

## 2次元 MHD 減衰乱流の数値計算

### Numerical study of two-dimensional decaying MHD turbulence

東大理 服部裕司

Univ. of Tokyo, Dept. of Phys., Y.Hattori

#### §1 動機と目的

プラズマなどの導電性流体の運動 = MHD ( MagnetoHydroDynamics ) 流れの研究は、恒星や惑星の磁場の生成メカニズムの研究 ( ダイナモ理論など ) や太陽風の性質を調べる上で欠かせないものである。

今回、我々は 2 次元 MHD 方程式の数値計算を行ない、流れの統計的性質を調べた。実際の流れが殆ど全て 3 次元であるにもかかわらず 2 次元の場合を扱ったのは、以下の理由による。我々が特に興味をもっているのは、十分に乱れたいわゆる乱流状態での MHD 流れの性質である。例えばダイナモ理論では乱れた速度場、磁場の成分が global な磁場を維持するというメカニズムが提案されている。十分な乱流状態を実現するためには大自由度の計算が必要であるが、現状では 3 次元での満足のいく計算は難しい。そこで 2 次元を 3 次元の場合への足掛りとして調べることにしたのである。

もちろん、2 次元での結果をそのまま 3 次元に持ちこむことには注意しなくてはならない。3 次元ではベクトルである渦度、電流密度が、2 次元ではスカラーになるという大きな違いがある。しかしながら、理想的な場合 ( 粘性と磁気拡散率がともに 0 のとき ) に helical な不変量をもつという重要な特徴は共通している。したがってかなりのことが、2 次元計算から理解されると期待してよい。

さらに、普通の ( 電気伝導性のない ) 流体、つまり Navier-Stokes 方程式により記述される流体との関連においても、2 次元の MHD 乱流は 3 次元の Navier-Stokes 乱流に近いことが予想されているなど、興味ある対象である。特に、速度場などの場の量の確率分布関数 ( PDF = Probability

Distribution Function) が近年さかんに研究されており、その非ガウス性は間欠性との関連において一つの大きなトピックになっている。

ここでは、まず§2 で取扱う方程式とその性質を述べる。§3 では物理サイドから乱流についていわれていることをまとめ、数値計算で注目した各統計量などを定義する。数値計算の詳細と結果については §4 に記す。

## §2 MHD 方程式

$N$  次元領域 ( $N = 2, 3$ ) における非圧縮 MHD 流れの方程式は次で与えられる<sup>1</sup>。

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p_\tau + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mu \Delta \mathbf{v} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \eta \Delta \mathbf{B} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3)$$

ここで、 $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  は速度場、 $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$  は磁場、 $p_\tau(\mathbf{x}, t)$  は全圧力、 $\mu, \eta$  はそれぞれ粘性、磁気拡散率であり、 $\nabla = (\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_N})$ ,  $\Delta = \nabla \cdot \nabla$  である。ただし、速度場と磁場が同じ単位をもつように変数をとっている。

$N = 2$  の場合には渦度場  $\omega(\mathbf{x}, t) = \partial_x v_y - \partial_y v_x$ 、電流密度場  $j(\mathbf{x}, t) = \partial_x B_y - \partial_y B_x$ 、および磁気ポテンシャル  $\psi = -\Delta^{-1} j$  を用いて次のようにスカラー場の方程式に書き換えることができる。

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \omega = (\mathbf{B} \cdot \nabla) j + \mu \Delta \omega \quad (4)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \psi = \eta \Delta \psi \quad (5)$$

非圧縮条件 (3) は自動的に満たされている。

2次元と3次元の違いは、 $\mu = \eta = 0$  のときの保存量にもあらわれる。 $N = 3$  のとき、方程式 (1)-(3) は

$$\text{total energy : } E = \frac{1}{2} \int (|\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{B}|^2) d^3x$$

$$\text{helicity : } H = \int \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\omega} d^3x$$

$$\text{magnetic helicity : } M = \int \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} d^3x$$

