数理解析研究所講究録
第 824 巻 1993 年 268-282

高次KdV方程式が近似する長い水面波

阪大理 鹿野 忠良 (KANO Tadayoshi)

1. 本稿では，非斉次(第一)高次KdV方程式が(1, 1)が，長い水面波に対する(第三次)近似を与える事を示す：

(1.1) $$v_t + v_x + \frac{\delta^2}{2}\left(\frac{5}{2}v^3 + 5Avv_{xx} + \frac{5}{2}Av_x^2 + A^2 v_{xxxx}\right)_x = R_1,$$

ここに R_1 は，夫々がKdV方程式の解である f_1, g_1, w_1 等の微分多項式であり，また $A = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{3}{5}\delta^2\right)$.

a) (水深/波長)^2 ≅ (波高/水深)を表わす無次元パラメータ δ^2 で量った時，いわゆる長い水面波の第一近似は，有限振巾の波についても，線型波動方程式

(1.2) $$v_{tt} - v_{xx} = 0 \quad , O(\delta^2) \text{ の誤差},$$

で与えられる； また，KdV方程式

(1.3) $$v_t + v_x + \frac{\delta^2}{2}\left(\frac{3}{2}v^2 + Av_{xx}\right)_x = 0$$

は $O(\delta^4)$ 誤差の二次近似を与える[1]。今，$V_0 = v$ から出発して次の漸化式で定義される，いわゆる KdV-hierarchy $\{V_n\}$ を考える：

(1, 5) $$V_{n+1,x} = v_x V_n + 2v V_{n,x} + A V_{n,xxx}, \quad n \geq 1.$$

本稿は，この KdV hierarchy に対応する，外力 R_1 をもつ最初の高次 KdV 方程式

$$v_t + v_x + \frac{\delta^2}{2} V_{2,x} = R_1, \quad \text{i.e. } (1, 1),$$

が，$O(\delta^6)$ 誤差で三次近似を与える事を示すのである。ここではのべないが，実は

$$v_t + v_x + \frac{\delta^2}{2} V_{3,x} = R_1$$

の形の，非斉次（第二）高次 KdV 方程式が，長い水面波の $O(\delta^8)$ 誤差の近似を与える事もわかる。

b) 他方，積分可能系である Kaup 方程式・Sawata-Kotera 方程式とも呼ばれる高次 KdV 方程式達が，しばしば「水面波のモデル方程式」と呼ばれる[3]。しかし本稿では，積分可能系である

(1, 6) $$v_t + v_x + \frac{\delta^2}{2} V_{2,x} = 0$$

ではなく，外力 R_1 をもつ (1.1) が実際に長い水面波を近似する事を言うのである。

<u>2. 長い水面波</u>。長い水面波は，水深 h，波長 λ および波高 α の間に次の関係を有する：$\lambda \to \infty$, $\alpha \to 0$ の時

$$\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 = \delta^2 \sim \varepsilon = \frac{\alpha}{h} \quad \text{as infinitesimals.}$$

無次元化した方程式は，速度ポテンシャル φ と水面 $y = 1 + \delta^2\gamma$ に対し，次の通である：

$$(2.1) \qquad \delta^2\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0, \quad \Omega = \{(x,y);\, x \in \mathbb{R},\, 0 < y < 1 + \delta^2\gamma\}$$

$$(2.2) \qquad \varphi_y = 0, \qquad y = 0$$

$$\left.\begin{array}{ll} (2.3) & \varphi_t + \delta^2\varphi_x^2 + \gamma + \dfrac{1}{2}\varphi_y^2 = 0 \\ (2.4) & \gamma_t + \delta^2\gamma_x\varphi_x - \delta^{-2}\varphi_y = 0 \end{array}\right\} \quad y = 1 + \delta^2\gamma$$

