数理解析研究所講究録
第818巻 1993年 60-69

ブール代数の first-order property と分割について

永山　操 (Misao Nagayama)[1]

Boolean Algebra の分割を用い、その first-order theory について調べる方法について述べる。

Boolean Algebra の first-order property についての考察のなかで、ここに述べるのは、Σ_n-formula が Boolean Algebra A とその element である parameter $a_1, \cdots, a_m$ に対し成立することと同値となるような、formula に依存しない A と $a_1, \cdots, a_m$ の条件を見つけようという試みである。高々 n 個の quantifier しかもたない formula の場合については、そのような条件は、Heindorf によって既に得られている（[He] 参照)。ここでは、彼の証明を改良することによって得られる Σ_n の場合の結果と、その応用について述べる。

ここでは、Boolean Algebra の language として、$\vee, \wedge, c, 0, 1$ をとり、axiom としてはスタンダードなものをとるが、$0 \neq 1$ は axiom から除いて、singleton$\{0\}$ も Boolean Algebra の特別な場合として含まれるようにする。

まず Boolean Algebra の主要な 4 つの first-order property を紹介する。a を Boolean Algebra の element とすると：

a が *atom* とは、0 と a との間に proper な element が存在しないような element のことであり、対応する Stone space は isolated point から成る space である。a が *atomless* とは、a が何回でも分割可能であるような element のことであり、対応する Stone space は Cantor space と homeomorphic となるような space である。a が *atomic* とは、a が atom から構成されている element のことであり、対応する Stone space はいくつかの isolated points の union から成る space である。a が *separable* とは、a が atomless element と atomic element との union から構成されている element ということである。ここで、separable な

[1]Department of Mathematics, Tokyo Woman's Christian University, 2-6-1 Zempukuji, Suginami-ku, Tokyo 167, JAPAN.

element 全体の subset は、Boolean Algebra の ideal となることをつけ加えておく。

さて separable でない element というのは、Stone space で考えると、isolated point の列と Cantor space に homeomorphic な subspace の列とが、集積点を持つような具合になっていて切り離せない状態になっていることになる。そこで、そのような space を atom のような単位としてさらに element を分類できる。実際には、Boolean Algebra を separable element の成す ideal で割った quotient space で atom や atomless element を考えることになる。

Definition 1 (n-characteristic [He]) *Bの任意の element a と任意の自然数 n に対し、以下のように帰納的に a の n-characteristic $D(n,a)$ を定義する：*

$$D(0,a) = \begin{cases} 0 & \mathit{if}\ a = 0 \\ 1 & \mathit{if}\ a \neq 0 \end{cases}$$

$$D(n+1,a) = \{\{D(n,b), D(n,a-b)\}; b \leq a\}\text{。}$$

例としては、$n=0$ の時、

0 for zero 、

1 for a nonzero element 、

$n=1$ の時、

$z_1 = \{\{0\}\}$ for zero 、

$at = \{\{0,1\}\}$ for an atom 、

$na = \{\{0,1\},\{1\}\}$ for a nonzero nonatom 、

$n=2$ の時、

$z_2 = \{\{z_1\}\}$ for zero 、

$a_1 = \{\{z_1, at\}\}$ for an atom,

$a_2 = \{\{at\},\{z_1, na\}\}$ for 2 atom の join 、

$a_3 = \{\{at, na\}, \{z_1, na\}\}$ for 3 atom の join 、
$a_- = \{\{na\}, \{z_1, na\}\}$ for an atomless element 、
$b = \{\{na\}, \{at, na\}, \{z_1, na\}\}$ for 少なくとも 4 つの atom を含んだ atomic element か、1 つの atomless element と少なくとも 1 つの atom を含んだ element 、となる。
ここで気をつけたいのは、n が増えるに従って、identify できる atom の個数が増え、さらにより複雑な性質が identify できるというように、Dの持っている element に関する情報が二次元的に増えるという点である。

