$の形であるとし，局所座標で $z\circ\sigma = f(x,y)$ とする。Σのもう1つの生成元2-形式θを局所座標 (x, y, z, p, q) で表現し，Sがθを消す条件を書き上げてみると，"SがΣの解 $\Longleftrightarrow$ fは冒頭に書いたMonge-Ampère方程式の解"が分る。

従って$J^1(N, X)$上のM-A系を$N\to X$の切断に対する微分方程式とみるならば，これは通常のMonge-Ampère方程式に他ならない。

fibring $N\to X$を与えることは独立変数の空間を指定するという意味を持つが，この指定をはずすと次のようになる。

Nを3次元の多様体とし$Gr(N;2)$をNの接空間の2次元部分空間のなすN上のGrassmann bundleとする。これは射影余接束PT^*Nと同一視される。$Gr(N;2)$には自然な接触構造が次のように定義される。2次元部分空間 $\eta\subset T_xN$ に対して $D_\eta = (\pi_*)^{-1}(\eta)$ と定める。ここでπは自然な射影 $Gr\to N$ を表わす。

Nの2次元部分多様体Yに対してその lift

$$\tilde{Y} = \{(y, T_yY) \mid y\in Y\}$$

はGrのLegendre多様体であり，逆にGrのLegendre多様体Lで$L\to N$がimmersionとなるものは，局所

的に上の形で与えられる。

従って $Gr(N)$ 上に M-A系 Σ が与えられたとき，これを N の曲面 Y に対する Monge-Ampère 方程式と見ることもできる。（Y が Σ の解とは $\tilde{Y}$ が Σ の積分多様体と定義する。）

任意の接触多様体は局所的には常に $J^1(N, X)$ あるいは $Gr(N)$ と同型であることに注意すると，我々の定義した M-A系は Monge-Ampère 方程式の intrinsic な定式を与えることが納得されよう。

2. 特性系，分類．Σ を接触多様体 (M, D) 上の M-A系とし，接触形式 ω と 2-形式 θ から生成されるとする。Σ の特性系 $\mathcal{V}(\Sigma)$ を Σ の 1 次元の singular integral element 全体の集合とする。即ち $m \in M$ に対して

$$\mathcal{V}(\Sigma)_m = \{ v \in D_m : v \lrcorner \theta \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ \omega,\ v \lrcorner d\omega) \}$$

とおき，$\mathcal{V}(\Sigma) = \bigcup_{m \in M} \mathcal{V}(\Sigma)_m$ とおく。

複素カテゴリーでは各点 $m \in M$ において次の場合に分れる：

(T) $\mathcal{V}(\Sigma)_m = D_m$

(H) $\mathcal{V}(\Sigma)_m = E_m \cup F_m$，ここで E_m, F_m は D_m の 2次元部分ベクトル空間で，$d\omega$ に関して $E_m^{\perp} = F_m$，かつ $D_m = E_m \oplus F_m$

(ハ) $v(\Sigma)_m$ は D_m の 2次元の isotropic subspace

であり上の(H)で $E_m = F_m$ と退化する場合。

上の各々の場合に応じて Σ は m において trivial, hyperbolic, parabolic という。

到る所 hyperbolic 又は 到る所 parabolic と仮定すると、D の階数2の部分束 E, F が存在して

$$v(\Sigma) = E \cup F, \qquad E^{\perp} = F.$$

このようにして M-A 系 Σ にその特性系 E, F が付随するが、逆に D の階数2の部分束 E を与えるとそれを特性系の1つに持つような M-A 系が唯一つ定まる。このようにして M-A 系の幾何は接触構造とその階数2の部分束との組 (D, E) の幾何に帰着する。

注意. 独立変数の数が2以上の時も M-A 系は同様に定義できるが、特性系は格段に複雑になる。

さて一般に多様体 M の接束 TM の部分束 E が与えられたとき E の derived system が次のように定義される。E の切断の芽のなす層を $\underline{E}$ で表わし、$\underline{TM}$ の部分層 $\mathcal{E}^{(p)}$ $(p=0,1,\cdots)$ を次で決める：

$$\begin{cases} \mathcal{E}^{(0)} = \underline{E} \\ \mathcal{E}^{(p+1)} = \mathcal{E}^{(p)} + [\mathcal{E}^{(p)}, \mathcal{E}^{(0)}] \end{cases}$$