( $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$ ,  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ ) の 3 つの保存量をもつものに対し、 $N = 2$  の場合には、方程式 (4)-(5) は total energy の他に、

$$\text{cross helicity : } H_c = \int \mathbf{v} \cdot \mathbf{B} d^2x$$

$$\int f(\psi) d^2x$$

( $f$  は  $\psi$  の任意関数) を保存量としてもつ。後者の代表として  $A = \int \psi^2 d^2x$  をとる。

解の存在については、事情は通常の Navier-Stokes 方程式に対する結果と同じである。つまり、2次元の場合には strong solution の存在が、3次元の場合には weak solution の存在が示されている<sup>2</sup>。

境界条件として今回は、数値計算上扱いやすい周期境界の場合を考える。すなわち、領域  $D$  は

$$D = \{(x, y); (x + 2m\pi, y + 2n\pi) = (x, y)\}$$

である ( $m, n$  は整数)。このとき、各物理量は次のように Fourier 変換される。

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{v}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$$

( $\mathbf{k} = (k_x, k_y); k_x, k_y$  は整数)。

### §3 物理における乱流理論

乱流という用語は、明確な定義なしにかなり広く使われており、その意味するところも、場合によって違ってくる。しかし、一様等方性乱流、つまり領域が十分大きくてほぼ並進対称でありかつ等方的である場合には、(i) スペクトルが巾乗則を示すこと、(ii) Taylor microscale の Reynolds 数が 100 以上であることが、その流れが乱流であるための目安とされている。

物理では特にエネルギースペクトル  $E(k)$  を問題にする。

$$E(k) = \sum_{k \leq |\mathbf{k}| < k+1} |v_{\mathbf{k}}|^2$$

Navier-Stokes 方程式の場合は、3次元で有名な Kolmogorov 則<sup>3</sup>  $E(k) \sim k^{-5/3}$  が実験や数値計算などで確認されている。2次元の場合にはそれほどはっきりはしていないが、 $E(k) \sim k^{-3 \sim -4}$  が予想および報告されている。MHD 流の場合には、次元に関係なく  $E(k) \sim k^{-3/2}$  となるというのが Kraichnan<sup>4</sup> の説である。Biskamp らの数値計算<sup>5</sup>は、これを支持しているが、超粘性（散逸の項を  $\Delta \rightarrow -\Delta^2$  と置き換えて、散逸を強くする）を用いているので多少疑問が残る。また、巾乗則の導出は、物理的な考察に基づく仮定から、次元解析を用いているのであって、厳密に正しいかどうかはわからない。

Taylor microscale の Reynolds 数とは次で定義される無次元量である：

$$R_\lambda = \frac{\overline{v^2}}{\mu \bar{\omega}}$$

( $\bar{x}$  は  $x$  の空間平均)。Reynolds 数は、一般にその系の代表的長さ  $L$ 、速度  $U$ 、粘性  $\nu$  を用いて、 $R = UL/\nu$  と与えられるが、一様等方性乱流の場合には特徴的な長さがいくつもある。そのうち速度場の空間相関の減衰のしかたに関係した長さを用いたものが  $R_\lambda$  となっている。

乱流の間欠性について触れておく。乱流における各物理量の場の確率分布関数は、各 Fourier mode が全くランダムになっていると仮定すると、ど

れも中心極限定理により Gauss 分布になると期待される。Navier-Stokes 方程式の非線型項は Fourier mode 間の複雑な coupling を引き起こすので、上の仮定は一見正しいと期待される。。ところが実際には、3 次元の場合には速度場はほぼ Gauss 分布となるものの、速度場の微分は Gauss 分布からずれて指数分布型に近い tail をもち、そのずれは高階微分ほど大きいことがわかってきた。今回の計算では、2 次元 MHD 流について間欠性がどうあらわれるかに注目した。