この n-characteristic と、高々 n 個の quantifier を持つ formula との関係は、次の Heindorf の結果により明らかになる。

Theorem 2 *([He]) Boolean Algebra A と Bに対し、$\{a_i\}_{i=1}^m \subseteq A$, $\{b_i\}_{i=1}^m \subseteq B$ を分割とする。さらに、formula $\varphi(x_1, \cdots, x_m)$ は、高々 n 個の quantifier を持つとする。そこで*

$$A \models \varphi(a_1, \cdots, a_m) \Longleftrightarrow B \models \varphi(b_1, \cdots, b_m)$$

は、$D(n, a_i) = D(n, b_i)$ が全ての $i \le m$ に対し成り立つ時に成立。

証明は、n に関する帰納法による。$n = 0$ の時は、φ が quantifier-free で明らか。そこで、$n-1$の時を仮定する。φ は、高々 $n-1$ 個の quantifier を持つとする。さらに、$A \models \exists x \varphi(x, a_1, \cdots, a_m)$ 、$B \models \neg\exists x \varphi(x, b_1, \cdots, b_m)$ と全ての $i \le m$ に対し $D(n, a_i) = D(n, b_i)$ が成り立つということ仮定し矛盾を導く。
すると、ある $a \in A$ に対し、

$$A \models \varphi(a, a_1, \cdots, a_m)$$

が成立。$a_i^0 = a^c \wedge a_i$、$a_i^1 = a \wedge a_i$とすると、$\{a_i^0\} \cup \{a_i^1\}$ は A の新たな分割となり、

$$A \models \varphi(\bigvee a_i^1, a_1^0 \vee a_1^1, \cdots, a_m^0 \vee a_m^1)$$

となる。一方、$D(n, a_i) = D(n, b_i)$ が全ての $i \leq m$ に対し成り立つので、$D(n-1, a_i^0) = D(n-1, b_i^0)$ かつ $D(n-1, a_i^1) = D(n-1, b_i^1)$ となるような $\{b_i^0\}_{i=1}^m \cup \{b_i^1\}_{i=1}^m$ が存在する。従って帰納法の仮定により

$$B \models \varphi(\bigvee b_i^1, b_1^0 \vee b_1^1, \cdots, b_m^0 \vee b_m^1)$$

となるが、$i \leq m$ に対し $b_i^0 \vee b_i^1 = b_i$であることから矛盾。 □

”高々n個” という条件を” 高々 n alternation ”という条件で置き換えて、単純にこの定理の証明をΣ_nの場合に直そうとすると、必ずしも A の分割に対応するような Bの分割が得られず、証明が進まないことが分かる。というのは、今分かっている範囲では、n-charasteric Dは、element の二つの分割に関する情報のみしか持っていないからである。

そこで、D で区別できる性質を完全に調べ挙げて、element の n 分割に関する情報を得ようというのが、次の試みである。

Lemma 3 n を自然数とする。任意の *Boolean algebra* A 、B と任意の $a \in A$ 、$b \in B$に対し、$D(n, a) = D(n, b)$ は以下と同値：

(1) $n = 4k$ の時、

(1.1) a, b は N_0^l 個の *disjoint* な *l-atom* の *join* 、$(0 \leq N_0^l \leq 2^{4(k-l)} - 1)$ $(l < k)$,

または (1.2) a, b は M_0^l 個の *disjoint*な *l-atom* と *l-atomless element* との *join* 、$(0 \leq M_0^l \leq 2^{4(k-l)} - 5)$ $(l < k)$,

または (1.3) a, b は *l-atomless element* と少なくとも $(2^{4(k-l)} - 4)$ 個の *disjoint* な *l-atom* を含む *l-atomic element* との *join* $(l < k)$ 、

または (1.4) a, b は少なくとも $2^{4(k-l)}$ 個の *disjoint* な *l-atom* を含む *l-atomic element* $(l < k)$,

