数理解析研究所講究録
第 824 巻 1993 年 162-174

Nonstationary motion of a nonsymmetric fluids with thermal convection

九大・工 隠居 良行 (Yoshiyuki Kagei)

1. ストレステンソルが非対称部分をもつ非圧縮粘性流体の熱対流は次の方程式系で記述される

(1-1) $\frac{\partial u}{\partial t}-(\nu+\nu_r)\Delta u+u\cdot\nabla u+\nabla p=2\nu_r \operatorname{curl} u+f(\theta),\ t>0,\ x\in\Omega$

(1-2) $\operatorname{div} u=0,\qquad t\geq 0,\ x\in\Omega$

(1-3) $\frac{\partial \omega}{\partial t}-(c_a+c_d)\Delta\omega-(c_0+c_d-c_a)\nabla\operatorname{div}\omega+4\nu_r\omega$
$=2\nu_r\operatorname{curl} u+g(\theta),\qquad t>0,\ x\in\Omega$

(1-4) $\frac{\partial\theta}{\partial t}-\kappa\Delta\theta+u\cdot\nabla\theta=\Phi(u,\omega),\quad t>0,\ x\in\Omega.$

ここで、Ω は $\mathbb{R}^n$ $(n=2,3)$ の有界領域で、その境界 $\partial\Omega$ はなめらか。$u(x,t)\in\mathbb{R}^n$ は流体の速度場、$p(x,t)$ は圧力、$\omega(x,t)\in\mathbb{R}^n$ は内部角速度、$\theta(x,t)$ は温度を表わす。f, g は $\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ の与えられた関数。ν は動粘性係数、ν_r, c_0, c_a, c_d は内部回転に関連した係数、κ は熱伝導係数で、これらはすべて正の定数とする。方程式 (1-4) の Φ は散逸関数と呼ば

れるもので、

$$\Phi = \sum_{i=1}^{5} \Phi_i ,$$

ここで、

$$\Phi_1 = \frac{\nu}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2$$

$$\Phi_2 = 4\nu_r \left(\frac{1}{2} \operatorname{curl} u - \omega \right)^2$$

$$\Phi_3 = c_0 (\operatorname{div} \omega)^2$$

$$\Phi_4 = (c_a + c_d) \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} \right)^2$$

$$\Phi_5 = (c_d - c_a) \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} 。$$

方程式系 (1-1) ~ (1-4) に境界条件

$$u|_{\partial\Omega} = 0 , \quad \omega|_{\partial\Omega} = 0 , \quad \theta|_{\partial\Omega} = 0$$

および初期条件

$$u|_{t=0} = u_0 , \quad \omega|_{t=0} = \omega_0 \quad \theta|_{t=0} = \theta_0$$

をつけ加えて、初期値境界値問題 (P) を考える。方程式 (1-4) で散逸関数 Φ を無視すると、Navier-Stokes 方程式の解の存在証明と同様に解の存在を示すことができる。(f, g には下の (A1) を仮定する。) しかしながら、Φ を考えに入れると、Φ が ∇u の 2次の項を含むことから、解の存在証明は難しくなってくる。われわれの目的はこの初期値境界値問題 (P) の解の存在について調べることである。

関数 f, g については

$$
(A1)\quad
\begin{aligned}
&|f(\theta_1)-f(\theta_2)| \leq M_f\,|\theta_1-\theta_2| \\
&|g(\theta_1)-g(\theta_2)| \leq M_g\,|\theta_1-\theta_2| \\
&f(0)=g(0)=0
\end{aligned}
$$

を仮定する。このとき、次の強解の存在定理を得る。

$V = C^\infty_{0,\sigma} = \{v \in C_0^\infty(\Omega);\ \operatorname{div} v = 0\}$ の $\mathbb{H}_0^1$ - closure

とすると、

定理1、(i) $\forall (u_0, \omega_0, \theta_0) \in V \times \mathbb{H}_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ に対して、

$\exists T_* > 0$, $\exists (u, \omega, \theta)$ s.t. (u, ω, θ) は (P) の $[0, T_*)$ 上

