数理解析研究所講究録
第 823 巻 1993 年 101-105

Countable size counterexamples for Tamano's problem concerning stratifiable k-metrizable spaces

作新学院大学経営学部　酒井　政美（Masami Sakai）

玉野氏は論文［5］の中で「k-metrizable Lašnev space は metrizable」であることを証明し，次の自然な問題を提出した。stratifiable space については［2］を，また k-metrizable space については［3］を参照。

問題 1．stratifiable k-metrizable space は metrizable か？

この問題に対しては既に反例が知られており，論文［4］の中で first countable, stratifiable, k-metrizable space であるけれども metrizable ではない空間が構成されている。ここで注目したいのはこの反例が first countable という点である。つまり問題 1 は否定的であるが，少なくとも first countable になるという可能性は残されている。そこで次の自然な問題が生じる。

問題2．stratifiable k-metrizable space は first countable か？

本稿ではこの問題2に対しても反例が存在することを示したい。実際，次の条件を満たす空間Mが存在する。

Example．次の条件を満たす空間Mが存在する。

1．可算濃度で，孤立点はただひとつ。故にMはstratifiable，

2．k-metrizable，

3．non-trivial な収束点列をもたない。故にMは first countable ではない。

構成した空間が k-metrizable であることを示すために次の定理を利用する。集合Yに対して，$\mathcal{P}(Y)$ をYの部分集合全体からなる集合とする。

定理　空間XはX=Y∪{p}と表され，Yの各点はXの孤立点であり，pは孤立点ではないXの G_δ-point とする。このとき次は同値。

(1)　Xは k-metrizable，

(2)　次の条件を満たす写像 $\varphi : \mathcal{P}(Y) \to [1, \omega]$ が存在する。

(a) 各$F\in\mathcal{P}(Y)$に対して，FがXで閉集合であることと$\varphi(F)<\omega$が同値，

(b) $F_1\subset F_2$ならば$\varphi(F_1)\leq\varphi(F_2)$，

(c) $\mathcal{P}(Y)\supset\{F_\alpha ; \alpha<\tau\}$がincreasingであり，各$\alpha<\tau$に対して$\varphi(F_\alpha)=k<\omega$であれば$\varphi(\bigcup_{\alpha<\tau}F_\alpha)=k$。

Exampleの構成

Tを0または1からなる有限列全体からなる集合とし，$C=\{0,1\}^\omega$をCantor集合とする。各$t\in T$に対して$U(t)=\{f\in C ; t\subset f\}$とおく。このとき$\mathcal{U}=\{U(t) ; t\in T\}$は空でないclopen setからなる$C$のbaseとなる。$\mathcal{V}$を$C$のclopen set全体からなる集合とすると，$\mathcal{V}$は可算であるから$\mathcal{V}=\{V_0=\phi\}\cup\{V_n ; n\in\mathbb{N}\}$とかける。

$C_p(C;\{0,1\})$をCから$\{0,1\}$への連続関数全体に各点収束位相をいれた空間とする。$C_p(C;\{0,1\})$の元と$\mathcal{V}$の元は1対1に対応するから$C_p(C;\{0,1\})=\{f_0\}\cup\{f_n ; n\in\mathbb{N}\}$とかける。ここで，$f_0$は0への定値関数，また$f_n=\chi_{V_n}$（$V_n$上の特徴関数）である。

$C_p(C;\{0,1\})$において，f_0の近傍系はそのままにしてf_0以外の各f_nを孤立点にした空間をLとおく。

Claim　Lはk-metrizable。

（証明の概略）各$n\in\mathbb{N}$に対して，$V_n=\bigcup\mathcal{U}_n$となる$\mathcal{U}$の有限

部分集合$\mathcal{U}_n$を固定する。各$A\subset\mathbb{N}$に対して$L(A)=\{f_n ; n\in A\}$とおき, $Y=L(\mathbb{N})$とおく。写像$\varphi:\mathcal{P}(Y)\to[1,\omega]$を次のように定義する。

- $\varphi(\phi)=1$,
- $\varphi(L(A))\le k<\omega \iff$ ある$(U_n)\in\prod_{n\in A}\mathcal{U}_n$が存在して, $\{U_n ; n\in A\}$のdisjoint部分集合は高々k。

このときφは定理の(a)(b)(c)を満たし, Lはk-metrizableとなる。

論文[1]により, $C_p(C;\{0,1\})$はFréchetにはならないことが知られている。故に$C_p(C;\{0,1\})$の部分集合Eで, $f_0\in\bar{E}-E$を満たし, しかもEはf_0へのnon-trivialな収束点列をもたないものがとれる。$\pi:L\to C_p(C;\{0,1\})$を恒等写像とすれば, $M=\pi^{\leftarrow}(\{f_0\}\cup E)$が求める空間である。

References

[1] J. Gerlits and Zs. Nagy, Some properties of C(X), I, Topology Appl. 14 (1982) 151-161.

[2] G. Gruenhage, Generalized metric spaces, Handbook of Set-Theoretic Topology (K. kunen and J.E. Vaughan, eds.), North-Holland, 1984.

[3] E.V. Ščepin, On k-metrizable spaces, Math. USSR Izvestija 14 (1980) 407-440.

[4] J. Suzuki, K. Tamano and Y. Tanaka, k-metrizable spaces, stratifiable spaces and metrization, Proc. Amer. Math. Soc. 105 (1989) 500-509.

[5] K. Tamano, Closed images of metric spaces and metrization, Topology Proc. 10 (1985) 177-186.