

## 微分同相写像群上のリーマン幾何としての流体力学

中村英史 (東大 数理科学) Hidefumi Nakamura

通常の流体力学の解析ではオイラー方程式を積分して速度場  $u_t$  を求める。これは、飛行機の翼理論などで圧力場を知ることが工学的にも要求され、圧力場を知るために速度場を求めなければならないからである。最近、混合問題の研究が進み速度場が与えられた時それによって流される粒子の軌跡 (particle path) の解析が行なわれるようになった。粒子の軌跡は速度場の積分曲線であり KAM 理論など力学系の理論を応用する試みもなされている。ABC 流による粒子軌道の計算は、定常な速度場による粒子の軌道でもカオスの振舞を示す可能性を持っていることを明らかにした点で注目される。アーノルドは流体を構成する全ての粒子の軌道を同時に考えることにより流体力学はある変換群上の幾何学として見直され、粒子全体の運動は変換群固有の幾何学量に大きく影響を受けることが明らかにし、速度場の安定性と無関係に粒子運動の安定性が存在することを示した<sup>1</sup>。我々のグループはさらに進んでストレッチング効果への応用を試みた。今回は、アーノルドの理論の紹介とストレッチング効果への応用について述べる。

古典力学の剛体回転運動は三次元直交群  $SO(3)$  上の測地線として定式化できることが知られている<sup>6</sup>。これのアナロジーとしてアーノルドは領域  $M$  上の非圧縮流体の運動を  $M$  の体積要素を保存する変換写像全体がなす群上のリーマン幾何学として解釈できることを示した。アーノルドは  $M$  が二次元周期境界条件の場合を論じているが、数学的には任意のリーマン多様体の体積要素を保存する微分同相写像全体が成す無限次元リー群論として研究されている。興味ある読者は参考文献<sup>2,8</sup>を参照されたい。以下の議論では話を統一的に進めるため変換群上の無限次元リーマン幾何学の一般論を簡単に述べ、流体運動への応用を議論し最後に  $M$  が通常の三次元周期的境界条件の場合について具体的に計算した結果<sup>9</sup>を示す。

$M$  を  $n$  次元向き付け可能コンパクトなリーマン多様体とする。議論を簡単にするため境界は無いとする。 $(\cdot, \cdot)$  をリーマン計量,  $\nabla$  をリーマン接続とする。すなわち,  $M$  上のベクトル場  $X, Y$  に対して  $(X(p), Y(p))$  は  $M$  の点  $p$  における  $X$  と  $Y$  の内積,  $\nabla_X Y$  はベクトル場  $X$  方向への  $Y$  の微分で三次元ユークリッド空間での  $(X \cdot \text{grad})Y$  の一般化である。

$M$  上の非粘性非圧縮流体の基礎方程式は  $M$  上の時間に依存するベクトル場  $u_t$  に関する次のオイラー方程式である。

$$\frac{\partial u_t}{\partial t} + \nabla_{u_t} u_t = -\text{grad } p \quad , \quad \text{div } u = 0 .$$

左辺を Hodge 分解 (M が三次元ユークリッド空間であればベクトル解析の Helmholtz 分解) して divergence free 成分は次の式になる。

$$\frac{\partial u_t}{\partial t} + P[\nabla_{u_t} u_t] = 0, \quad (1)$$

$P[\ ]$  は divergence free 成分への射影。Hodge 分解の一意性によりオイラー方程式と (1) は同値である。粘性が存在し非圧縮流体のような一般の場合をふくめた流体粒子の運動とは、 $u_t$  が与えられたとして任意の  $x \in M$  に対して常微分方程式：

$$\frac{dg_t(x)}{dt} = u_t(g_t(x))$$

を解いて M 上の一径数写像族  $g_t$  を求めることである。速度場が時間に関して非定常ならば一径数群にはならない事に注意する必要がある。固定した  $x \in M$  に対して  $g_t(x)$  は粒子  $x$  のラグランジュ (粒子) 軌道と呼ばれる。各  $t$  を固定した時、写像  $g_t : M \rightarrow M$  は M 上の微分同相写像で全ての粒子を時刻 0 での位置から時刻  $t$  への位置へと移動させる。よって  $g_t$  は粒子全体の物理空間内での配置の時間発展と考えられ、flow  $g_t$  とよばれる。特に非圧縮の場合 ( $\text{div } u = 0$ )、 $g_t$  は M の体積を保存する微分同相写像となる。以下、M を固定して M 上の体積保存自己微分同相写像全体の集合を  $D_v$  とかく。この時 flow  $g_t$  は  $D_v$  内の曲線である。

