

## 半単純対称空間の Casimir 作用素の動径成分

東大・数理科学 関口英子(Hideko Sekiguchi)

### §1 半単純対称空間の Casimir 作用素の動径成分

$G$ ; 実半単純連結 Lie 群 finite center

$\sigma$ ;  $G$  の involution.

$\theta$ ;  $G$  の Cartan involution.  $\sigma\theta = \theta\sigma$ .

対応する Lie 環の involution を同じ記号で書くと、 $G$  の Lie 環の固有空間分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$$

$$\begin{matrix} \theta+1 & -1 & \sigma+1 & -1 \end{matrix}$$

が得られる。 $\sigma$  によって決まる組  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  を半単純対称対と呼ぶ。

$\alpha \in \mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}$  の極大可換部分空間  $K, H, A$  を  $\mathfrak{k}, \mathfrak{h}, \mathfrak{a}$  に対応する analytic subgroup とする。組  $(\mathfrak{g}, \alpha)$  に対応するルート系を  $\Sigma = \Sigma(\alpha)$ , その Weyl 群を  $W(\Sigma)$  とする。

$$\mathfrak{g}(\sigma, \lambda) = \{X \in \mathfrak{g}; \operatorname{ad}(H)X = \lambda(H)X \quad H \in \sigma\}$$

$$\mathfrak{g}^{\pm}(\sigma, \lambda) = \{X \in \mathfrak{g}(\sigma, \lambda); \sigma \theta X = \pm X\}$$

$$m_{\lambda}^{\pm} := \dim \mathfrak{g}^{\pm}(\sigma, \lambda); \quad \lambda \text{ の符号}$$

$$m_{\lambda} = m_{\lambda}^{+} + m_{\lambda}^{-}; \quad \lambda \text{ の重複度}$$

とする。

$G=KAH$  分解に対する Casimir 作用素の動径成分は、

$a^{\lambda} \neq 1 \quad (\forall \lambda \in \Sigma(\sigma))$  なる  $a \in A$  に対し、

$$\Delta = \sum_{j=1}^m H_j^2 + \sum_{\lambda \in \Sigma(\sigma)^+} \left\{ m_{\lambda}^{+} \frac{C_{\lambda}(a)}{\Delta_{\lambda}(a)} + m_{\lambda}^{-} \frac{\Delta_{\lambda}(a)}{C_{\lambda}(a)} \right\} Q_{\lambda}$$

とする。

$$\left( \begin{array}{l} \{H_j\}_{j=1}^m; \sigma \text{ の正規直交基底, } n = \dim \sigma \\ Q_{\lambda} \in \sigma \text{ s.t. } \langle H, Q_{\lambda} \rangle = \lambda(H) \quad (H \in \sigma) \\ C_{\lambda}(a) = \frac{1}{2}(a^{\lambda} + a^{-\lambda}) \quad \Delta_{\lambda}(a) = \frac{1}{2}(a^{\lambda} - a^{-\lambda}) \end{array} \right)$$

リーマン対称空間の場合は、

$$(1.1) \quad m_{\bar{\lambda}} = 0 \quad m_{w\lambda} = m_{\lambda} \quad (w \in W(\Sigma))$$

が、成り立っている。Heckman-Opdam は、(1.1) の条件の下で一般の複素数  $m_{\lambda}$  に対しても、 $W(\Sigma)$  の不変式環と同型な可換な微分作用素環で  $\Delta$  を含むものが存在することを示した。

([H1], [H2], [H-O], [Op1], [Op2]) そこで、(1.1) の条件を

満たす複素数  $m_\lambda$  に対して定義された  $\Delta$  を Heckman-Opdam 型作用素と呼ぶことにする。

定理 1.2 半単純対称空間の Casimir 作用素の動径成分は、簡単な座標変換や複素化した座標の下での原点のとりかえによって、Heckman-Opdam 型作用素に変換される。

定義 1.3 ([O-S]) 任意の simple root  $\lambda$  に対して

$$m_\lambda^\pm \geq m_\lambda^-$$

が成り立つ時、半単純対称対  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  は basic であるという。

