

渦度場の特異性

東京電機大学理工 福湯章夫 (Akio Fukuyu)

§1. 3次元非粘性流体の流れで、初期に滑らかな速度場から出発して有限時間内に特異性が現れるか？これは流体力学的にも数学的にも未解決の問題である。

本稿では、まずこの問題に関連するいくつかの結果を整理してみよう。

(1) 数学的結果：

特異性の出現は渦度場の最大値ノルムに支配されるという Beale-Kato-Majda [1] の結果はよく知られている。即ち、渦度場の最大値ノルムを

$$\|\omega\|_{L^\infty} = \max_{x \in R^3} |\omega(x)|.$$

とすれば、ある T に対して

$$\int_0^t \|\omega\|_{L^\infty}(s) ds \rightarrow +\infty \quad \text{as } t \rightarrow T.$$

が成り立つ、また、変形テンソルについての同様の結果が Ponce [2] によって得られている。

(2) 数値シミュレーション：

(i) 等方性乱流

近年、コンピュータによる等方性乱流の直接数値シミュレーションの結果以下のことが明らかになった ([3]~[8])。

(a) 高レイノルズ数流では渦度はほぼ直線の管状の領域に集中する。

(b) この管状領域の太さは Kolmogorov dissipation-length scale の程度で、その長さは interral scale の程度である。

(c) 集中渦の方向は変形テンソルの三つの固有値のうち、中間の固有値の方向にほぼ一致する。

これらの数値シミュレーションは、 $R_\lambda \sim 100$ 前後の計算であるが、 $v \rightarrow 0$ の極限で上の (a)、(b) に対応して、有限の長さの無限に細い集中渦が現れるとは考えにくい。エネルギー有限の制限があるからである。

(ii) swirling flow

非粘性流体について回転対称性を持った **swirling flow** の直接数値シミュレーションの結果、Beale-Kato-Majda の条件にコンシステントに渦度場に特異性が出現するという Grauer-Sideris [9] の結果も報告されている。

(3) 厳密解:

Majda は [10] で次のような Euler 方程式の厳密解を与えた。即ち、 $D(t)$ を任意の 3×3 行列で $\text{tr } D(t) = 0$ が成り立つとする。そのとき、

$$\frac{d\omega(t)}{dt} = D(t)\omega(t), \quad \omega(0) = \omega_0$$

から求まる渦度 $\omega(t)$ を用いて以下のように速度場 $v(x, t)$ 、圧力場 $p(x, t)$ を構成すると、これらは Euler 方程式の解である。

$$v(x, t) = \frac{1}{2} \omega(t) \times x + D(t)x.$$

$$p(x, t) = \frac{1}{2} P(t)x \cdot x$$

$$P(t) = -\frac{\partial D(t)}{\partial t} - D^2(t) - \Omega^2(t), \quad \Omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

したがって、 $D(t)$ を適当に与えれば有限時間内に渦度が発散する解がえられる。Ohkitani [11] の解はこれに相当するものである。ただし、このような爆発解は速度場、渦度場ともに空間のすべての点で同時に爆発する解で、あまり物理的な意味は持たない。

(4) 定性的モデル:

(i) 一次元モデル

Constantine-Lax-Majda [12])は次のような一次元渦度方程式を与えた。

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = H(\omega) \omega, \quad \omega(x, 0) = \omega_0(x),$$

$$H(\omega) = \text{P.V.} \int \frac{\omega(y)}{x-y} dy.$$

ここで $\omega_0(x)$ は $x \rightarrow \infty$ で充分早く減少する滑らかな関数とする。このとき、

$$\omega(x, t) = \frac{4 \omega_0(x)}{(2 - tH\omega_0(x))^2 + t^2 \omega_0^2(x)}.$$

は解である。これから爆発解が求められる。具体例として [12] では

$$\omega(x, 2t) = \frac{\cos x}{1 + t^2 - 2t \sin x}$$

が与えられている。

(ii) Vieillefosse のモデル ([13]~[15])