$D_v$  は無限次元リー群であるが、ここで簡単に M によって自然にリーマン構造が入ることを述べる。詳しくは Ebin & Marsden<sup>2</sup> または Oomori<sup>7</sup> 参照。

(i) 二つの元  $f$  と  $g$  に対し、積  $fg$  は  $f \circ g$ , i.e.  $f \circ g(x) = f(g(x))$  for  $x \in M$  で定義される。単位元  $e$  は M の恒等写像。  $f$  の逆元は  $f$  の逆写像  $f^{-1}$ 。 (ii) 元  $g$  による右移動は  $R_g f = f \circ g$  で定義される。 (iii) リー環  $T_e D_v$  は M 上の divergence free なすべてのベクトル場。リーブラケット  $[\ ]_*$  は M 上のリーブラケット  $[\ ]$  の divergence free 成分。 divergence free なベクトル場;  $X, Y$  に対しては  $[X, Y] = [X, Y]_*$  であることがわかっている。  $D_v$  上のベクトル場のリーブラケットはヒルベルト多様体として定義されるが右不変なベクトル場にたいしては同じなので同じ記号を用いる。 (iv) 接空間  $T_f D_v$  は  $f$  に沿ったすべての divergence free なベクトル場  $V$ , i.e.  $\text{div}[V \circ f^{-1}] = 0$ 。ベクトル  $V_f \in T_f D_v$  の  $g \in D_v$  による右移動は  $V_f \circ g \in T_{f \circ g} D_v$  で定義する。元の右移動とベクトルの右移動は同じ記号を使う。 (v) 任意の粒子について時刻 0 での位置  $x$  をその粒子のラグランジュ (物質) 座標とする。 flow  $g_t$  は単位元  $e$  を始点とする  $D_v$  内の曲線である。各時刻  $t$  での各粒子  $x$  の速度は、接線ベクトル  $\dot{g}_t \in T_{g_t} D_v$  であるが、これは M 内の点  $g_t(x)$  での M の接ベクトル、つまり  $\dot{g}_t$  は写像  $g_t$  に沿ったベクトル場となる。通常のベクトル場 (オイラー場)  $u_t(y) \in T_y M$  を得るために  $\dot{g}_t$  を  $g_t^{-1}$  によって  $T_e D_v$  に右移動する。  $u_t = \dot{g}_t \circ g_t^{-1}$ 。 (vi) 写像群  $D_v$  にはリーマン計量  $\langle \ , \ \rangle$  とリーマン接続  $\bar{\nabla}$  が自然に定義される。ベクトル  $X, Y \in T_f D_v$  に対して

$$\langle X, Y \rangle|_f = \int (X(x) \cdot Y(x))|_{f(x)} dx, \quad (2)$$

$dx$  は  $M$  の体積要素。  $Q|_f$  は  $Q$  という量を点  $f$  で評価したことを示す。写像としての体積保存性から計量の右不変性を得る。  $\langle X \circ g, Y \circ g \rangle|_{f \circ g} = \langle X, Y \rangle|_f$ , for  $f, g \in \mathcal{D}_v$ .