の強解 :

$$
\begin{aligned}
&u \in C([0,T]; V) \cap L^2(0,T; \mathbb{H}^2(\Omega)) \\
&\omega \in C([0,T]; \mathbb{H}_0^1(\Omega)) \cap L^2(0,T; \mathbb{H}^2(\Omega)) \qquad 0 < {}^\forall T < T_* \\
&\theta \in C([0,T]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T; H_0^1(\Omega)).
\end{aligned}
$$

(ii) $(u_0, \omega_0, \theta_0)$ および ν_r が十分小さければ、強解 (u, ω, θ) は $[0, \infty)$ 上で存在する。

強解の存在については、$n=2$ のときも、一般のデータに対しては時間局所的な存在しかわかっていない。

次に (P) の弱解について考える。Navier-Stokes 方程式の弱解の理論から、大域的弱解を構成する際には、$\|u(t)\|_2^2 + \int_0^t \|\nabla u\|_2^2 d\tau$ の与えられたデータによる評価が必要である

ように思われる。しかしながら、f, g に対する(A1)という仮定の下では、散逸関数 Φ が ∇u の2次の項を含むため、この評価を得ることが難しく、いまのところ大域的弱解の存在はわかっていない。そこで、f, g に対して (A.1) に加えて、

$$(A2) \qquad f,\ g \in \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R})$$

を仮定する。(A1), (A2) を仮定すると、$n=2$ のときには、大域的弱解を構成することができる。

$$L^2_\sigma = C^\infty_{0,\sigma} \text{ の } \mathbb{L}^2\text{-closure}$$

とかくことにする。

定理2. $n=2$ とする。f, g については (A-1), (A・2) を仮定する。このとき、

$\forall (u_0, \omega_0, \theta_0) \in L^2_\sigma \times \mathbb{L}^2(\Omega) \times L^1(\Omega)$ に対して $\exists (u, \omega, \theta)$ s.t.

(u, ω, θ) は (P) の大域的弱解：

$$u \in L^\infty(0,T; L^2_\sigma) \cap L^2(0,T; V)$$

$$\omega \in L^\infty(0,T; \mathbb{L}^2(\Omega)) \cap L^2(0,T; \mathbb{H}^1_0(\Omega)) \qquad 0 < \forall T < \infty$$

$$\theta \in L^\infty(0,T; L^1(\Omega)) \cap L^{4/3}(0,T; L^{4/3}(\Omega))$$

$n=3$ のときは、(A2) を仮定しても大域的弱解の存在はわかっていない。

(定理2の証明) 簡単のため、u と θ に対する初期値境界値問題

$$
(\mathrm{P})' \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + u\cdot\nabla u + \nabla p = f(\theta), & t>0,\ x\in\Omega \\ \operatorname{div} u = 0, & t\geq 0,\ x\in\Omega \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial t} - \kappa\Delta\theta + u\cdot\nabla\theta = \Phi(u), & t>0\ x\in\Omega \\ u|_{\partial\Omega}=0,\ \theta|_{\partial\Omega}=0,\ u|_{t=0}=u_0,\ \theta|_{t=0}=\theta_0 \\ \Phi(u) = \dfrac{\nu}{2}\displaystyle\sum_{i,j=1}^{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)^2 \end{cases}
$$

を考える。$(\mathrm{P})'$ の弱解の定義を述べておく。(u,θ) が $(\mathrm{P})'$ の弱解であるとは、$u\in L^\infty(0,T;L^2_\sigma)\cap L^2(0,T;V)$, $\theta\in L^\infty(0,T;L^1(\Omega))\cap L^{4/3}(0,T;L^{4/3}(\Omega))$ $(0<{}^\forall T<\infty)$ であり、等式

$$
(1\text{-}5)\quad \begin{aligned} &-\int_0^T (u,v)h'dt + \nu\int_0^T(\nabla u,\nabla v)h\,dt + \int_0^T (u\cdot\nabla u, v)h\,dt \\ &= (u_0,v)h(0) + \int_0^T (f(\theta),v)h\,dt \end{aligned}
$$

$$
(1\text{-}6)\quad \begin{aligned} &-\int_0^T (\theta,\psi)h'dt - \kappa\int_0^T(\theta,\Delta\psi)h\,dt - \int_0^T (\theta, u\cdot\nabla\psi)h\,dt \\ &= (\theta_0,\psi)h(0) + \int_0^T (\Phi(u),\psi)h\,dt \end{aligned}
$$