この節の最後に、MHD 流についての selective decay の考え方を紹介しておく<sup>6</sup>。  $\mu = \eta = 0$  のときの保存量の  $\mu\eta \neq 0$  のときの時間変化を書くと次のようになる。

$$\frac{dE}{dt} = -\mu \int \omega^2 d^2x - \eta \int j^2 d^2x$$

$$\frac{dH_c}{dt} = -(\mu + \eta) \int j\omega d^2x$$

$$\frac{dA}{dt} = -2\eta \int |\mathbf{B}|^2 d^2x$$

この式からわかることは、 $E, A$  が単調に減少するのに対して  $H_c$  の時間変化は定符号でないこと、さらに  $|dA/dt| \leq 4\eta E \leq 4\eta E_0$  より  $A$  の減少率は上限が決まっていることである。すなわち、 $E$  は  $A, H_c$  に比べて速く減少すると予想される。これが selective decay の考え方である。特に、速度場と磁場の相関  $\rho = H_c/E$  は時間とともに増大すると考えられる。(  $|\rho| \leq 1$  であり、 $\rho$  は速度場と磁場の「平行性」をあらわすもの。)

#### §4 数値計算の結果

数値計算は、擬スペクトル法 (pseudo-spectral method<sup>7</sup>) を用いて方程式 (4),(5) を Fourier mode について数値積分した。mode 数は  $512 \times 512$  としたが、擬スペクトル法を用いるとき aliasing error を除くために、実際に 0 でない active mode は  $341 \times 341$  個となる (2/3-ルール)。つまり、波数ベクトルは

$$\{(k_x, k_y); -170 \leq k_x, k_y \leq 170\}$$

に属するものを用い、また常に  $\omega_{(0,0)} = \psi_{(0,0)} = 0$  として一様流、一様磁場を除いた。

時間発展は 4 次の Runge-Kutta 法に従った。初期条件はスペクトルが

$$E_{V0}(k) = E_{M0} = ak^3 \exp(-k^2/k_0^2)$$

の形で、各 mode の位相は相関  $\rho$  がほぼ 0 になるようにランダムに与えた。

$\mu, \eta$  および  $k_0$  の値については次の4つの場合を計算した。

- (A)  $\mu = \eta = 10^{-3}, k_0 = 10$
- (B)  $\mu = \eta = 2 \times 10^{-3}, k_0 = 5$
- (C)  $\mu = 5 \times 10^{-3}, \eta = 10^{-3}, k_0 = 5$
- (D)  $\mu = \eta = 6 \times 10^{-4}, k_0 = 5$

いずれの場合も、 $E_{V0} = E_{M0} = 2\pi^2$ 、時間の刻み幅  $\Delta t = 2 \times 10^{-3}$ 、計算時間  $T = 4.6, \text{ or } 6.0$  としている。

図1 は、場の時間変化の様子を (C) の場合について初期状態と最終状態を比較したものである。全体の 1/16 を描いている。一番上は流れ関数  $\phi = -\Delta^{-1}\omega$  の等値線図で、速度場は  $\mathbf{v} = (\partial_y \phi, -\partial_x \phi)$  であるので、各等値線に接するものである。  $\omega$  と  $j$  の様子がよく似ていることに注意されたい。また、等渦度線図は 2 次元の Navier-Stokes 乱流によるものよりかなり複雑になっている。

図2 は場の確率分布関数である。上の3つは Gauss 分布に非常に近いが、下の  $\omega, j$  の分布は  $|x|$  の大きいところでかなりずれる傾向が見られる。

図3 はエネルギー・スペクトルで、速度場のエネルギーのスペクトル $E_V(k)$ と磁場のエネルギーのスペクトル $E_M(k)$ に分けて示した。 $E_V(k)$ は Biskampらの結果とだいたい一致する。が、 $E_M(k)$ についてはきれいな巾乗は得られていないようである。図4 の最後に  $R_\lambda$  の時間発展のグラフを示したが、その値が 20 ~ 100 程度と、十分な乱流状態にないのもスペクトルがクリアに得られない原因であるかもしれない。