接続  $\tilde{\nabla}$  を定義するためまず最初に  $\mathcal{D}_v$  上の右不変ベクトル場を考える。  $\tilde{X}^R(f) = X \circ f, \tilde{Y}^R(f) = Y \circ f$  for  $f \in \mathcal{D}_v$  where  $X, Y \in T_e \mathcal{D}_v$  とする。このとき  $\tilde{\nabla}_{\tilde{X}^R} \tilde{Y}^R$  を

$$\tilde{\nabla}_{\tilde{X}^R} \tilde{Y}^R|_f = P[\nabla_X Y] \circ f, \quad (3)$$

で定義する。  $M$  上 divergence free なベクトル場  $X, Y$  に対して  $\nabla_X Y$  が divergence free とは限らないので divergence free 成分への射影  $P$  を作用させる。こうやって定義された接続が一般のベクトル場に拡張され、計量  $\langle, \rangle$  とリーブラケット  $[, ]_*$  に関してリーマン接続となることが示されている<sup>2,8</sup>。

つぎに  $\mathcal{D}_v$  内の任意の曲線  $g_t$  をとる。  $\dot{g}_t = u_t \circ g_t = u_t(g_t)$  とする。  $\tilde{X}_t$  を  $g_t$  に沿ったベクトル場とする。  $\tilde{X}_t$  は  $M$  上の時間に依存するベクトル場  $X_t$  を  $g_t$  によって右移動したものと考えられる。  $\tilde{X}_t = X_t \circ g_t$ . このとき  $g_t$  にそった  $\tilde{X}_t$  の共変微分を

$$\tilde{\nabla}_t \tilde{X}_t = \left( \frac{\partial X_t}{\partial t} + P[\nabla_{u_t} X_t] \right) \circ g_t. \quad (4)$$

で定義する。  $\tilde{\nabla}_t$  は曲線のパラメーター  $t$  に関する微分なので、  $\partial X_t / \partial t$  を加える必要がある。

$\mathcal{D}_v$  内の測地線は

$$\tilde{\nabla}_t \dot{g}_t = 0. \quad (5)$$

を満たす曲線であるが、物理学的には次式で定義された "作用  $I$ "

$$I = \int \langle \dot{g}_t, \dot{g}_t \rangle|_{g_t} dt = \int dt \int (u_t(x) \cdot u_t(x))|_x dx,$$

を極小にする  $g_t$  を求めるという変分問題と同等である。

測地線方程式 (5) と (4) より  $\dot{g}_t = u_t \circ g_t$  として

$$\tilde{\nabla}_t \dot{g}_t = \left( \frac{\partial u_t}{\partial t} + P[\nabla_{u_t} u_t] \right) \circ g_t = 0.$$

を得る。これは、  $M$  上のオイラー方程式 (1) である。

$\mathcal{D}_v$  上の曲率  $\tilde{R}(X, Y)Z$  を次式で定義する。

$$\tilde{R}(X, Y)Z = -\tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y Z + \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X Z + \tilde{\nabla}_{[X, Y]} Z, \quad (6)$$

このとき曲率テンソルは

$$\tilde{R}_{XYZW} = \langle \tilde{R}(X, Y)Z, W \rangle. \quad (7)$$

となる。これらはすべて右不変でありテンソルの性質から  $D_0$  の一点でのベクトルの値にしかよらないので単位元  $e$  に右移動して計算すれば十分である。

$X$  と  $Y$  で張られる断面  $\sigma \subset T_e D_0$  の規格化していない断面曲率を

$$\bar{k}(\sigma) = \langle \bar{R}(X, Y) X, Y \rangle \quad (8)$$

で定義する。 $X$  と  $Y$  で張られる平行四辺形の面積の自乗；

$$\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2$$

で規格化した  $\bar{k}$  を  $\bar{K}$  とかく。

ガウスの公式を使って曲率をもう少し見易い形にしておこう。任意のベクトル場  $X, Y$  にたいして

$$\alpha(X, Y) \equiv \text{gradient part of } \nabla_X Y$$

と定義する。この時  $\alpha(X, Y) = \alpha(Y, X)$  となることは簡単に確かめられる。この  $\alpha$  を使って曲率  $\bar{k}(X, Y)$  は次のように書ける。

$$\bar{k}(X, Y) = \langle \alpha(X, X), \alpha(Y, Y) \rangle - \langle \alpha(X, Y), \alpha(X, Y) \rangle \quad (9)$$

測地線  $g_t$  に沿ったヤコビ場  $\bar{W}_t$  は  $g_t$  の測地線変分  $g_t^s$  を使って

$$\bar{W}_t = \left. \frac{\partial g_t^s}{\partial s} \right|_{s=0} \quad (10)$$