注  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  が basic の時

$$m_{w\lambda}^\pm = m_\lambda^\pm \quad (\forall w \in W(\Sigma))$$

が成り立つ。([O-S])

定理 1.2 の証明

1) 符号の性質を調べる。

例  $BC_1$  型の場合

$$\Delta = H^2_+ \left\{ m_\lambda^+ \frac{C_\lambda(a)}{S_\lambda(a)} + m_\lambda^- \frac{S_\lambda(a)}{C_\lambda(a)} + 2m_{2\lambda}^+ \frac{C_{2\lambda}(a)}{S_{2\lambda}(a)} + 2m_{2\lambda}^- \frac{S_{2\lambda}(a)}{C_{2\lambda}(a)} \right\} Q_\lambda$$

$$= H^2 \left\{ (m_{\lambda^+}^+ - m_{\lambda^-}) \frac{C_{\lambda}(a)}{\Delta_{\lambda}(a)} + 2(m_{2\lambda^+}^+ + m_{\lambda^-} - m_{2\lambda^-}) \frac{C_{2\lambda}(a)}{\Delta_{2\lambda}(a)} + 4m_{2\lambda^-} \frac{C_{4\lambda}(a)}{\Delta_{4\lambda}(a)} \right\} Q_{\lambda}$$

ここで

$m_{2\lambda}^- \neq 0$  の時、 $m_{\lambda^+}^+ = m_{\lambda^-}$  が成り立つ ([O-S]).

従って、 $\Delta$  は定数倍の座標変換によって、Heckman-Opdam型作用素になる。

$BC_2$  型以外の場合も、半単純対称対  $(\sigma, \theta)$  が basic ならば、同様にしてルートの符号が以下のような性質をもつことが分かる。([Sh])

I.  $\lambda_1, \lambda_2 \in \Sigma(\sigma) \xrightarrow[\lambda_2]{\lambda_1} \lambda_1$  とする。

①  $2\lambda_1 \in \Sigma(\sigma)$ ,  $m_{2\lambda_1}^- \neq 0$  の時  $m_{\lambda_2}^+ = m_{\lambda_2}^-$

②  $2\lambda_1 \in \Sigma(\sigma)$ ,  $m_{2\lambda_1}^- = 0$ ,  $m_{\lambda_1}^+ \neq m_{\lambda_1}^-$  の時、 $m_{\lambda_2}^- = 0$

③  $2\lambda_1 \notin \Sigma(\sigma)$ ,  $m_{\lambda_2}^- \neq 0$  の時  $m_{\lambda_1}^+ = m_{\lambda_1}^-$

II.  $\lambda_1, \lambda_2 \in \Sigma(\sigma) \xrightarrow[\lambda_2]{\lambda_1} \lambda_1$  とする。

$m_{\lambda_1}^- \neq 0$  の時  $m_{\lambda_1}^+ = m_{\lambda_1}^-$

このような符号の性質から、 $BC_2$  型の時と同様にして定理 1.2 が証明できる。

2)  $(\sigma, \theta)$  が basic でない場合、複素化した座標の  $F$  で原点を移動して basic な場合に帰着することを示す。

定義 1.4 ([0-5])  $\varepsilon: \Sigma(\alpha) \rightarrow \{\pm 1\}$  なる写像で

$$\varepsilon(\alpha + \beta) = \varepsilon(\alpha)\varepsilon(\beta) \quad \alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Sigma(\alpha)$$

$$\varepsilon(-\alpha) = \varepsilon(\alpha)$$

を満たす  $\varepsilon$  をルート系  $\Sigma(\alpha)$  の signature と呼ぶ。

(9.8) が basic でない時、 $\lambda \in \Sigma(\alpha)$  に対して signature

$\varepsilon_\varepsilon$

$$\varepsilon_\varepsilon(\lambda) = \begin{cases} 1 & m_\lambda^+ \geq m_\lambda^- \\ -1 & m_\lambda^+ < m_\lambda^- \end{cases}$$

とする。  $\{Y_i\}$  を simple roots  $\{\lambda_i\}$  に対する dual basis とする。

$$a_\varepsilon = \exp \sum_{i=1}^m \frac{\sqrt{1-\varepsilon(\lambda_i)}\pi}{4} Y_i$$