図4 は各種統計量の時間発展のグラフである。(A)-(D) の各場合を一つのグラフで比較している。エネルギー $E$ に比べて、A の時間変化が非常に小さいことがわかる。相関 $\rho$ については、最初は絶対値が大きくなる傾向にあるものの、この結果からはあまり明確なことはいえない。 $E_V/E_M$ が 0.4 ~ 0.5 程度の値に落ち着く傾向は、かなり一般的のようである。また、Reynolds 数の値も初期状態からすぐにかなり安定した値となる。

スペクトルについては課題が残るが、渦度場および電流密度の場の間欠性ははっきりと確認された。今後の問題としては、より大規模な計算によるスペクトルの巾の決定、相関 $\rho$ の値や初期エネルギー比 $E_V/E_M$ 、散逸係数の比 $\mu/\eta$ に対する間欠性・統計量の依存性などを考えている。

#### 参考文献

- <sup>1</sup> 流体力学ハンドブック、日本流体力学会編（丸善）。
- <sup>2</sup> G. Duvant and J. L. Lions, Arch. Rational Mech. Anal. **46**, 241; M.Sermange and R. Temam, Comm. Pure Appl. Math. **36** 635 (1983).
- <sup>3</sup> A. N. Kolmogorov, C. R. Dokl. Acad. Sci. URSS **30**, 301 (1941)
- <sup>4</sup> R. H. Kraichnan, Phys. Fluids **8**, 1385 (1965).
- <sup>5</sup> D. Biskamp and H. Welter, Phys. Fluids **B1** 1964 (1989).
- <sup>6</sup> A. C. Ting, W. H. Matthaeus, and D. Montgomery, Phys. Fluids **29**, 3261 (1986).
- <sup>7</sup> C. Canuto *et al.*, *Spectral Methods in Fluid Dynamics* (Springer).