とも、あるいは  $g_t$  に沿ったヤコビ方程式:

$$\hat{\nabla}_t^2 \bar{W}_t + \bar{R}(\dot{g}_t, \bar{W}_t) \dot{g}_t = 0 \quad (11)$$

の解とも定義される。流体粒子の運動の解析においては二つの場合が重要である。

1)  $g_t^s|_{t=0} \equiv e$ 。このときヤコビ場は粒子の運動が速度場に加えられた摂動にどう影響されるかをあらわす。摂動場を含めた速度場の初期条件を  $X + sY$  とすれば

$$|\bar{W}_t| = |Y|t - \frac{1}{6} \bar{K}(\sigma) t^3 + O(t^4) \quad (12)$$

であるから<sup>5</sup> 負の断面曲率は粒子の運動が線形項よりずれることを示す。特に接ベクトル  $\dot{g}_t$  をふくむすべての断面曲率が負であればどんな divergence free な摂動を加えても粒子の運動は不安定である。しかしこれは速度場の安定性とは別問題である。

2)  $D_0$  内の単位元を通る曲線  $a_s$ , s.t.  $a_0 = e$  を任意にひとつ固定する。このとき  $g_t^s \equiv g_t \circ a_s$  は  $g_t$  の測地線変分であることが容易に分かる。ヤコビ場は (10) より

$$\bar{W}_t = T_{g_t} A, \quad A = \left. \frac{\partial a_s}{\partial s} \right|_{s=0} \quad (13)$$

となる。T は写像  $g_t$  の微分である。このとき  $\bar{W}_t = W_t \circ g_t$  とおくとヤコビ方程式 (11) は時間について一回積分できて

$$\frac{\partial W_t}{\partial t} = [W_t, u_t]_* = P[\nabla_{W_t} u_t] - P[\nabla_{u_t} W_t] \quad (14)$$

となる。ただし、 $\dot{g}_t = u_t \circ g_t$ 。幾何学的に解釈すると、ヤコビ場  $W_t$  は時刻 0 で M を覆い尽くしている曲線族  $a_s$  が粒子が速度場によって流されることにより平均してどのくらい伸縮されるか (ストレッチング効果) を示している。

さて  $\mathcal{D}_v$  の説明のところで述べたように divergence free なベクトル場;  $X, Y$  に対しては  $[X, Y] = [X, Y]_*$  だから (14) を次のように書き換えられる。

$$\frac{\partial W_t}{\partial t} + \nabla_{u_t} W_t = \nabla_{W_t} u_t \quad (15)$$

これは MHD における induction equation であり、左辺は速度場  $u_t$  によるヤコビ場  $W_t$  の輸送、右辺は  $u_t$  による  $W_t$  のストレッチング効果をあらわす。特に  $R^3$  の場合、渦度場  $\omega_t \equiv \text{curl } u_t$  も渦度方程式として (15) をみたすのでヤコビ場である。 $R^2$  を  $R^3$  に埋め込んで計算するとヤコビ場は passive scalar の等高線の接ベクトル場として表現できる。時間に依存する  $R^2$  上の関数  $f$  が速度場  $u_t$  の passive scalar であるとは、 $f$  が次の方程式を満たす時である。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_{u_t} f = 0 \quad (16)$$

このとき

$$W_t = \text{grad}^\perp f \equiv \left( \frac{\partial f}{\partial y}, -\frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

はヤコビ場となるがわかる。二次元流では scalar vorticity  $\omega$  は passive scalar であるのでベクトル場  $(\omega_y, -\omega_x)$  はヤコビ場となる。

ここで

$$\Omega_t \equiv \langle W_t, W_t \rangle|_e = \frac{1}{2} \int_M (W_t, W_t) dx$$

とおけばリーマン幾何学の一般論<sup>5</sup>により

$$\frac{d^2 \Omega_t}{dt^2} = -\bar{k}(u_t, W_t) + \langle P[\nabla_{W_t} u_t], P[\nabla_{W_t} u_t] \rangle \quad (17)$$