Vieillefosse は Euler 方程式から導かれた渦度方程式、変形テンソルに対する方程式から渦度、変形テンソルおよび圧力の空間微分の項を無視して

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial t} = \frac{1}{2} \omega_j u_{ji}$$

$$\frac{\partial u_{ij}}{\partial t} = -\frac{1}{2} (u_{ki} u_{kj} - \frac{1}{3} \delta_{ij} u_{kl} u_{kl}) - \frac{1}{2} (\omega_i \omega_j - \frac{1}{3} \omega_k^2)$$

を得た。これは ω_i 、 u_{ij} について閉じている。Vieillefosse はこの方程式の厳密解を求め、渦度が $1/(T-t)$ で発散すること、さらに渦度の方向が変形テンソルの中間の固有値の方向であることを示した。この解でもまた渦度が空間のすべての点で同時に爆発する。

(5) 現象論的モデル:

(i) Siggia のモデル (Siggia [16], Pimir-Siggia [17])

Siggia は流れのなかで一本の渦糸が引き伸ばされ、折れ曲がり、逆向きの符号の vortex pair が現れ、この vortex pair は相互の誘導速度の結果著しく引き伸ばされることに注目した。その結果、いわゆる vortex pair の collapse が起こり、渦糸の core の半径 σ は

$$\sigma \sim (T-t)^{-1}$$

のようにつぶれることを示した。ただし、Siggia のモデルは σ よりも渦糸間の距離 a のほうが減少の仕方が速く、特異点が現れる前に渦糸の core の overlape が起こってしまう、という欠点をもつ。Pimir-Siggia [] は collapsing の精密な数値シミュレーションを実行したが、それでも渦度の最大値は高々指数的にしか増大しない。

(ii) Successive stretching モデル ([18])

二本のほぼ直線的渦糸を考える。以下、 σ を渦糸の core の半径、 a を二本の渦糸間の距離とする。 s を渦糸に沿って計った長さとする、二本の渦糸の相互作用の結果、時間 δt の間に渦糸の線要素 δs は

$$\delta s' = [1 + f(s)\delta t] \delta s,$$

のように引き伸ばされる。こゝに

$$f(s) = -\frac{\Gamma}{\pi} \frac{\beta a s}{(s^2 + \beta^2 a^2)^2}, \quad \beta = \operatorname{cosec} \theta$$

である。これから、渦度方程式

$$\frac{d\omega}{dt} = \omega(s)f(s)$$

を得る。二本の渦糸の最近接点付近で、距離 a のスケールで渦糸がほぼ直線できであると仮定すれば上の渦度方程式から、最近接点付近のある点で渦度が

$$\frac{d\omega}{dt} = C_1 \frac{\omega}{a^2} \quad (a)$$

のように変化する点が現れると考えることができる。こゝに、 C_1 はある正定数である。また、 δt の間に初期に y 軸上にある直線渦糸は

$$x = g(s) \cot \theta \delta t, \quad y = s - a g(s) \delta t, \quad z = -s g(s) \delta t$$

のように変化する。こゝに

$$g(s) = -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{\beta}{(s^2 + \beta^2 a^2)}$$

である。これから、渦糸の曲率 κ に対して

$$\frac{d\kappa}{dt} = C_2 \frac{1}{a^3} \quad (b)$$

を上と同様にして得る。

また、 a に対しては

$$\frac{da}{dt} = -C_3 \kappa \ln \frac{\omega}{\kappa^2} + \text{const.} \quad (c)$$

をモデル方程式として採用する。

以上、モデル方程式(a)、(b)、(c)に対して以下の結果が得られる。

(i)ある有限時間 T が存在して $t \rightarrow T$ で

$$a(t) \rightarrow 0, \kappa(t) \rightarrow \infty \text{ および } \omega(t) \rightarrow \infty.$$