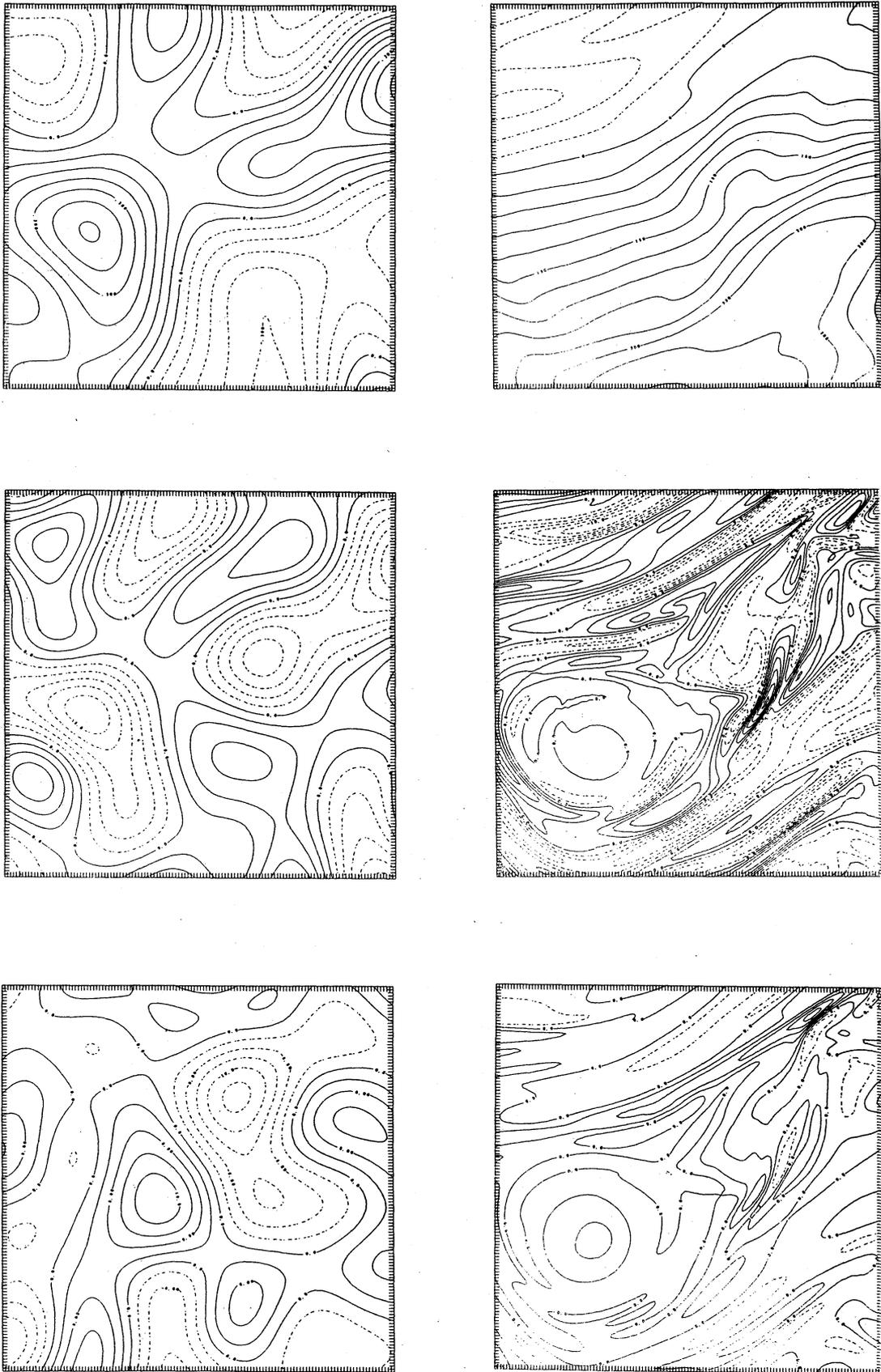


図1. 上から順に  $\phi, \omega, j$  の等値線図  
 (左:  $t=0$ , 右:  $t=4.6$ ; (C) の場合)  
 全体の  $1/16$  ( $[0, \pi/2]^2$ ) の図である。