この  $a_\varepsilon$  に対する  $a \mapsto a \cdot a_\varepsilon = \tilde{a}$  という座標変換によって basic な場合に帰着される。  $\square$

注意  $H, K$  に 1 次元表現をつけて帯球函数の満たす微分方程式系にも、同様にして定理 1.2 が拡張できることが分かる。  
(古典型の場合)

## §2 Weyl群不変な可換微分作用素系

条件(1.1)のFで

$$a = \exp H \in A \mapsto \delta = \prod_{\lambda \in \Sigma(\mathfrak{a})^+} (\delta h^\lambda(H))^{m_\lambda}$$

と、おくと

$$(2.1) \quad \delta^{\frac{1}{2}} \cdot \Delta \cdot \delta^{-\frac{1}{2}} = \sum_{j=1}^n H_j^2 + \sum_{\lambda \in \Sigma(\mathfrak{a})^+} \frac{\frac{1}{2} m_\lambda (1 - \frac{1}{2} m_\lambda - m_{2\lambda})}{\delta h^{2\lambda}(H)} - \frac{1}{4} \left| \sum_{\lambda \in \Sigma(\mathfrak{a})^+} m_\lambda \lambda \right|^2$$

ここで、右辺の和の2項目をWeyl群不変な函数  $R_1$  として次の問題を考える。

1. Weyl群不変な可換微分作用素系で、以下に述べる(2.2)を満たすものが存在する時、 $R_1$ はどのような函数か。
2. 1で与えた  $R_1$  に対し、(2.2)を満たす微分作用素系は、どのような形で書けるか。

そこで上の問題を以下のように定式化する。

$(\Sigma, E)$ ; rank  $n$  の既約かつ被約ルート系

( $\Sigma^+$  を fix しておく.)

$W(\Sigma)$ ; 対応するWeyl群

$S(E)$ ;  $E$ 上の symmetric algebra

$\partial$ ;  $E$ の元  $Y$  に対し、

$$\partial(Y); C^\infty(E) \ni \varphi(x) \mapsto \frac{d}{dt} \varphi(x+tY) \Big|_{t=0}$$

を対応させる写像を、 $S(E)$  から  $E$  上の微分作用素環への代数的準同型に拡張したもの。

$p_1 \cdots p_m$ ;  $S(E)$  の  $W(\Sigma)$ -不変式環の homogeneous generators ( $\deg p_i = 2$  とする.)

問題  $E$  上の微分作用素系

$$D_j = \partial(p_j) + R_j \quad (j=1 \cdots n)$$

で、次の条件(2.2)を満たすものを求めよ。

$$(2.2) \quad \begin{cases} D_j \text{ は } W(\Sigma)\text{-不変} \\ \text{ord } R_j \leq \deg p_j - 1 \quad \text{但し } \text{ord } R_1 = 0 \text{ (i.e. } R_1 \text{ は関数)} \\ [D_i, D_j] = 0 \quad (1 \leq i, j \leq n) \end{cases}$$

注意

① 標準的な座標を用いれば、

$$D_1 = \left( \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \right) + R_1(x)$$

となる。

② Heckman-Opdam の構成した可換微分作用素系も上のような  $\{D_j\}$  の形をしている。

定理 2.3 (大島-関口)  $d_0 \in \Sigma^+$  を fix する。  $\Sigma$  が古典型の時

上記の  $R_\alpha$  は、1変数関数  $u(t), v(t)$  によつて

$$R_\alpha(x) = \sum_{\substack{d \in \Sigma^+ \\ |d| = |\alpha|}} u(\langle d, x \rangle) + \sum_{\substack{\beta \in \Sigma^+ \\ |\beta| \neq |\alpha|}} v(\langle \beta, x \rangle)$$

と表わせる。

$A_{m-1}$  型の場合  $E = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m; x_1 + \dots + x_m = 0\} \subset \mathbb{R}^m \rightarrow$   
 $\sum_{i=1}^m x_i e_i$  により、 $E$  を  $\mathbb{R}^m$  に埋め込んで、 $W \simeq \mathbb{C}_m$  を  $(x_1, \dots, x_m)$   
 の座標の入れかえと考える。(rank は  $n = m-1 \geq 2$  とする。)