となるので負の断面曲率は production of  $\Omega$ ;  $\dot{\Omega}_t$  の増加を意味する。さらにガウスの公式 (9) を使うと内積  $\langle, \rangle$  に関して grad 成分と rot 成分が直交することに注意すれば次式を得る。

$$\frac{d^2 \Omega_t}{dt^2} = -\langle \alpha(u_t, u_t), \alpha(W_t, W_t) \rangle + \langle \nabla_{W_t} u_t, \nabla_{W_t} u_t \rangle \quad (18)$$

速度場  $u_t$  によるヤコビ場  $W_t$  のストレッチングの大きさの自乗はヤコビ場の大きさの自乗の空間平均の時間に関する二階微分を増加させる。第一項の符号が  $\Omega_t$  の挙動を決定する。

$W_t$  が渦度場のときは  $\Omega_t$  はエンストロフィーである。解析学で使われるディリクレノルムで、オイラー方程式の解の有限時間発散と密接に関係している。

f が scalar vorticity  $\omega$  のときは

$$\Omega_t = \frac{1}{2} \int_M |\text{grad } \omega|^2 dx$$

はパリンストロフィーである。二次元のオイラー流では scalar vorticity  $\omega$  は保存されるが、乱流の統計理論ではその勾配ベクトル場の統計平均は時間とともに非常に大きくなるといわれており数値計算でも同様な結果が得られている。

この様にヤコビ場というリーマン幾何学の概念のもとで三次元におけるエンストロフィーと二次元のパリンストロフィーとが統一されることがわかる。すなわちヤコビ場としての性質がエンストロフィーとパリンストロフィーの共通の性質としてあらわれる。例えば、 $\langle u, W \rangle$  は保存するとか  $\Omega_t$  には下限が存在することなどが示される。

最後に三次元フラットトーラス:

$$T^3 = R^3 / (2\pi Z)^3, \text{ i.e. } x = \{(x_1, x_2, x_3); \text{ mod } 2\pi \ x \in R^3\}$$

について計算した結果を列挙する<sup>9</sup>。フーリエ基底  $e^{ik \cdot x}$  を  $e_k$  であらわす。ここで  $k = (k_i)$  for  $i = 1, 2, 3$  は三次元の波数ベクトルである。簡単のため複素化して計算した<sup>1</sup>。速度場は

$$u_t(x) = \sum_k u_k(t) e_k, \quad (19)$$

とかける。  $u_k(t)$  は三成分を持つベクトル値関数であり divergence-free 条件と実数条件より次式をみだす。

$$(k \cdot u_k) = 0, \quad u_{-k} = u_k^* \quad (20)$$

\* は複素共役である。

(20) をみだす  $u_k e_k, v_l e_l, w_m e_m, z_n e_n$  に対して,

$$\langle u_k e_k, v_l e_l \rangle = (2\pi)^3 (u_k \cdot v_l) \delta_{0, k+l},$$

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{u_k e_k} v_l e_l &\equiv P[\nabla_{u_k e_k} v_l e_l] \\ &= i(u_k \cdot l) \frac{k+l}{|k+l|} \times \left( v_l \times \frac{k+l}{|k+l|} \right) e_{k+l}, \end{aligned}$$

$$[u_k e_k, v_l e_l]^* = i \left( (u_k \cdot l) v_l - (v_l \cdot k) u_k \right) e_{k+l},$$

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{klmn} &= \langle \tilde{R}(u_k e_k, v_l e_l) w_m e_m, z_n e_n \rangle \\ &= (2\pi)^3 \left( \frac{(u_k \cdot m)(w_m \cdot k)(v_l \cdot n)(z_n \cdot l)}{|k+m||l+n|} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(v_l \cdot m)(w_m \cdot l)(u_k \cdot n)(z_n \cdot k)}{|l+m||n+k|} \right)\end{aligned}$$

ただし  $\tilde{R}_{klmn}$  は  $k+l+m+n=0$  で分母が 0 でない項のみ残る。二次元の場合は  $k=(k_1, k_2, 0)$ ,  $u_k=i(k_2, -k_1, 0)$  としてアーノルドの計算を含んでいる。