が、任意の $v\in V$, $\psi\in C^2(\overline{\Omega})$, $\psi|_{\partial\Omega}=0$, $h\in C^1[0,T]$, $h(T)=0$ に対して成立することをいう。

まず、近似解 (u_k,θ_k) を構成する。$\{w_j\}_{j=1}^\infty$ を Stokes 作用素の固有関数とし、$\{u_{0k}\}_{k=1}^\infty$ を、$u_{0k}=\sum_{j=1}^{k}(u_0,w_j)w_j$ で定める。$\{\theta_{0k}\}_{k=1}^\infty$ をなめらかな関数で、$\theta_{0k}\to\theta_0$ in $L^1(\Omega)$ となるものとする。近似解 (u_k,θ_k) を次で定める。

$$u_k(t)=\sum_{j=1}^{k} \xi_{jk}(t) w_j, \quad$$ ここで ξ_{jk} は、

$$(1\text{-}7)\quad (u_k', w_j)+\nu(\nabla u_k, \nabla w_j)+(u_k\cdot\nabla u_k, w_j)=(f(\theta_k), w_j)$$
$$u_k(0)=u_{0k} \qquad (j=1,\cdots,k)$$

から決まる常微分方程式の解で、$\theta_1=\theta_0$ とし、$\theta_k\ (k\geqq 2)$ は、次の線形問題の解とする。

$$\theta_t-K\Delta\theta+u_{k-1}\cdot\nabla\theta=\Phi(u_{k-1}),\quad \theta|_{\partial\Omega}=0,\quad \theta|_{t=0}=\theta_{0k}.$$

以下で、この近似解 (u_k, θ_k) が $(P)'$ の弱解を与えることをみていく。(1-7) に ξ_{jk} をかけて j について加えると、

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_k\|_2^2+\nu\|\nabla u_k\|_2^2=(f(\theta_k), u_k)\leqq\|f(\theta_k)\|_2\|u_k\|_2\leqq C\|f(\theta_k)\|_2\|\nabla u_k\|_2.$$

(A-2) より、$f\in L^\infty$ だから、

$$(1\text{-}8)\quad \|u_k(t)\|_2^2+\nu\int_0^t\|\nabla u_k\|_2^2 d\tau\leqq\|u_0\|_2^2+C(\Omega,T)\quad(0\leqq t\leqq T).$$

したがって、u_k は $L^\infty(0,T;L^2_\sigma)\cap L^2(0,T;V)$ で有界である。このことから、$\frac{du_k}{dt}$ は $L^2(0,T;V^*)$ (V^* は V の dual sp.) で有界であることがわかる。次に θ_k を評価する。$P_k(x,t;y,s)$ を

$$\theta_t-K\Delta\theta+u_{k-1}\cdot\nabla\theta=0,\quad \theta|_{\partial\Omega}=0,\quad \theta|_{t=0}=\theta_0$$

の Green 関数とすると、$\theta_k(x,t)$ は

$$(1\text{-}9)\quad \theta_k(x,t)=\int_\Omega P_k(x,t;y,0)\theta_{0k}(y)dy+\int_0^t\int_\Omega P_k(x,t;y,s)\Phi(u_{k-1})dyds$$

とかける。$P_k(x,t;y,s)$ については、

$$(1\text{-}10)\quad \int_\Omega P_k(x,t;y,s)dx\leqq 1,\qquad \int_\Omega P_k(x,t;y,s)dy\leqq 1,$$

(1-11) $\qquad P_k(x,t;y,s) \le C(t-s)^{-1}$, Cはkに無関係

(Nashの不等式 [5], [6])

が成り立つ。(1-9), (1-10), (1-11) より、$p \ge 1$ に対して、

$$\|\theta_k(t)\|_p \le C t^{-(1-\frac{1}{p})}\|\theta_0\|_1 + \int_0^t (t-s)^{-(1-\frac{1}{p})}\|\nabla u_k\|_2^2 ds$$