となる。

(ii)更に、ある定数 C, C' が存在して $t \in [0, T)$ に対し

$$a^2\omega \geq C \text{ および } \omega/\kappa^2 \geq C'$$

が成り立つ。あるいは、 σ, a および曲率半径 ρ で表すと

$$\sigma/a \leq C \text{ および } \sigma/\rho \leq C'.$$

となる。

(i)からこのモデルによれば、有限時間 T で渦度の爆発する点が現れることになる。また、(ii)の $\sigma/a \leq C$ は $a \rightarrow 0$ のとき σ も充分早く小さくなることを示している。すなわち、このモデルは渦糸近似とコンシステントであると考えることができる。

§2. 前節 (5) の現象論的モデルについての考察

Siggia のモデルは vortex pair の collapse の過程で渦糸同志の最近接点での相対距離の減少の割合が渦核の直径の減少の割合より速く、その結果特異点の出現のまえに渦核の重なりが起こる。これは、渦糸近似での話で、実際の有限渦核の渦管の相互作用では、渦度の発散の起こるまえに渦核が潰れることになるのであろう。Pumir-Siggia の計算[19]もこれを示している。したがって、vortex pair の collapse では渦糸近似の範囲でコンシステントに渦度の発散を説明できないことになる。これを確認するために、楕円渦糸の衝突過程を Bito-Savart 則を用いて計算した。

図1は長径 1、短径 0.5 の二本の楕円渦糸が z 平面に平行に、距離 $a=0.6$ で置かれたときの $t=0.2, 0.4, 0.6$ での一方の渦糸の xy 平面 ($x \geq 0, y \geq 0$) および xz 平面 ($x \geq 0, z \geq 0$) への射影を示した。楕円渦糸の最大曲率の点 ($t=0$ で $(1, 0, 0.3)$ の点) で collapse は起こっているように見える。

図2は最大曲率の点での相対距離 a と渦核の直径 σ の減少の割合を示した。

$t = 0.6120 = T$ で a, σ ともに 0 になるが、明らかに相対距離のほうが渦核の直径より速く減少している。

Successive stretching モデルでは一応モデル方程式(a)(b)(c)に対する結果(ii)からこの欠点はある程度解消されているが、これはあくまで現象論的なモデルであり、実際の非粘性流体の流れでこの現象論が正しいか自明ではない。また、このモデルはほぼ直線的の二本の渦糸の **successive stretching** という過程を仮定して構成したが、モデル方程式(a)(b)(c)には直線的な二本の渦糸の相互作用ということとはあまり **explicite** ではない。上と同様の同じ強さの直線的の二本の渦糸の **Biot-Savart** 則による計算によれば、最近接点、渦核の最小の点、最大曲率の点が一般に異なり、どの点が最終的に特異点に発展するか自明ではないが、試験的な計算ではやはり渦核の減少の割合は十分に速いとは言えないようである。

上の二つの計算は二本の同じ強さの渦糸を仮定しているが、同じ強さという条件、即ちある種の対称性を仮定することはかえって特異点発生 of 妨げになっている可能性もある。二本の渦糸の一方が他方より充分強いとき、強い渦糸はあまり変形せず、弱い渦糸が強い渦糸に巻き付くことが考えられる。上の二つの計算例と同じ渦糸の配置で、渦糸の強さをそれぞれ 1.0 と 0.2 にした場合の計算からもこのことが確認される。また、このとき同じ強さの渦糸の場合と比較すると、異なる渦糸の場合の方が渦糸の **stretching** の効果が顕著である。

そこで、やはり **Biot-Savart** 則で $\Gamma_1=1.0$ の直線渦糸と $\Gamma_2=0.2$ の放物線形の渦糸について計算した結果を示す。予備的な計算によれば渦糸 Γ_1 は直線からのずれがあまり大きくないので、この計算では Γ_1 は直線のまま、で **stretching** の効果のみを考慮に入れた。渦糸 Γ_1 は x 軸上にあるとし、渦糸 Γ_2 は $t=0$ では $z=0.3$ を通る xy 平面に平行な平面内にあり、 $y=2x^2$ で与えられる曲線とする。