または (1.5) a, b は $(k-1)$-*separable* ではない、

(2) $n = 4k + 1$ の時、

(2.1) a, b は N_1^l 個の *disjoint* な *l-atom* の *join*、$(0 \leq N_1^l \leq 2^{4(k-l)+1} - 1)$ $(l \leq k)$,

または (2.2) a, b は M_1^l 個の *disjoint* な *l-atom* と *l-atomless element* との *join*、$(0 \leq M_1^l \leq 2^{4(k-l)+1} - 5)$ $(l < k)$,

または (2.3) a, b は *l-atomless element* と少なくとも $(2^{4(k-l)+1} - 4)$ 個の *disjoint* な *l-atom* を含む *l-atomic element* との *join* $(l < k)$、

または (2.4) a, b は少なくとも $2^{4(k-l)+1}$ 個の *disjoint* な *l-atom* を含む *l-atomic element* $(l < k)$,

または (2.5) a, b は $(k-1)$-*separable* でも *k-atom* でもない、

(3) $n = 4k + 2$ の時、

(3.1) a, b は N_2^l 個の *disjoint* な *l-atom* の *join*、$(0 \leq N_2^l \leq 2^{4(k-l)+2} - 1)$ $(l \leq k)$,

または (3.2) a, b は M_2^l 個の *disjoint* な *l-atom* と *l-atomless element* との *join*、$(0 \leq M_2^l \leq 2^{4(k-l)+2} - 5)$ $(l < k)$,

または (3.3) a, b は *l-atomless element* と少なくとも $(2^{4(k-l)+2} - 4)$ 個の *disjoint* な *l-atom* を含む *l-atomic element* との *join* $(l < k)$、

または (3.4) a, b は少なくとも $2^{4(k-l)+2}$ 個の *disjoint* な *l-atom* を含む *l-atomic element* $(l < k)$,

または (3.5) a, b は *k-atomless* である、

または (3.6) a, b は 少なくとも 4 個の *disjoint* な *k-atom* を持つ *k-atomic element* か、*k-atomless element* と 少なくとも 1 個の *disjoint* な *k-atom* を持つ *element*、

(4) $n = 4k + 3$ の時、

(4.1) a, b は N_3^l 個の *disjoint* な *l-atom* の *join*、$(0 \leq N_3^l \leq 2^{4(k-l)+3} - 1)$ $(l \leq k)$,

または (4.2) a, b は M_3^l 個の *disjoint* な *l-atom* と *l-atomless element* との *join*、$(0 \leq M_3^l \leq 2^{4(k-l)+3} - 5)$ $(l \leq k)$,

または (4.3) a, b は *l-atomless element* と少なくとも $(2^{4(k-l)+3} - 4)$ 個の *disjoint* な *l-atom* を含む *l-atomic element* との *join* $(l < k)$、

または (4.4) a, b は少なくとも $2^{4(k-l)+3}$ 個の *disjoint* な *l-atom* を含む *l-atomic element* $(l \leq k)$,

または (4.5) a, b は *k-atomless element* と少なくとも 4 個 の *disjoint* な *k-atom* を持つ。

この lemma を用いると得られる幾つかの興味深い結果を以下に証明抜きで述べる。

最初の corollary は、n-separable Boolean algebra の theory が L_nに新しい predicate をつけ加えた language において quantifier を除去する、という定理である。この定理は、それぞれの n に応じた quantifier を除去するような theory を一挙に可算無限個与えることができる点が興味深い。ここで新しい記号として $\{\mathcal{AT}_l(x); l \leq n\}, \{\mathcal{I}_l(x); l \leq n-1\}$ $\{\mathcal{B}_l^u(x); u < \omega, l \leq n\}$ を導入し、L_n を L_B とこれらの記号との union とする。今 $I_l(x)$、$AT_l(x)$ をそれぞれ "x は l-separable である"、"x は l-atomic である" という first-order definable な formula とする。そこで T_n を、Boolean Algebra の first-order theory へ新たな axiom: $I_n(1)$、$\forall x(\mathcal{AT}_l(x) \Leftrightarrow AT_l(x))$ for $l \leq n$、$\forall x(\mathcal{I}_l(x) \Leftrightarrow I_l(x))$ for $l < n$ かつ