を得る。$p=1$ として、(1-8) より、

(1-12) $\qquad \|\theta_k(t)\|_1 \le C(\Omega, T, \|u_0\|_2, \|\theta_0\|_1)$, $\quad 0 \le t \le T$

がわかり、また、Youngの不等式より、θ_kは $L^q(0,T;L^p(\Omega))$, ($\frac{1}{p}+\frac{1}{q} > 1$, $p>1$) で有界であることがわかる。したがって、

$\exists (u_k, \theta_k)$の部分列 $(u_{k'}, \theta_{k'})$, $\exists (u, \theta)$ s.t.

$$(1\text{-}13) \qquad \begin{aligned} u_{k'} &\to u && \text{in } L^2(0,T;L^2_\sigma) \\ u_{k'} &\rightharpoonup u && \text{in } L^2(0,T;V) \quad (\rightharpoonup \text{は弱収束}) \\ \frac{du_k}{dt} &\xrightarrow{*} \frac{du}{dt} && \text{in } L^2(0,T;V^*) \\ \theta_{k'} &\to \theta && \text{in } L^{4/3}(0,T;L^{4/3}(\Omega)) \end{aligned}$$

がわかる。また(1-12)より、$\theta \in L^\infty(0,T;L^1(\Omega))$ としてよい。

次に、この(u,θ)が(1-5), (1-6) をみたすことを示す。いま、jを任意に固定する。このとき、$k>j$とすると、

$$(1\text{-}14) \quad -\int_0^T (u_k, v)h'dt + \nu\int_0^T (\nabla u_k, \nabla v)h dt + \int_0^T (u_k\cdot\nabla u_k, v)h dt$$
$$= (u_{0k}, v)h(0) + \int_0^T (f(\theta_k), v)h dt$$

$$(1\text{-}15) \quad -\int_0^T (\theta_k, \psi)h'dt - \kappa\int_0^T (\theta_k, \Delta\psi)h dt - \int_0^T (\theta_k, u_{k-1}\cdot\nabla\psi)h dt$$
$$= (\theta_{0k}, \psi)h(0) + \int_0^T (\Phi(u_{k-1}), \psi)h dt$$

が、$h \in C^1[0,T]$, $h(T)=0$, $v=w_j$, $\psi \in C^2(\bar{\Omega})$, $\psi|_{\partial\Omega}=0$ に対して成立する。(1-14), (1-15) で $k=k' \to \infty$ として (u,θ) が弱解であることをみたいのだが、(1-13) の収束だけでは、まだ不十分である。というのは、$\Phi(u_k)$ が ∇u_k の2次の項を含むので、(1-13) からは

$$(1\text{-}16) \qquad \int_0^T (\Phi(u_{k'}), \psi)\, h\, dt \longrightarrow \int_0^T (\Phi(u), \psi)\, h\, dt$$

となるかどうかわからないからである。しかしながら、$n=2$ のときは、(1-16) を示すことができる。(1-16) を得るには $u_{k'} \longrightarrow u$ in $L^2(0,T;V)$ を示せばよい。

いま、l を固定して、$\varphi = \sum_{j=1}^{l} h_{jl}(t) w_j$, $h_{jl} \in C^1[0,T]$ とする。すると、$k \geq l$ に対して、

$$(u_k', \varphi - u_k) + \nu(\nabla u_k, \nabla\varphi - \nabla u_k) + (u_k\cdot\nabla u_k, \varphi - u_k)$$
$$= (f(\theta_k), \varphi - u_k)$$

を得る。これを $[0,t]$ 上で積分してやると、

$$\nu\int_0^t \|\nabla u_k\|_2^2 d\tau = \int_0^t (u_k', \varphi) d\tau + \frac{1}{2}\|u_{0k}\|_2^2 - \frac{1}{2}\|u_k(t)\|_2^2 + \nu\int_0^t (\nabla u_k, \nabla\varphi) d\tau$$
$$+ \int_0^t (u_k\cdot\nabla u_k, \varphi) d\tau - \int_0^t (f(\theta_k), \varphi - u_k) d\tau。$$