図3は $t=0, 0.1421, 0.16417$ における渦糸 Γ_2 の xy 平面および zy 平面への射影を示した。 Γ_2 が x 軸に巻き付いてゆく様子がわかる。図4は同じく $t=0.16425$ で巻き込みの部分を拡大したものである。この場合、弱い渦糸 Γ_2 は強い渦糸 Γ_1 に巻き付く結果、全体にわたって引き伸ばされている。渦糸 Γ_1 については、中心点 $x=0$ で非常に顕著な **stretching** が見られる。これは、巻き付いた渦糸 Γ_2 による誘導速度のため Γ_1 の $x>0$ の部分と $x<0$ の部分が逆むきに引っ張られ、その結果 $x=0$ の点が大きく引き伸ばされるためである。

参考文献

- [1] J.T.Beale, T.Kato and A.Majda : *Comm. Math. Phys.* 94 (1984) 61
- [2] G.Ponce : *Comm. Math. Phys.* 98 (1985) 345
- [3] R.M.Kerr : *J. Fluid Mech.* 153 (1985) 31
- [4] W.T.Ashurst, A.R.Kerstein, R.M.Kerr and C.H.Gibson : *Phys. Fluids* 30 (1987) 2343
- [5] I.Hosokawa and K.Yamamoto : *J. Phys. Soc. Japan* 58 (1989) 20
- [6] Z.S.She, E.Jackson and S.A.Orszag : *Nature* 344 (1990) 226
- [7] A.Vincent and M.Menguzzi : *J. Fluid Mech.*
- [8] S.Kida and K.Ohkitani : *Phys. Fluids A4* (1992) 1018
- [9] R.Grauer and T.C.Sideris : *Phys. Rev. Lett.* 67 (1991) 3511
- [10] A.Majda : *Comm. Pure Appl. Math.* 39 (1986) S187
- [11] K.Ohkitani : *J. Phys. Soc. Japan* 59 (1990) 3811
- [12] P.Constantin, P.D.Lax and A.Majda : *Comm. Pure Appl. Math.* 38 (1985) 715
- [13] P.Vieillefosse : *J. Physique* 43 (1982) 837
- [14] P.Vieillefosse : *Physica* 125A (1984) 150
- [15] B.J.Cantwell : *Phys. Fluids A4* (1992) 782
- [16] E.D.Siggia : *Phys. Fluids* 28 (1985) 794
- [17] A.Pumir and E.D.Siggia : *Phys. Fluids* 30 (1987) 1606
- [18] A.Fukuyu and T.Arai : *Fluid Dyn. Res.* 7 (1991) 229
- [19] A.Pumir and E.D.Siggia : *Phys. Fluids A2* (1990) 220