この方程式系は以下に述べる解析函数のバナッハ空間のスケール X で，局所時間に対して解かれている [2]；なお，[4] [5]，[6] をも参照： $X = \bigcup_{\rho > 0} B_\rho$，

$$B_\rho = \left\{ \begin{array}{l} u(z);\ z = x + iy,\ x \in \mathbb{R},\ |y| < \rho,\ \text{の正則函数} \\ \text{ノルム } \|u\|_\rho = \|\hat{u}(\xi)(1 + |\xi|)e^{\rho|\xi|}\|_{L^2} < +\infty \end{array} \right\}$$

ここに $\hat{u}(\xi)$ は $u(x)$ のFourier 変換で，

$$\|u\|_\rho^2 \sim \sup_{|y|<\rho} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x+iy)|^2 dx$$

である。すなわち，初期値

(2,5) $\quad \gamma(0,x) = \gamma_0(x) > 0, \quad \varphi(0,x,y) = \varphi_0(x,y)$

を B_{ρ_0}, $\rho_0 > 0$, に与えた時，(2,1)−(2,4) の解 $\{\gamma(t,x), \varphi(t,x,y)\} \in B_\rho \times B_\rho$, $0<\rho<\rho_0$, が，$|t| < a(\rho_0 - \rho)$ に対して存在する。ここで，$u \in B_\rho$ を $\mathbb{R}^1$ 上に制限すると，$\forall k$ に対し $u \in H^k(\mathbb{R}^1)$ である事に注意しておこう。

さて，水面に於る速度 $\bar{\varphi}_x \equiv \varphi_x(t, x, y=1+\delta^2\gamma)$ と γ によって，f, g を次で定義する：

$$f = \frac{1}{2}(\gamma + \bar{\varphi}_x), \quad g = \frac{1}{2}(\gamma - \bar{\varphi}_x).$$

今，初期値 (2,5) を

(2.6) $\quad f(0) = O(1), \quad g(0) = O(\delta^2)$

をみたす様に与えよう；すなわち流速の分布が水面の形に比較的似ている場合をさしている（初期時刻で）。

本稿の結論は次の定理である：

定理　(1,1) に対する初期値問題

$$v_t + v_x + \frac{\delta^2}{2}\left(\frac{5}{2}v^3 + 5Avv_{xx} + \frac{5}{2}Av_x^2 + Av_{xxxx}\right)_x = R_1$$

$$v(0) = f(0) \in B_{\rho_0},\quad R_1 \in H^5(\mathbb{R}^1)$$

は，$^\forall T > 0$ に対して

$$C^0\left([0,T];\, H^5(\mathbb{R}^1)\right) \cap C^1\left([0,T];\, L^2(\mathbb{R}^1)\right)$$

に属する解をもち，次が成立：

$$\|f(t) - v(t)\|_{H^5(\mathbb{R}^1)} = O(\delta^6),\quad \|f_t(t) - v_t(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^1)} = O(\delta^0),$$

$$|t| < a(\rho_0 - \rho),\quad 0 < \rho < \rho_0 .$$

注意　定理はさしあたり，(1,1)が，"$\mathbb{R}^1$上に制限された"長い水面波の近似方程式を与える事を言っており，一次近似(1,2)，二次近似 (1,3) より弱い結果である。

3.　$f = \frac{1}{2}(\gamma + \bar{\varphi}_x)$，$g = \frac{1}{2}(\gamma - \bar{\varphi}_x)$ が満す方程式。

水面　$y = 1 + \delta^2\gamma$　上で

$$u \equiv \bar{\varphi}_x \longmapsto \bar{\varphi}_y = \varphi_y(t, x, y = 1 + \delta^2\gamma)$$

を与える，所謂 Dirichlet-Neumann map を用いて，方程式 (1,3)-(1,4) を δ^2 に関して展開する：

$$(1.3)' \quad \gamma_t + u_x + \delta^2\left((\gamma u)_x + \frac{1}{3}u_{xxx}\right) + \delta^4\left((\gamma u_x)_{xx} + \frac{2}{15}u_{xxxxx}\right) = O(\delta^6),$$

$$(1.4)' \quad u_t + \gamma_x + \delta^2 u u_x - \delta^4 u_x u_{xx} = O(\delta^6),$$