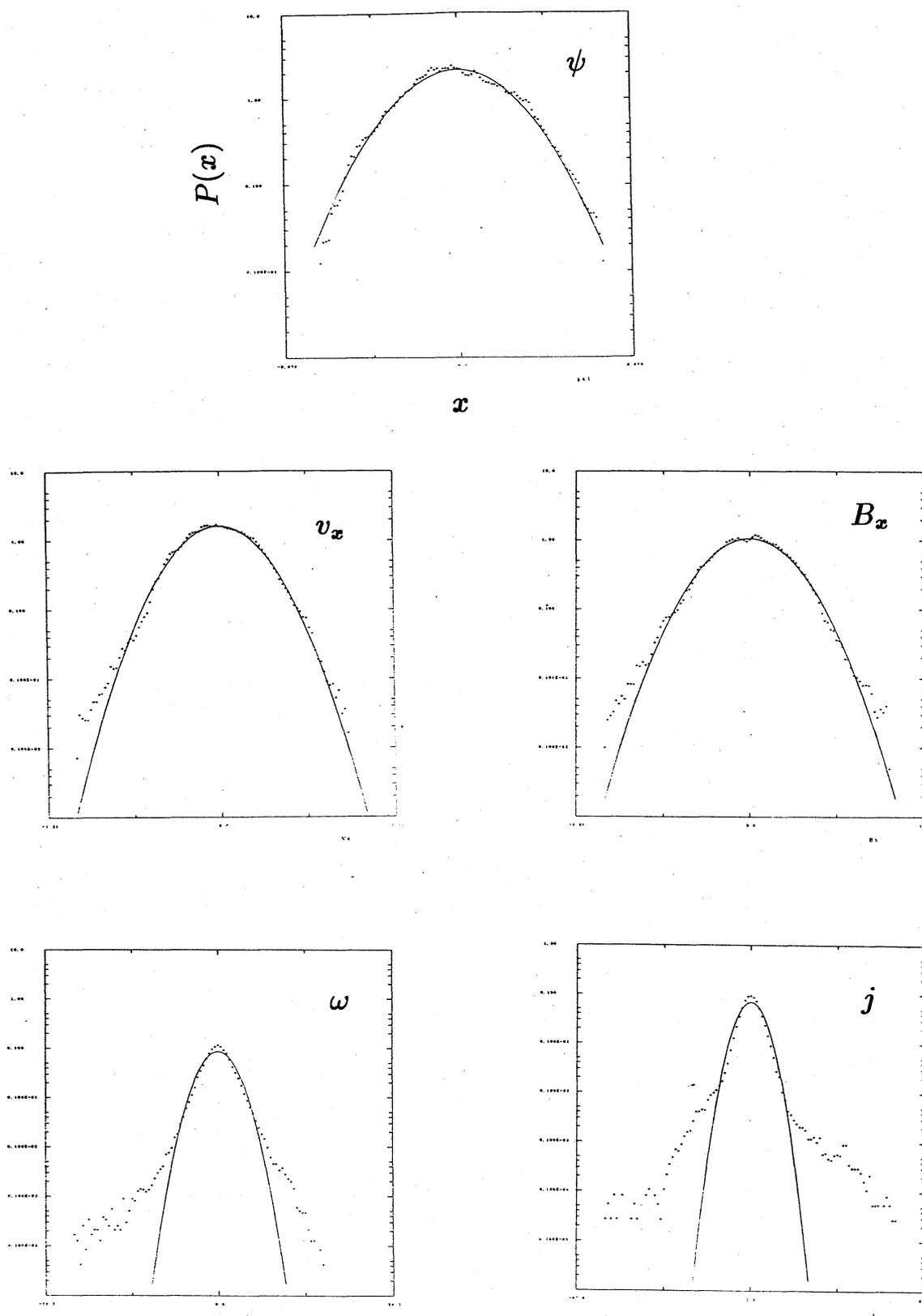


図2. 確率分布関数 ( $t = 4.6$ , (C) の場合, 縦軸が log scale)  
 実線は Gauss 分布に対応。

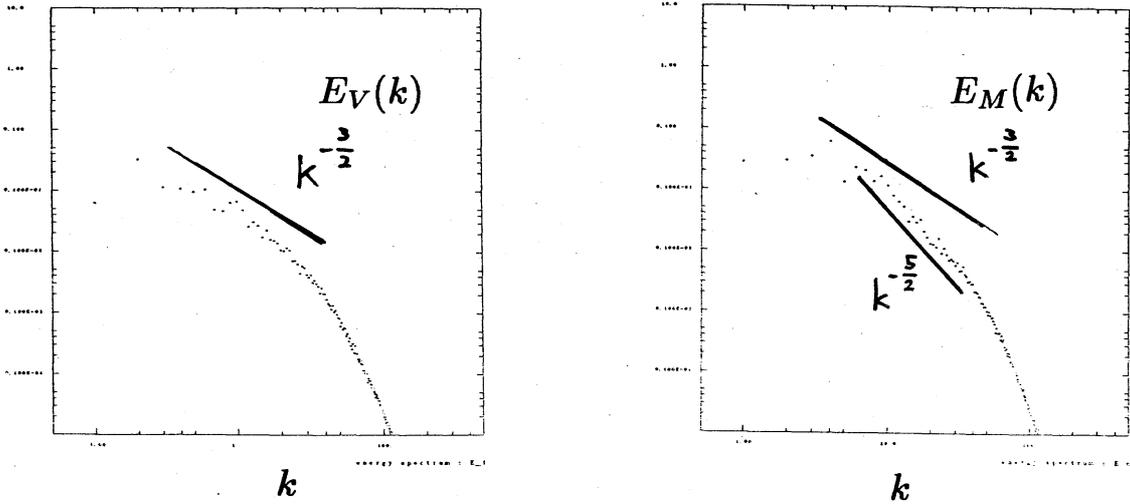
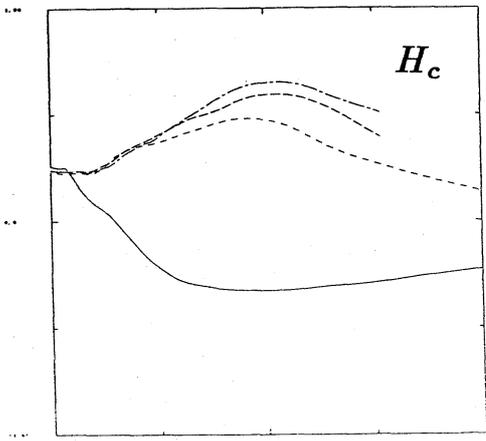