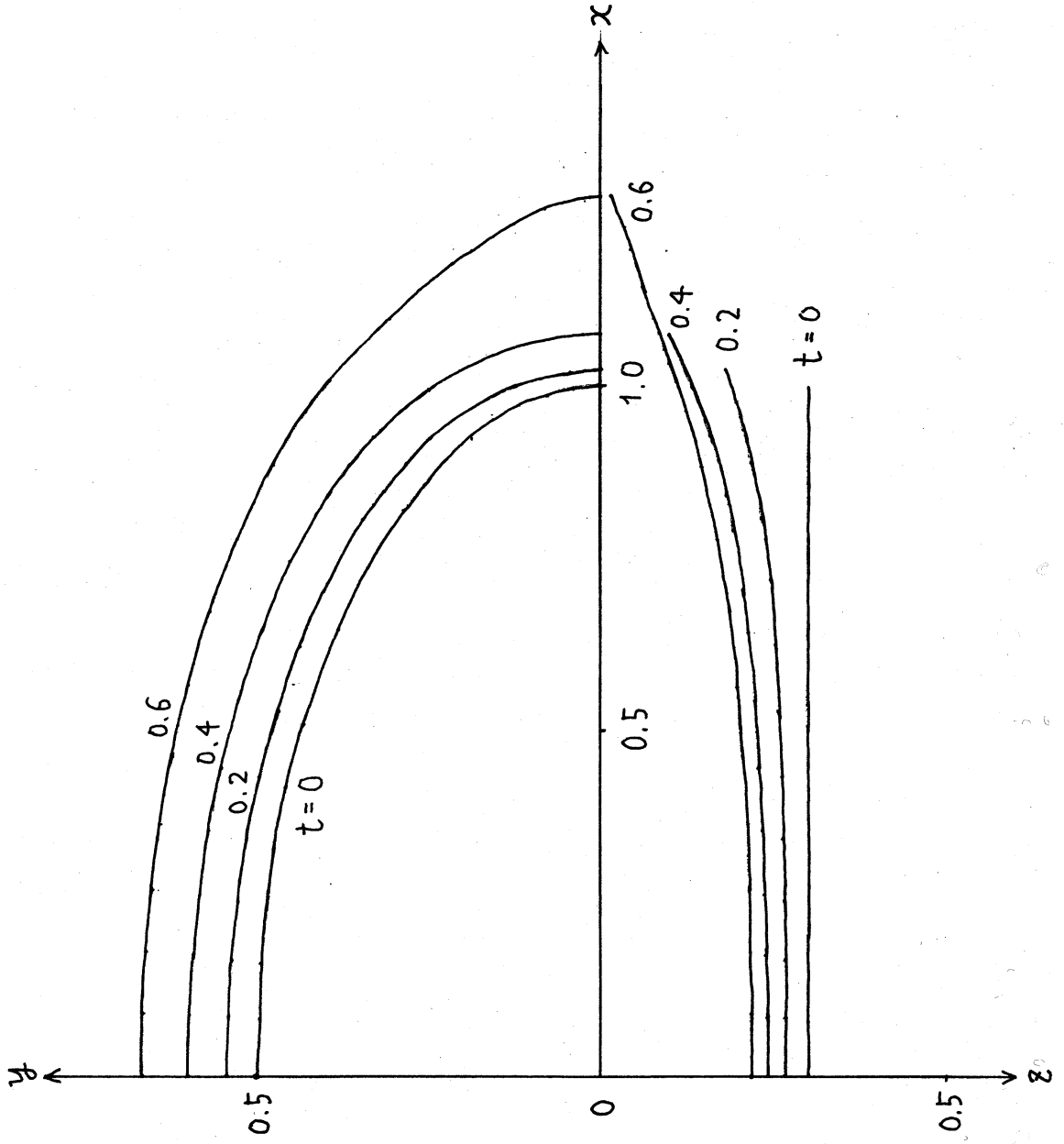


图 1