$\Sigma^+ = \{e_i - e_j; 1 \leq i < j \leq m\}$  とするよい。

$I = \{1, \dots, m\}$  の部分集合  $J$  と自然数  $l$  に対し、

$\Sigma(J; l) := \{ \{d_1, \dots, d_l\}; d_1, \dots, d_l \text{ } e_j (j \in J) \text{ は互いに直交し、} \\ d_1 \dots d_l \in \Sigma^+ \}$

$$a_{\alpha, J}(x) = \begin{cases} \sum_{\Lambda \in \Sigma(J; l)} \prod_{d \in \Lambda} u(\langle d, x \rangle) & (l \geq 1) \\ 1 & (l = 0) \end{cases}$$

とする。

$$(2.4) \quad \Delta_k := \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \sum_{\substack{J \subset I \\ |J| = k-2l}} \left( a_{\alpha, J}(x) \prod_{j \in J} \frac{\partial}{\partial x_j} \right)$$

定理 2.5 (大島-関口)  $\Sigma$  が  $A_{m-1}$  型とする。上記の可換な系  
 が存在し、 $\Omega \setminus \{0\}$  で定理 2.3 の  $u(t)$  が正則になるような  
 $\mathbb{C}$  の原点の近傍  $\Omega$  が存在するならば、

$$(2.6) \quad u(t) = C_1 \rho(t | 2\omega_1, 2\omega_3) + C_2$$

$$\left( \begin{array}{l} C_1, C_2 \in \mathbb{C}, \rho \text{ は Weierstrass の } \rho \text{ 函数で} \\ 2\omega_1, 2\omega_3 \text{ は 基本周期} \end{array} \right)$$

逆に、(2.6)の  $u(t)$  に対し、 $\Delta_1, \dots, \Delta_m$  は互いに可換となり  
(2.2) を満たす系が得られる。

### 注意

①  $\rho$ -函数の基本周期を  $2\omega_1 = \sqrt{1}\pi$ ,  $2\omega_3 = \infty$  とおくと

$$\rho(z | \sqrt{1}\pi, \infty) = \Delta_1 z^2 + \frac{1}{3}$$

が成り立つ。

② 一意性.  $\Delta_2, \Delta_3$  により、 $\mathbb{C}[\Delta_2, \dots, \Delta_m]$  が一意的に決まることも分かる。

定理 2.5 について、例えば、 $A_2$  型の時を考えてみよう。

$$E = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 + x_3 = 0\} \subset \mathbb{R}^3$$

$$d_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$\Delta_2 = \sum_{i < j} d_i d_j + R_1 \quad R_1 \text{ は } \mathcal{L}_3 \text{ 不変}$$

$$\Delta_3 = d_1 d_2 d_3 + a'_1 d_1 + a_1^2 d_2 + a_1^3 d_3 + a_0 \quad ; \mathcal{L}_3 \text{ 不変}$$

とする。  $[\Delta_2, \Delta_3] = 0$  という条件から

$\exists u$ ; 偶函数

$$\Delta_1 \text{ 尤、 } [a'_1(x_1, x_2, x_3) = u(x_2 - x_3)]$$

$$\begin{cases} A_2^3(x_1, x_2, x_3) = u(x_3 - x_1) \\ A_1^3(x_1, x_2, x_3) = u(x_1 - x_2) \\ R_1(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i < j}^3 u(x_i - x_j) \\ A_0 = \text{constant} \end{cases}$$

が分かり、更に  $u$  は

$$\begin{aligned} & u(t) \{u'(a) + u'(a+t)\} + u(a+t) \{-u'(a) + u'(t)\} \\ & + u(a) \{-u'(t) - u'(a+t)\} = 0 \end{aligned}$$