$f \in L^\infty$ だから、$f(\theta_{k'}) \xrightarrow{*} \exists \eta$ in L^∞ としてよいので $k=k' \to \infty$ とすると、(1-13) の収束から、

$$(1\text{-}17)\qquad \lim_{k'\to\infty} \nu\int_0^t \|\nabla u_{k'}\|_2^2 d\tau = \int_0^t \langle u', \varphi\rangle d\tau + \frac{1}{2}\|u_0\|_2^2 - \frac{1}{2}\|u(t)\|_2^2$$
$$+\nu\int_0^t (\nabla u, \nabla\varphi) d\tau + \int_0^t (u\cdot\nabla u, \varphi) d\tau$$
$$-\int_0^t (\eta, \varphi - u) d\tau \qquad (\text{a.e. } t)$$

を得る。$n=2$ なので、(1-17) は任意の $\varphi\in L^2(0,T;V)$ に対して成り立つことがわかる。したがって、(1-17) でとくに、$\varphi=u$ ととることができて、

$$\lim_{k'\to\infty}\int_0^t \|\nabla u_{k'}\|_2^2 d\tau = \int_0^t \|\nabla u\|_2^2 d\tau \qquad (\text{a.e. } t)$$

を得る。ところで、$u_{k'} \rightharpoonup u$ in $L^2(0,T;V)$ であったから $u_{k'} \to u$ in $L^2(0,T;V)$ がわかり、(1-16) を得る。

(u,θ) が弱解であることをみるには、$\eta = f(\theta)$ を示さなければならないが、これは、$u_{k'} \to u$ in $L^2(0,T;V)$ を用いて示すことができる。したがって、(1-14), (1-15) で $k=k'\to\infty$ としてやれば、(u,θ) が弱解となることがわかる。//

注．$n=3$ のときも上と同様にして、(1-17) を得ることはできるが、$n=3$ のときは (1-17) で $\varphi=u$ ととれるかどうかわからない。

2、問題 (P) の大域的弱解の構成における難しさは、散逸

関数 Φ が ∇u の2次の項を含むところにある。この節では次の初期値境界値問題(LP)を考える：

$$
(\mathrm{LP})
\begin{cases}
(2\text{-}1) & \dfrac{\partial u}{\partial t} - \mathrm{div}\,\mathcal{A}(u) + u\cdot\nabla u + \nabla p = f(\theta), \qquad t>0,\ x\in\Omega \\
(2\text{-}2) & \mathrm{div}\, u = 0, \qquad t>0,\ x\in\Omega \\
(2\text{-}3) & \dfrac{\partial \theta}{\partial t} - \kappa\Delta\theta + u\cdot\nabla\theta = \Phi(u), \qquad t>0,\ x\in\Omega \\
 & u|_{\partial\Omega} = 0,\ \theta|_{\partial\Omega} = 0\ ;\ u|_{t=0} = u_0,\ \theta|_{t=0} = \theta_0
\end{cases}
$$

ここで、

$$\mathcal{A}(u) = (\nu + \mu|\nabla u|^2)\nabla u \ , \quad \nu, \mu \text{ は正定数},$$

$$\Phi(u) = \frac{\nu}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)^2 。$$

方程式(2-1)は、$|\nabla u|$ が大きい場合の Navier-Stokes 方程式に代わるものとして Ladyzhenskaya が提案した方程式である。([1], [2])。(2-1)で $\mu=0$ とすると、(2-1)は Navier-Stokes 方程式になり、(P)′が得られるが、新しい粘性項 $\mu|\nabla u|^2$ を付け加えた問題(LP)については、次の大域的弱解の存在定理を得ることができる。

定理3. $n=2, 3$ とする。f については(A1)を仮定する。このとき、$\forall (u_0, \theta_0) \in L^2_\sigma \times L^2(\Omega)$ に対して、$\exists$ (LP)の大域的弱解 (u, θ)：

$$u \in L^\infty(0,T;L^2_\sigma) \cap L^2(0,T;V) \cap L^4(0,T;V_4)$$
$$\theta \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^1_0(\Omega)) \qquad 0 < {}^\forall T < \infty,$$

ここで. $V_4 = C^\infty_{0,\sigma}$ の $W^{1,4}_0$ - closure.