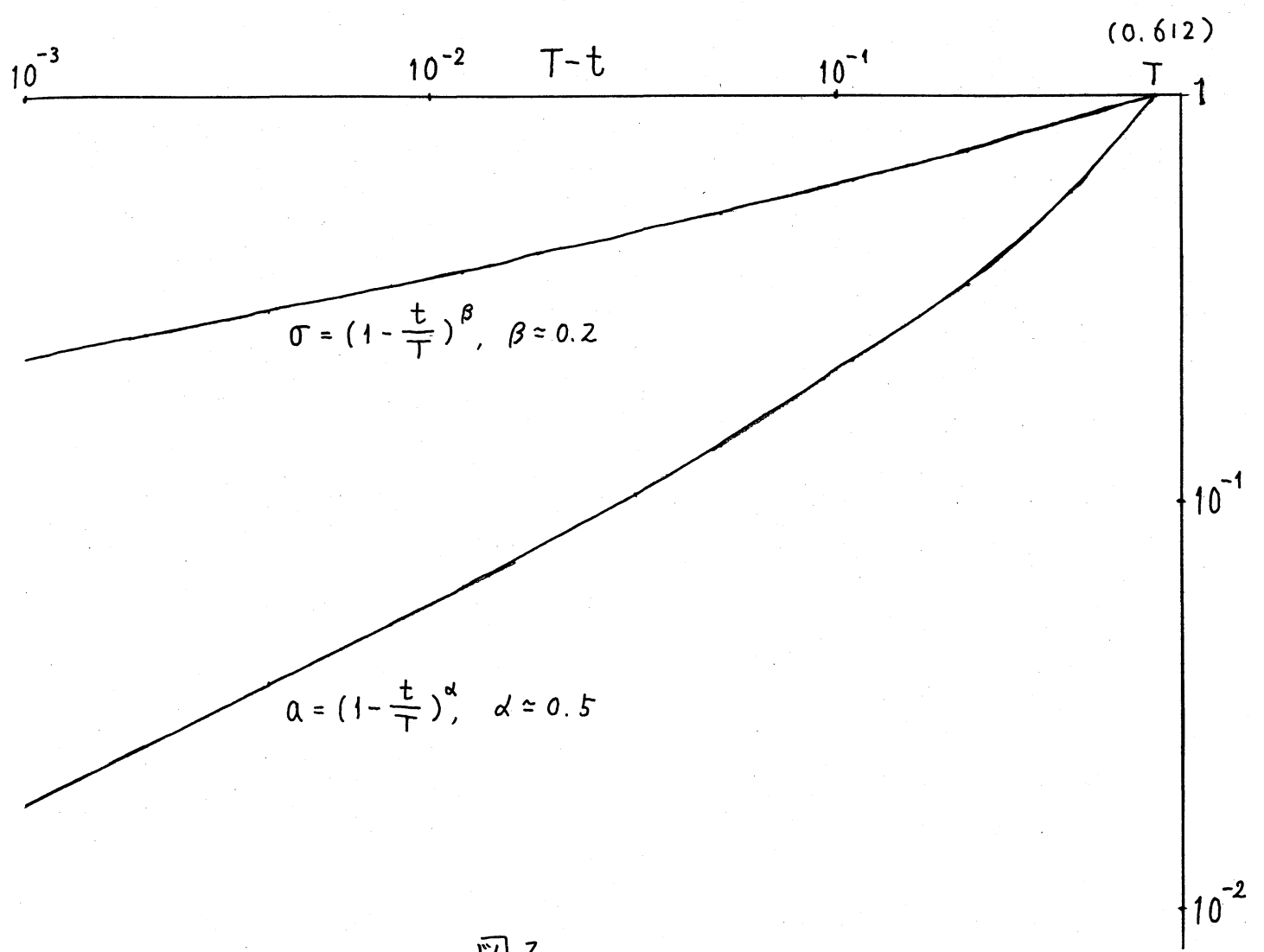


图 2

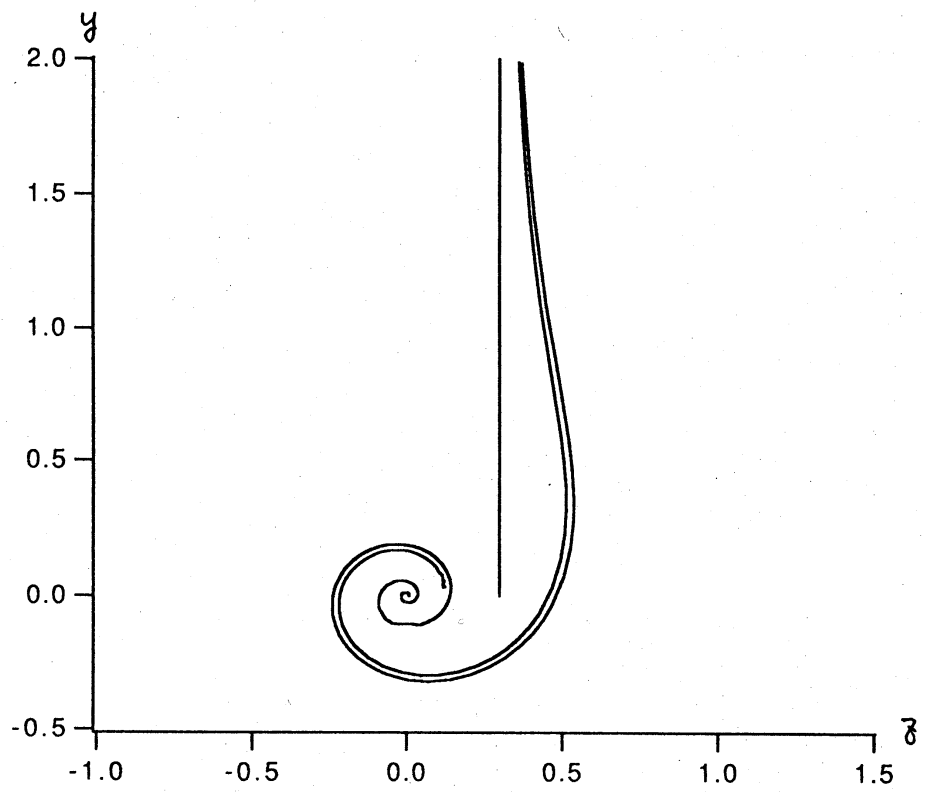