$\forall x(\mathcal{B}_l^u(x) \Leftrightarrow$ "x は少なくとも u 個の disjoint な l-atom を含む") for $u < \omega, l \leq n$ 、をつけ加えた n-separable algebra の theory とすると：

Corollary 4 T_n は、L_nにおいて *quantifier* を除去する。

次は良く知られている Tarski の定理（[CK] 参照）であるが、その前にまず必要な定義を述べる。

Definition 5 任意の Bの *element* a と自然数 n に対し、以下の関数を定義する。

$T(a) = a$ が *n-separable* となるような最小の n で、そのような n が存在しなければ ∞.

$S(a, n) = a$ に含まれる *pairwise disjoint* な *n-atom* の最大数、あるいは、もし a が無限個の *pairwise disjoint* な *n-atom* を含んでいたとすると ∞。

$S'(a, n) = a$ に含まれる *pairwise disjoint* な *n-separable* でない *element* の最大数、あるいは、もし a が無限個の *pairwise disjoint* な *n-separable* でない *element* を含んでいたとすると ∞。

Corollary 6 (Tarski) A と B を *Boolean Algebra* とする 。A と Bが *elementary equivalent* であるということと、$T(1_A) = T(1_B)$ かつ $S(1_A, T(1_A)) = S(1_B, T(1_B))$ かつ "A が $T(1_A)$-*atomic iff* B が $T(1_B)$-*atomic*" ということが同値である。

次に、主定理を述べる。ここで、$\langle m_j \rangle_{j=1}^n$ を長さ n である任意の正の自然数の sequence とし、

$$C(n, l, \langle m_j \rangle_{j=1}^n) = \max_{0 \leq t \leq 4(k-l)+s-1} \{(\Pi_{j=n-t}^n m_j) \times 2^{4(k-l)+s-1-t}\}.$$

と定義すると：

Theorem 7 *Boolean algebra* A と Bに対し、$\{a_i\}_{i=1}^m \subseteq A$ と $\{b_i\}_{i=1}^m \subseteq B$ をそれぞれの分割とする。さらに$\varphi(x_1, \cdots, x_m)$ を、右から数えて i 番目のブロックに p_i 個の *quantifier*

を持つような *prenex* Σ_n*-formula* とする。すると、以下の条件が満たされる時に

$$A \models \varphi(a_1, \cdots, a_m) \Longleftrightarrow B \models \varphi(b_1, \cdots, b_m)$$

が成立する：

(1) 全ての $i \leq m$ に対し $D(n, a_i) = D(n, b_i)$、かつ

(2) もし $n = 4k + s$ $(s = 2, 3, 4)$ ならば、それぞれの $i \leq m$ に対し

(2.1) $T(a_i) = T(b_i) \leq k$ かつ

$S(a_i, T(a_i)) = S(b_i, T(b_i)) < C(n, T(a_i), \langle 2^{p_j} \rangle_{j=1}^{n})$

または (2.2) $S(a_i, t), S(b_i, t) \geq C(n, t, \langle 2^{p_j} \rangle_{j=1}^{n})$

for $t = \min\{T(a_i), T(b_i), k\}$

が成立し、また

もし $n = 4k + 1$ ならば、それぞれの $i \leq m$ に対し

(2.3) (2.1) *with* $k - 1$

または (2.4) $T(a_i) = T(b_i) \leq k - 1$ かつ

$S(a_i, T(a_i)), S(b_i, T(a_i)) \geq C(n, T(a_i), \langle 2^{p_j} \rangle_{j=1}^{n})$

または (2.5) $T(a_i) = T(b_i) = k$、かつ

$S'(a_i, k - 1) = S'(b_i, k - 1) < 2^{p_n}$

または (2.6) $S'(a_i, k - 1), S'(b_i, k - 1) \geq 2^{p_n}$ が成立する。

この定理の内容は、今ある Σ_n-formula が与えられたとすると、その真偽値は図 1 が示すような有限個の場合分けに従って決まる、ということである。この定理を、singleton $\{1\}$ に適用すると、次の corollary がすぐに得られる。