必要な regularity は仮定して、$\mathcal{E}^{(p)}$ は ベクトル束 $E^{(p)}$ の

切断の芽のなす層であるとする。今特に $\dim M=5$ のときには $E^{(p)}$ の階数は次の場合に限られる。

	$E^{(0)}$	$\subset E^{(1)}$	$\subset E^{(2)}$	$\subset E^{(3)}$
case (0)	2	2		
case (1)	2	3	3	
case (2)	2	3	4	4
case (3)	2	3	4	5
case (4)	2	3	5	5

そこで Σ の特性系 $V(\Sigma)=E\cup F$ に対して、E, F が上の case(i), case(j) のとき Σ を type $H_{(i,j)}$、$E=F$ で E が case(i) のとき type P_i ということにしよう。

<u>命題</u> (Goursat [7]). もし E 又は F が完全積分可能ならば、$E=F$ で Σ は $rt-s^2=0$ に局所的に接触変換で同値となる。

<u>定理</u> (Lie) もし Σ が type $H_{(1,1)}$ ならば Σ は局所的に接触変換で $s=0$ に同値となる。

証明は [7], [6] を参照.

各 type $H_{(i,j)}$ $(1\leq i\leq j\leq 4)$ P_i $(i=0, 2, 3, 4)$ の M-A 系が存在することも注意しておく。幾何構造の方法を用いるとさらに詳しい分類が可能である。とはいえ M-A 系は極めて多様で完全に分類することは殆んど不可能.

最も generic な type $H_{(4,4)}$ に属しかつ homogeneous な方程式の例を挙げておこう。

$$rt - s^2 = (z - xp - yq)^4.$$

3. 積分. 特性系を用いると解は次のように特徴付けられる。

<u>命題</u>. Σ を接触多様体 M 上の M-A 系とし，その特性系を $\mathcal{V}(\Sigma) = E \cup F$ とする。M の 2 次元の部分多様体 S が Σ の解であるための必要十分条件は，S は Legendre 多様体でありかつ任意の $x \in S$ において

$$T_x S \cap E_x \neq 0 \quad \text{又は（実は，かつ）} \quad T_x S \cap F_x \neq 0$$

が成り立つことである。

これが特性系を用いて解を求めようとするときの基礎となる。E 又は F が 2 つの独立な第 1 積分を持つとき（即ち $E^{(1)}$ 又は $F^{(1)}$ が完全積分可能のとき）Σ は Monge 可積分と呼ばれ，一般な Cauchy 問題は特性方向への積分によって解くことができる（Monge の解法）。しかしこの条件を満さない Monge-Ampère 方程式も沢山ある。これらに対してもよい解法があるかどうか。松田道彦氏による研究 [4] があり，Bäcklund 変換とも密接に関係し，興味ある問題がいろいろあるが，まだ良く解明されていない。

4. $rt-s^2=0$ の大域的モデル. Vを4次元のベクトル空間としその双対をV^*, それらの射影化を$P(V)$, $P(V^*)$で表わす。

$$Q=\{([x],[\xi])\in P(V)\times P(V^*)\ ;\ \langle x,\xi\rangle=0\}$$

とおくと, 自然な射影

$$\begin{tikzcd}
 & Q \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "p'"] & \\
P(V) & & P(V^*)
\end{tikzcd}$$

があって, Qは$P(V)$, $P(V^*)$の射影余接束と同一視できる:

$$Q\simeq PT^*P(V)\simeq PT^*P(V^*).$$

さらにこれが接触多様体としての同型となるような接触構造DがQ上に自然に定義でき,

$$D=\mathrm{Ker}\,p_*\oplus\mathrm{Ker}\,p'_*$$

と直和分解する。

$\mathrm{Ker}\,p'_*$はDの階数2の部分束なので, これを特性系とするM-A系がQ上に一意的に定まる。これをΣ_0で表わそう。$\mathrm{Ker}\,p'_*$は完全積分可能なのでΣ_0 is type P_0 即ち"$rt-s^2=0$"型のM-A系である。Σ_0はこのように射影構造のみからcanonicalに定まるので, 射影幾何に付随したMonge-Ampère方程式である。