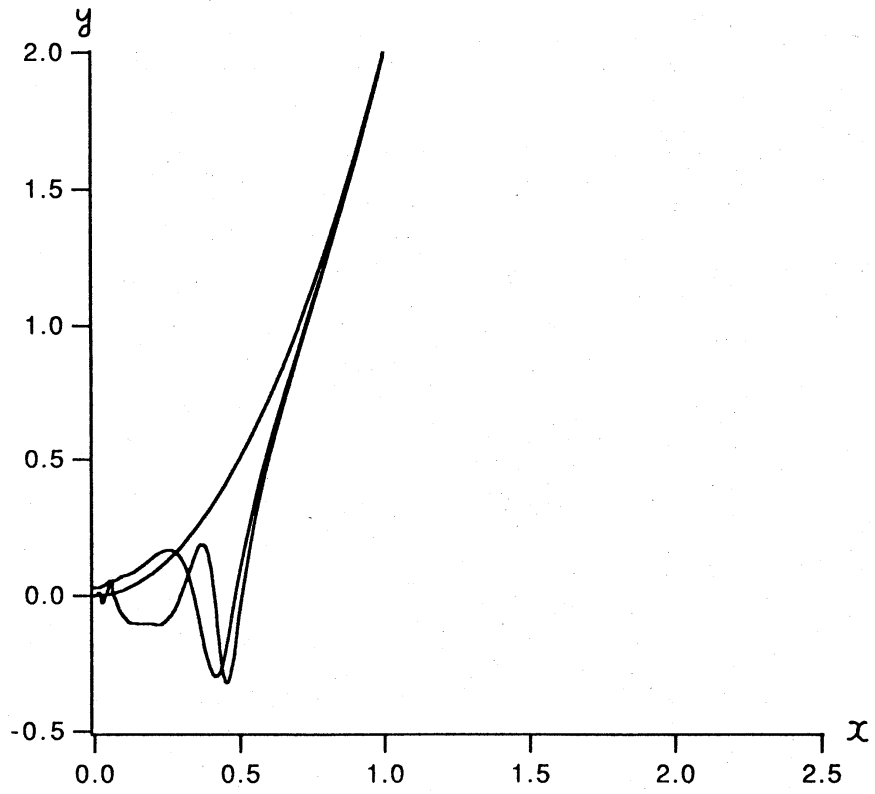