応用としてベルトラミ流について断面曲率を求めた。 $u$  がベルトラミ流とは  $\text{curl } u = \lambda u$  となる  $\lambda \in \mathbb{R}$  が存在することである。とくに 1 モードベルトラミ流:  $U_p = u_p e_p + u_{-p} e_{-p}$  は  $\lambda^2 = |p|^2$  とおけばよい。この  $U_p$  はオイラー方程式の定常解である。このとき  $X = \sum v_l e_l$  を (16) を満たす任意のベクトル場とすれば,

$$\begin{aligned}&\langle \tilde{R}(U_p, X)U_p, X \rangle \\ &= -(2\pi)^3 \sum_l \frac{|(u_p \cdot l)|^2}{|p+l|^2} \left| \frac{(u_p \cdot l)^2}{|(u_p \cdot l)|^2} (v_l \cdot p) - (v_{l+2p} \cdot p) \right|^2 \\ &\leq 0.\end{aligned}$$

これはアーノルドがもとめた断面曲率負の流れの三次元版である。すなわち 1 モードベルトラミ流はどんな摂動場に対しても粒子運動としては常に不安定であることを示している。(17) からわかるようにこれはまた 1 モードベルトラミ流ではストレッチング効果によって  $d^2\Omega_t/dt^2$  は常に非負であることが分かる。実際, この場合

$$\Omega_t = At^2 + Bt + C, \quad A, C > 0$$

であることが計算できる。

次に 3 モードのベルトラミ流のなかで流線のカオスとして名高い ABC flow<sup>7</sup>:

$$\begin{aligned}U_{ABC} &= A[(i, 1, 0) e^{ix_3} + (-i, 1, 0) e^{-ix_3}] \\ &\quad + B[(0, i, 1) e^{ix_1} + (0, -i, 1) e^{-ix_1}] \\ &\quad + C[(1, 0, i) e^{ix_2} + (1, 0, -i) e^{-ix_2}],\end{aligned}$$

ただし,  $A, B, C \in \mathbb{R}$  と  $(A', B', C') \neq (A, B, C)$  なる他の ABC flow  $U_{A'B'C'}$  で張られる断面曲率は

$$\begin{aligned}&\langle \tilde{R}(U_{ABC}, U_{A'B'C'})U_{ABC}, U_{A'B'C'} \rangle \\ &= -2(2\pi)^3 \{(AB' - BA')^2 + (BC' - CB')^2 + (CA' - AC')^2\},\end{aligned}$$

となる。この時 (12) において  $\tilde{K}(U_{ABC}, U_{A'B'C'}) = -1/16\pi^3$  となるので主流のパラメーター  $(A, B, C)$ , 摂動場のパラメーター  $(A', B', C')$  がカオス領域に入るいかに

かわらず粒子運動としては常に同程度の不安定を示すことが分かった。

### References

- <sup>1</sup>V. I. Arnold, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **16**, 1, 319 (1966); *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Appendix 2 (Springer-Verlag, New York, 1978).
- <sup>2</sup>D. G. Ebin and J. Marsden, Ann. Math. **90**, 102 (1970).
- <sup>3</sup>J. Milnor, *Morse Theory* (Princeton University, New Jersey, 1963).
- <sup>4</sup>S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry* Vol. 1 (John Wiley & Sons, New York, 1969)
- <sup>5</sup>N. J. Hicks, *Notes on Differential Geometry* (Van Nostrand, Princeton, N.J., 1965)
- <sup>6</sup>D. H. Sattinger and O. L. Weaver, *Lie Groups and Algebras with Applications to Physics, Geometry, and Mathematics* (Springer, 1986) <sup>7</sup>T. Dombre, U. Frisch, J. M. Greene, M. Hénon, A. Mehr, & A. M. Soward, J. Fluid Mech. **167**, 353 (1986).
- <sup>8</sup>大森英樹, 無限次元リー群論, 紀伊国屋書店 (1978).
- <sup>9</sup>F. Nakamura, Y. Hattori and T. Kambe, Journal of Physics A: *to appear*