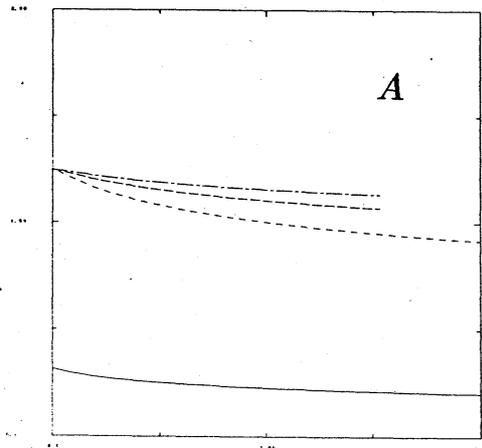
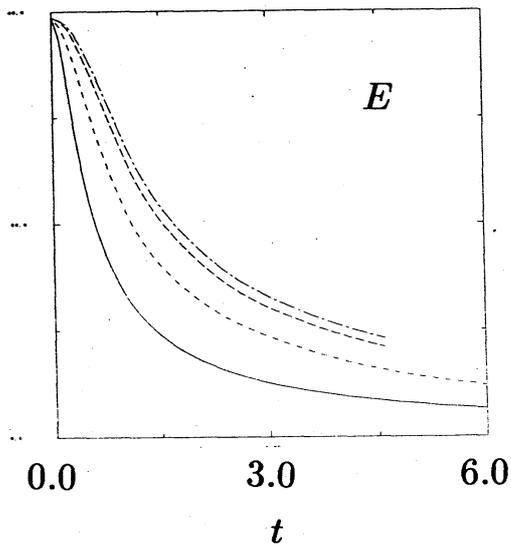


図3. エネルギー・スペクトル  
 (左:  $E_V(k)$ , 右:  $E_M(k)$ ,  $t = 4.6$ , (C) の場合, 両軸とも log scale)