Qの曲面SがΣ_0の解であるための条件は, 前節の命題よ

り，S が Legendre 多様体であって $\rho' : S \to P(V^*)$ の階数が到る所 1 以下になることである。従って Σ_0 を $P(V)$ の曲面に対する Monge-Ampère 方程式と見ると，$P(V)$ の曲面 Y が Σ_0 の解となるのは，$\mathrm{rank}(\rho'|_{\tilde{Y}}) \leq 1$ が成り立つときである。ここで $\tilde{Y}$ は Y の lift，即ち Y の射影法束を表わす。このことから Σ_0 の解 Y は線織面であって，その直線に沿って接空間が一定という性質を持つ。例えば affine 座標 (x, y, z) で

$$z^2 = x^2 + y^2$$

と表わされる円錐 C は Σ_0 の解である。その Q への lift $\tilde{C}$ はトーラスと同相であり，C は特異点を持つが $\tilde{C}$ は滑らかであることに注意する。$P(V)$ 内の滑らかな大域解について次の定理が得られる。

<u>定理</u>．$P(V)$ のコンパクト，連結な Σ_0 の解は，$P(V)$ の平面に限る．

これは Bernstein の定理 "$rt - s^2 = 1$ の全 (x, y)-平面で定義された解は 2 次以下の多項式に限る。" と対比をなす。Bernstein の定理は楕円型方程式の性質に由来するが，上の定理は，退化した方程式に対するものであり，射影幾何的性質に由来し，実，複素両カテゴリーで成立つ。

5. 解の特異点. Σを接触多様体M上のM-A系とする。Σの解の特異点を問題にする時，特異点についてまず次の区別が必要である。

(i) 本来の特異点，即ちΣの積分多様体としてMの中で既に特異点を持っている場合.

(ii) Legendre fibringに関する特異点. $M = \mathcal{G}_2(N)$と表わされたとき，fibring $\mathcal{G}_2(N) \xrightarrow{\rho} N$に関する特異点，即ち$\Sigma$の解$S \subset \mathcal{G}_2(N)$は非特異であるが$\rho(S)$が特異点を持つ場合.

(iii) 独立変数の空間への射影に関する特異点. 即ち$M = J^1(N;X)$と表わされたとき，fibring $J^1(N;X) \to X$に関して現われる特異点.

M-A系の解は特にLegendre varietyでもあるが，方程式の解であることが，特異点の表わ方にどのような制約を与えるか。また相異るM-A系が種々沢山あるが，この違いは特異点の表われ方にどのような違いを生じるか，など，色々な問題が考えられる。

ここで石川氏による結果を1つ紹介しよう。

$$(x, y, z; p, q) \circ f = (u, v^2, uv^3; v^3, \tfrac{3}{2}uv)$$

で定義されるmap-germ $f: \mathbb{R}^2, 0 \longrightarrow \mathbb{R}^5, 0$を考えよう。これは$\mathbb{R}^5$の接触形式 $\omega = dz - pdx - qdy$ に

関して isotropic，即ち $f^*\omega = 0$ が成立つ。接触多様体 M への isotropic map-germ $g : \mathbb{R}^2, 0 \to M$ が上の f と parametrization を除いて接触同値のとき g を open umbrella という。

<u>命題</u>. open umbrella は "$rt - s^2 = 0$" 型の M-A 系の解になるが，"$s = 0$" 型の M-A 系の解にはなりえない。

なお $PT^*P(V)$ 上の "$rt - s^2 = 0$" 型の M-A 系 Σ_0 については，$P(V^*)$ 内の曲線の $PT^*P(V)$ への lift (projective conormal bundle) は常に Σ_0 の解になることに注意すると，石川氏の射影曲線に関する研究 ([2], [3]) から，この方程式の解の特異点についてさらに詳しい情報が得られる。

References

[1] E. Goursat, "Leçon sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendentes, I, II," Hermann, Paris, 1896, 1898

[2] G. Ishikawa, Determinacy of envelope of the osculating hyperplanes to a Curve, Hokkaido Univ. Preprint series # 150, 1992.

[3] G. Ishikawa, Developable of a curve and determinacy relative to osculation-type, Hokkaido Univ. Preprint series #151, 1992.

[4] 松田道彦, Monge-Ampère 方程式について, 数学, 24-2 (1972), 100-118.

[5] T. Morimoto, La géométrie des équations de Monge-Ampère, C.R. Acad. Sci. Paris 289 (2 juillet 1979), A-25 - A-28.

[6] T. Morimoto, Geometric structures on filtered manifolds, Hokkaido Univ. Preprint series #142, 1992.