を満足することが分かる。

特に、原点を含む開集合  $\Omega$  があって、 $u$  が  $\Omega \setminus \{0\}$  で正則とすると、

$$\exists C_1, C_2 \in \mathbb{C} ; u = C_1 p + C_2$$

$p$  は Weierstrass の  $p$  函数。

このことから、 $A_2$  の時は定理 2.4 が示される。一般の時はより複雑になるが同様にして示せる。

例  $A_3$  型の時、(2.4) の作用素を具体的に書くと次のようになる。

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \partial_i \partial_j + \sum_{1 \leq i < j \leq 4} u(x_i - x_j) \\ \Delta_3 &= \sum_{1 \leq i < j < k \leq 4} \partial_i \partial_j \partial_k + \sum_{i=1}^4 \left\{ \sum_{\substack{j < k < i \\ 1 \leq j < k \leq 4}} u(x_j - x_k) \right\} \partial_i \end{aligned}$$

$$\Delta_4 = \partial_1 \partial_2 \partial_3 \partial_4 + u(x_3 - x_4) \partial_1 \partial_2 + u(x_2 - x_4) \partial_1 \partial_3 + u(x_2 - x_3) \partial_1 \partial_4$$

$$\begin{aligned}
& + u(x_1 - x_4) \partial_2 \partial_3 + u(x_1 - x_3) \partial_2 \partial_4 + u(x_1 - x_2) \partial_3 \partial_4 \\
& + u(x_1 - x_2) u(x_3 - x_4) + u(x_1 - x_3) u(x_2 - x_4) \\
& + u(x_1 - x_4) u(x_2 - x_3)
\end{aligned}$$

$B_m, D_m$  型の場合 (2.2) を満たす微分作用素系  $\{D_j\}$  が存在すると仮定する。原点を含む開集合  $\Omega$  があって、 $u, v$  が  $\Omega \setminus \{0\}$  で正則とする。自明な場合を除くと、 $u, v$  は以下のものに限ることが証明される。

$D_m$  ( $m \geq 3$ ) 型では、

$$u(t) = C_1 p(t | 2\omega_1, 2\omega_3) + C_0 \quad C_0, C_1 \in \mathbb{C}$$

又は、

$$u(t) = C_1 t^2 + C_2 t^{-2} + C_0 \quad C_0, C_1, C_2 \in \mathbb{C}$$

$B_m$  ( $m \geq 3$ ) 型では、

$$(2.6) \left\{ \begin{aligned}
u(t) &= \frac{C_4 p(t)^4 + C_3 p(t)^3 + C_2 p(t)^2 + C_1 p(t) + C_0}{p'(t)^2} \\
p(t) &= p(t | 2\omega_1, 2\omega_3) \quad C_j \in \mathbb{C} \quad (j = 0, 1, 2, 3, 4) \\
v(t) &= A_1 p(t | 2\omega_1, 2\omega_3) + A_0 \quad A_0, A_1 \in \mathbb{C}
\end{aligned} \right.$$

又は、

$$(2.7) \left\{ \begin{aligned}
u(t) &= C_1 t^2 + C_2 t^{-2} + C_0 \quad C_0, C_1, C_2 \in \mathbb{C} \\
v(t) &= A_1 t^2 + A_2 t^{-2} + A_0 \quad A_0, A_1, A_2 \in \mathbb{C}
\end{aligned} \right.$$

注意  $B_2$ 型では、上は構成できるが、それに限ることは言えない。∞での Harish-Chandra 展開にあたる仮定、即ち  $\Delta = e^\alpha$  として  $u(\log \Delta), v(\log \Delta)$  が、 $0 < |\Delta| \ll 1$  で正則とする。上のような仮定の  $F$  で、

$$U(\Delta) = u(\log \Delta) = \sum_{k \geq k_2} a_k \Delta^k$$

とする。  $\{D_i\}$  が (2.2) を満たすことから、 $A$ 型の時と同様な計算によって、 $\mathcal{E} = \Delta^{k_2}$  と変換すると、 $U(\Delta)$  は

$$\langle \Delta h^{-2\xi}, \Delta h^{-2\xi/2}, 1, ch\xi, ch2\xi \rangle$$

によって生成されることが分かる。(cf. (2.1))

(2.6)式で、 $2w_1 = \sqrt{-1}\pi$ ,  $2w_3 = \infty$ ,  $t = \xi/2$  とすると、 $u$  は  $\langle \Delta h^{6t} ch^{-2t}, \Delta h^{4t} ch^{-2t}, \Delta h^{2t} ch^{-2t}, ch^{-2t}, \Delta h^{-2t} ch^{-2t} \rangle$  によって生成される場合と一致している。従って (2.6)は、上の仮定を与えた場合の拡張には、なっていることが分かる。