剰余項評価は $O(\delta^6)$ in B_ρ, である。上の展開は，一次近似の波が伝播する方向，(1,1)の特性方向，に伝播する f，g に対する，下の展開を与える：

$$(3.1) \quad f_t + f_x + \frac{\delta^2}{2}\left(\frac{3}{2}f^2 + \frac{1}{3}f_{xx}\right)_x + \frac{\delta^4}{2}\left(ff_{xx} + \frac{1}{2}f_x^2 + \frac{2}{15}f_{xxxx}\right)_x = \frac{\delta^2}{2}\left(\frac{3}{2}g^2 + \frac{1}{3}g_{xx}\right)_x + \frac{\delta^2}{2}((f-g)g)_x + O(\delta^6),$$

$$(3.2) \quad g_t - g_x - \frac{\delta^2}{2}\left(\frac{3}{2}g^2 + \frac{1}{3}g_{xx}\right)_x = -\frac{\delta^2}{2}\left(\frac{3}{2}f^2 + \frac{1}{3}f_{xx}\right)_x - \frac{\delta^4}{2}\left(ff_{xx} + \frac{1}{2}f_x^2 + \frac{2}{15}f_{xxxx}\right)_x - \frac{\delta^2}{2}((g-f)f)_x + O(\delta^6).$$

4. $\underline{\overline{H}_1 = \frac{3}{2}f^2 + \frac{1}{3}f_{xx}}$ の近似。

$\overline{H}_0 = f$ から出発して

$$\overline{H}_{n+1,x} = f_x \overline{H}_n + 2f\overline{H}_{n,x} + \frac{1}{3}\overline{H}_{n,xxx}, \quad n \geq 1$$

が定義するKdV hierarchyは，

$$\overline{H}_0 = f$$

$$\overline{H}_1 = \frac{3}{2}f^2 + \frac{1}{3}f_{xx}$$

$$\overline{H}_2 = \frac{5}{2}f^3 + \frac{5}{3}ff_{xx} + \frac{5}{6}f_x^2 + \frac{1}{9}f_{xxxx},$$

$$\vdots$$

であるが，次が成立：

Prop. $\overline{H}_{1,x} = \overline{H}_{2,x} + (f_x w_1 + 2f w_{1,x} + \frac{1}{3}w_{1,xxx}) + O(\delta^4)$.

ここに，w_1 は線型化KdV方程式の初期値問題の解 $\in B_\rho$：

$$\begin{cases} w_{1,t} + w_{1,x} + \dfrac{\delta^2}{2}\left(3fw_{1,x} + \dfrac{1}{3}w_{1,xxx}\right) = 0 \\ w_1(0) = f(0) - \overline{H}_1(0) \end{cases}$$

証明　$f = \frac{1}{2}(\gamma + u)$ は(3.1)をみたすから

$$f_t + f_x + \frac{\delta^2}{2}\left(3ff_x + \frac{1}{3}f_{xxx}\right) = O(\delta^4).$$

他方，$\bar{H}_1$ は次の方程式をみたす事が，再び (3.1) に注意すれば，わかる：

$$\bar{H}_{1,t}+\bar{H}_{1,x}+\frac{\delta^2}{2}\left(3f\bar{H}_{1,x}+\frac{1}{3}\bar{H}_{1,xxx}\right)=O(\delta^4).$$

故に　$W_1\equiv f-\bar{H}_1$ は次の Cauchy 問題の解である：

$$\begin{cases} W_{1,t}+W_{1,x}+\dfrac{\delta^2}{2}\left(3fW_{1,x}+\dfrac{1}{3}W_{1,xxx}\right)=O(\delta^4) \\ W_1(0)=f(0)-\bar{H}_1(0). \end{cases}$$

今 Cauchy prob.

$$\begin{cases} w_{1,t}+w_{1,x}+\dfrac{\delta^2}{2}\left(3fw_{1,x}+\dfrac{1}{3}w_{1,xxx}\right)=0 \\ w_1(0)=W_1(0) \end{cases}$$