Corollary 8 $\Sigma_n(\Pi_n)$*-sentence* の真偽値 は、*Theorem 7* 中の $D(n, 1)$ かつ $S(1, T(1))$ かつ $S'(1, T(1))$ のみに依存する。

また、次の coorollary も図 1 からすぐにわかる。

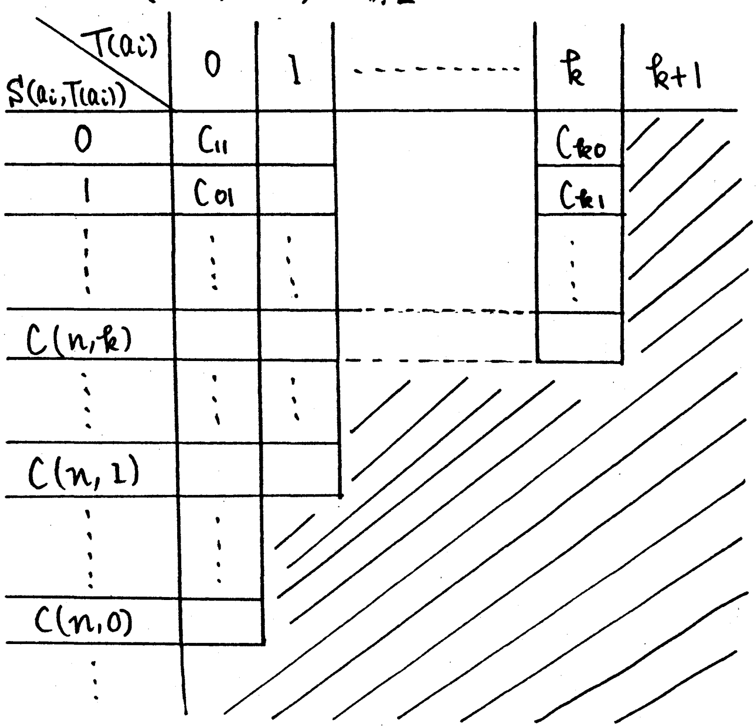
Corollary 9 ([Wa]) A と B を $T(1_A), T(1_B) \geq k+1$ となるような *Boolean algebra* とすると、同じ Σ_{4k+4}*-sentence* を満たす。

一般に Boolean Algebra A と Bが、atomless などの model-complete な theory の model であったとすると、A から Bへの embedding Iは、その定義から任意の formula を保存するわけだが、次の定理はそれ以外の Boolean Algebra にも適用できる formula 保存の条件を与えている。

Theorem 10 全ての a に対し、$D(n,a)$ を保存する A から B への *embedding* を I とする、すなわち $D(n,a) = D(n, I(a))$ が全ての $a \in A$ に対し成立するものとする。その時 Iは、Σ_n*-formula* と Π_n*-formula* を保存する。

以上述べた定理に対し、証明などより詳しく知るには [N] を参照されたい。

$n=4k+s$ $(s=2,3,4)$ の場合



場合分けはそれぞれのC_{ij}と斜線部分

(図1)

References

[CK] C.C.Chang and H.J.Keisler. *Model theory*, North-Holland, Amsterdam, 1973.

[He] Lutz Heindorf. *Comparing the expressive power of some languages for Boolean algebras*, Zeitschr. f. math. Logik und Grundlagen. d. Math., bd. 27 (1981), pp.419-434.

[N] Misao Nagayama. *On Boolean Algebras and Integrally Closed Commutative Regular Rings*, to appear in The journal of symbolic logic 57 (1992).

[Wa] J. Waszkiewicz. $\forall_n$*-theories of Boolean algebras*, Colloquium mathematicum, vol.30 (1974).