例  $u, v$  が (2.7) の形で与えられる時、 $D_1, D_2$  は次のように書ける。(  $A_0, C_0 = 0$  とおく。)

$$D_1 = \partial_1^2 + \partial_2^2 + C_1 \{ (\chi_1 + \chi_2)^2 + (\chi_1 - \chi_2)^2 \} + C_2 \{ (\chi_1 + \chi_2)^{-2} + (\chi_1 - \chi_2)^{-2} \} \\ + A_1 (\chi_1^2 + \chi_2^2) + A_2 (\chi_1^{-2} + \chi_2^{-2})$$

$$D_2 = \partial_1^2 \partial_2^2 + (A_1 \chi_2^2 + A_2 \chi_2^{-2}) \partial_1^2 + (A_1 \chi_1^2 + A_2 \chi_1^{-2}) \partial_2^2 \\ + [ C_1 \{ (\chi_1 + \chi_2)^2 - (\chi_1 - \chi_2)^2 \} + C_2 \{ (\chi_1 + \chi_2)^{-2} - (\chi_1 - \chi_2)^{-2} \} ] \partial_1 \partial_2$$

$$\begin{aligned}
& + [C_1 \{(\chi_1 + \chi_2) + (\chi_1 - \chi_2)\} - C_2 \{(\chi_1 + \chi_2)^{-3} + (\chi_1 - \chi_2)^{-3}\}] \partial_1 \\
& + [C_1 \{(\chi_1 + \chi_2) - (\chi_1 - \chi_2)\} - C_2 \{(\chi_1 + \chi_2)^{-3} - (\chi_1 - \chi_2)^{-3}\}] \partial_2 \\
& + \frac{1}{4} [C_1 \{(\chi_1 + \chi_2)^2 - (\chi_1 - \chi_2)^2\} + C_2 \{(\chi_1 + \chi_2)^{-2} - (\chi_1 - \chi_2)^{-2}\}] \\
& + [2C_1 + 3C_2 \{(\chi_1 + \chi_2)^{-4} + (\chi_1 - \chi_2)^{-4}\}] \\
& + (A_1 \chi_1^2 + A_2 \chi_1^{-2})(A_1 \chi_2^2 + A_2 \chi_2^{-2}) \\
& + 8C_2 (A_2 + A_1 \chi_1^2 \chi_2^2) (\chi_1^2 - \chi_2^2)^{-2} + 8C_1 A_1 \chi_1^2 \chi_2^2
\end{aligned}$$

## References

- [D] A. Debiard, Systèm différentiel hypergéométrique et parties radiales des espaces symétriques de type  $BC_p$ , Springer Lecture Notes in Math. 1296 (1988), 42-124.
- [H1] G.J. Heckman, Root system and hypergeometric functions II, *Comp. Math.* 64 (1987), 353-373
- [H2] —, An elementary approach to the hypergeometric shift operators of Opdam, *Invent. Math.* 103 (1991), 341-350.
- [H·0] G.J. Heckman and E.M. Opdam, Root system and hypergeometric functions I, *Comp. Math.* 64 (1987) 329-352.
- [Op1] E.M. Opdam, Root system and hypergeometric

- functions III, *Comp. Math.* 67(1988), 21-49.
- [Op2] —, Root system and hypergeometric functions IV,  
*Comp. Math.* 67(1988), 191-209.
- [OS] T. Oshima and J. Sekiguchi, The restricted root system of a semisimple symmetric pair,  
*Advanced Studies in Pure Math.* 4(1984) 433-497
- [S<sub>j</sub>] J. Sekiguchi, Zonal spherical functions on some symmetric spaces, *Rubl. RIMS Kyoto Univ.* 12  
Suppl. (1977), 455-459.
- [Sh] H. Sekiguchi, 半単純対称空間のカシミール作用素の動径成分について 修士論文 (1992)
- [WW] E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, Forth Edition, Cambridge University Press, 1927.