(証明の概略) 証明には Galerkin 法を用いる。近似解の収束は次のアプリオリ評価による。(2-1) と u との L^2-内積をとって. $|f(\theta)| \le M_f |\theta|$ だから、

(2-6) $$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_2^2 + \nu\|\nabla u\|_2^2 + \mu\|\nabla u\|_4^4 = (f(\theta), u) \le M_f \|\theta\|_2 \|u\|_2 \le C(\|u\|_2^2 + \|\theta\|_2^2)。$$

(2-3) と θ との L^2- 内積をとって、

(2-7) $$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\theta\|_2^2 + \kappa\|\nabla\theta\|_2^2 = (\Phi(u), \theta) \le \|\Phi(u)\|_2 \|\theta\|_2 \le C\|\nabla u\|_4^2\|\theta\|_2 \le \frac{\mu}{2}\|\nabla u\|_4^4 + \|\theta\|_2^2。$$

(2-6), (2-7) から. Gronwall の不等式を用いて、

(2-8) $$\|u(t)\|_2^2 + \nu\int_0^t \|\nabla u\|_2^2 d\tau + \mu\int_0^t \|\nabla u\|_4^4 d\tau \le C$$

(2-9) $$\|\theta(t)\|_2^2 + \kappa\int_0^t \|\nabla\theta\|_2^2 d\tau \le C$$

ここで. $C = C(\|u_0\|_2, \|\theta_0\|_2, T)$, を得る。

さて、(u_k, θ_k) を Galerkin 法による近似解とすると、(2-8), (2-9) により、$\{\frac{du_k}{dt}, \frac{d\theta_k}{dt}\}$ の有界性を得ることができるので、∃部分列 $(u_{k'}, \theta_{k'})$, ∃(u, θ) s.t.

$$u_{k'} \to u \quad \text{in } L^2(0,T;L^2_\sigma)$$
$$u_{k'} \rightharpoonup u \quad \text{in } L^2(0,T;V)\cap L^4(0,T;V_4)$$
$$\theta_{k'} \to \theta \quad \text{in } L^2(0,T;L^2(\Omega))$$
$$\theta_{k'} \rightharpoonup \theta \quad \text{in } L^2(0,T;H^1_0(\Omega)).$$

がわかる。 この (u,θ) が弱解であることをみたいのだが、極限移行において、問題となるのは、$\mathcal{A}(u_k)$ および $\Phi(u_k)$ を含む項である。 $\mathcal{A}(u_k)$ については、$\mathcal{A}$ が

$$(\mathcal{A}(v)-\mathcal{A}(w),\nabla v-\nabla w)\geqq 0, \qquad v,w\in V_4$$

をみたすので、単調作用素の議論より、

$$\mathcal{A}(u_{k'}) \longrightarrow \mathcal{A}(u) \quad \text{in } L^{4/3}(0,T;L^{4/3})$$

となることがわかる。また、$\Phi(u_k)$ については、$u\in L^4(0,T;V_4)$ であることから、$n=3$ のときも、定理2の証明と同様にして、$u_k \longrightarrow u$ in $L^2(0,T;V)$ を示すことができ、極限関数 (u,θ) が弱解であることがわかる。//

参考文献

[1] O.A. Ladyzhenskaya: The mathematical theory of viscous incompressible flow, Gordon-Breach (1969).

[2] O.A. Ladythenskaya : New equations for the description of motion of viscous incompressible fluids and solvability in the large of boundary value problems for them, Proc. Steklov Inst. Math., 102, 95~118 (1967).
[3] G. Łukaszewicz : On non-stationary flows of incompressible asymmetric fluids, Math. Meth. in the Appl. Sci., 13, 219~232 (1990).
[4] G. Łukaszewicz — W. Waluś : On stationary flows of asymmetric fluids with heat convection, Math. Meth. in the Appl. Sci., 11, 343~351 (1989).
[5] J. Nash : Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations, Amer. J. Math., 80, 931~954 (1958).
[6] H. Osada : Diffusion processes with generators of generalized divergence form, J. Math. Kyoto Univ., 27, 597~619 (1987).