- (A) ——— (B) - - - -
- (C) - - - - (D) - - - -

図4. 各統計量の時間変化

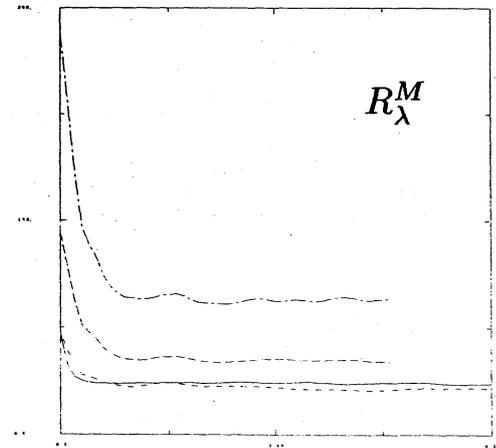
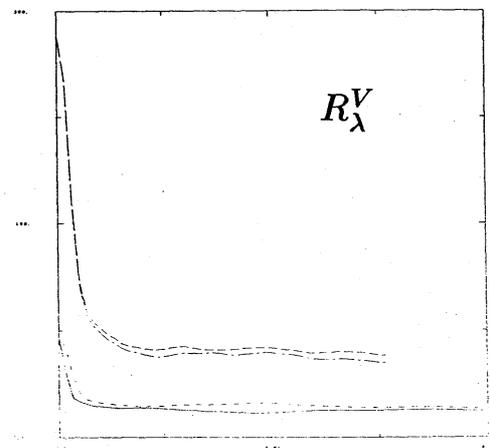
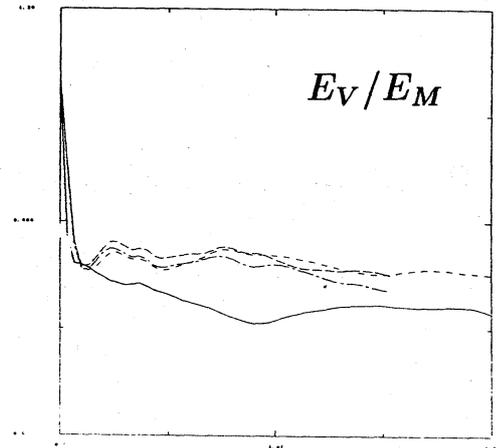
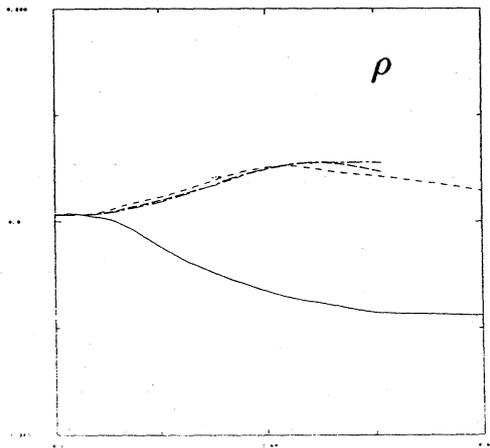
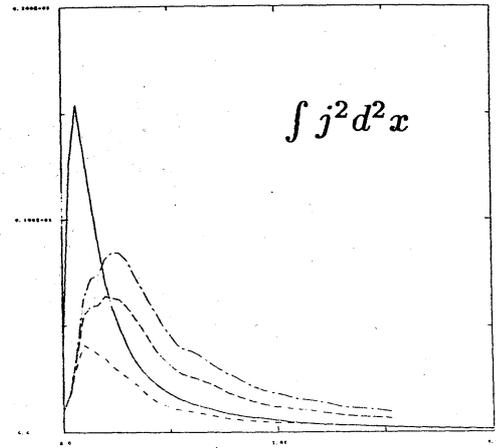
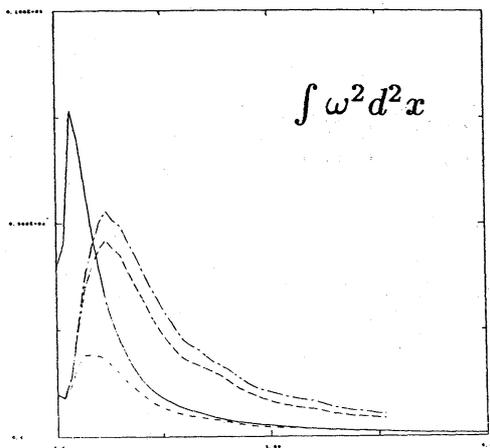


図4. 各統計量の時間変化 (続き)