图 3

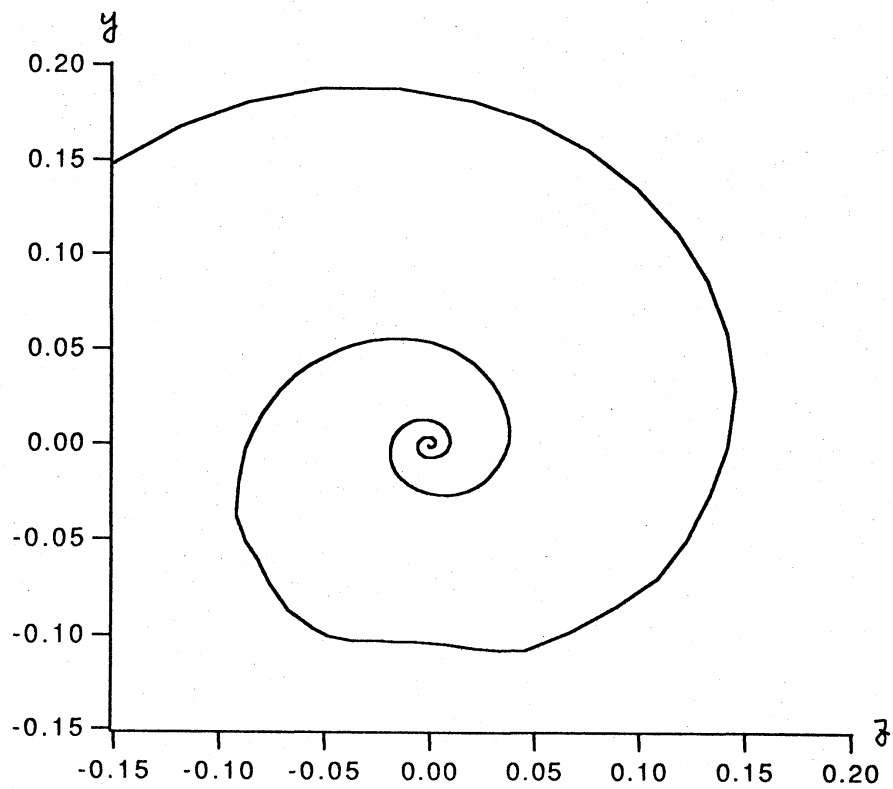
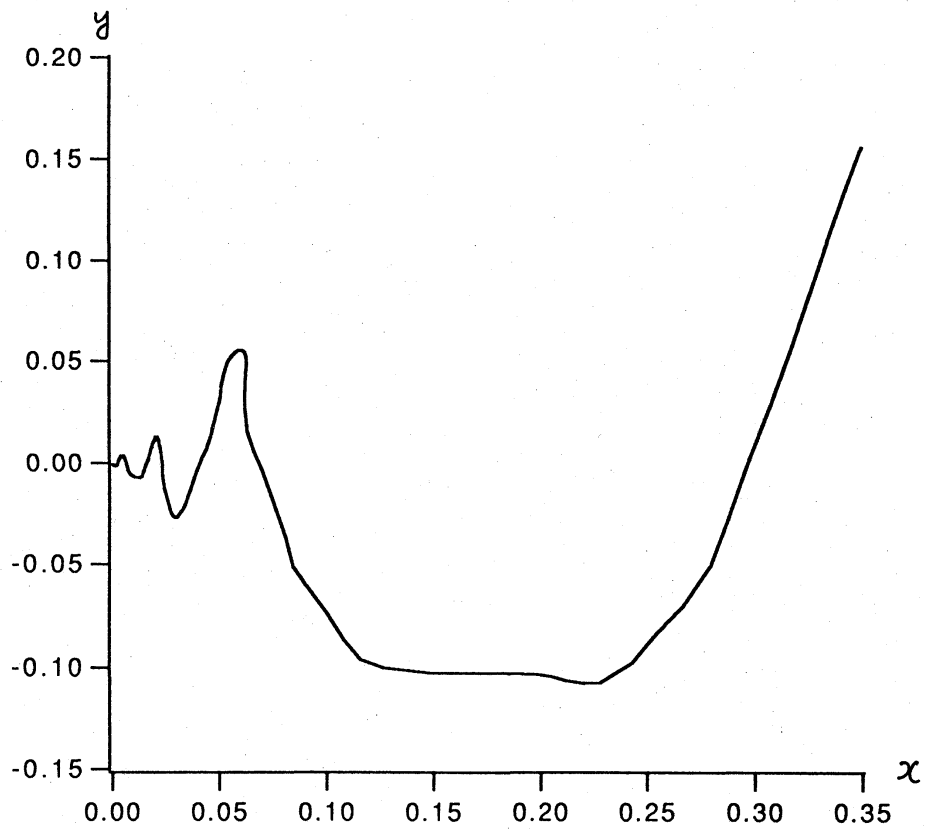


图 4