を $X=\bigcup_{\rho>0}B_\rho$ で解いて，解 w_1 を W_1 と比較すれば，右辺に関する連続性から

$$\|w_1(t)-W_1(t)\|_\rho=O(\delta^4)$$

が従う。すなわち

$$f(t)=\bar{H}_1(t)+w_1(t)+O(\delta^4)\ \text{in}\ B_\rho.$$

これを定義式に代入すれば，

$$\bar{H}_{1,x} = 3ff_x + \frac{1}{3}f_{xxx} =$$
$$= f_x f + 2ff_x + \frac{1}{3}f_{xxx} =$$
$$= f_x(\bar{H}_1 + w_1 + O(\delta^4)) +$$
$$+ 2f(\bar{H}_{1,x} + w_{1,x} + O(\delta^4)) +$$
$$+ \frac{1}{3}(\bar{H}_{1,xxx} + w_{1,xxx} + O(\delta^4)) =$$
$$= \bar{H}_{2,x} + (f_x w_1 + 2fw_{1,x} + \frac{1}{3}w_{1,xxx}) + O(\delta^4).$$

cqfd.

5. 前節の結果：$\bar{H}_1$ の $\bar{H}_2$ による近似，を (3.1) の $O(\delta^2)$ の項に代入すると，f が次の方程式をみたす事がわかる：

$$f_t + f_x +$$
$$+ \frac{\delta^2}{2}\left(\frac{5}{2}f^3 + \left(\frac{5}{3}+\delta^2\right)ff_{xx} + \frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}+\delta^2\right)f_x^2 + \left(\frac{1}{9}+\frac{2}{15}\delta^2\right)f_{xxxx}\right)_x =$$
$$= \frac{\delta^2}{2}\left(\frac{3}{2}g^2 + \frac{1}{3}g_{xx}\right)_x + \frac{\delta^2}{2}((f-g)g)_x -$$
$$- \frac{\delta^2}{2}(f_x w_1 + 2fw_{1,x} + \frac{1}{3}w_{1,xxx}) + O(\delta^6),$$

すなわち，

$$A = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{3}{5}\delta^2\right)$$

を用いて,

$$f_t + f_x + \frac{\delta^2}{2}\left(\frac{5}{2}f^3 + 5Aff_{xx} + \frac{5}{2}Af_x^2 + A^2 f_{xxxx}\right)_x =$$

$$(5.1) \qquad = \frac{\delta^2}{2}\left(\frac{3}{2}g^2 + \frac{1}{3}g_{xx}\right)_x + \frac{\delta^2}{2}\left((f-g)g\right)_x -$$

$$- \frac{\delta^2}{2}\left(f_x w_1 + 2fw_{1,x} + \frac{1}{3}w_{1,xxx}\right) + O(\delta^6)$$

in B_ρ.

今, (5.1) の右辺を $R + O(\delta^6)$ とかく時, 既知函数 $R_1 \in B_\rho$ を

$$(5.2) \qquad \| R - R_1 \|_\rho = O(\delta^6)$$

ととる事が出来れば, この R_1 をもって

$$(5.3) \qquad v_t + v_x + \frac{\delta^2}{2}\left(\frac{5}{2}v^3 + 5Avv_{xx} + \frac{5A}{2}v_x^2 + A^2 v_{xxxx}\right)_x = R_1$$

をつくれば, 2節に述べた定理を得る。 次節に, R_1 をどうとるかを述べる。

6. <u>R の近似。</u> 一次近似 f_0, g_0 : それぞれ

(6.1) $$f_{0,t}+f_{0,x}=0, \quad f_0(0)=f(0)$$

および

(6.2) $$g_{0,t}-g_{0,x}=0; \quad g_0(0)=g(0)$$

の解, は次をみたす:

$$\|f(t)-f_0(t)\|_\rho=O(\delta^2), \quad \|g(t)-g_0(t)\|_\rho=O(\delta^2).$$

次に, 二次近似 f_1, g_1 : 夫々, 次の Cauchy 問題の解:

(6.3) $$\begin{cases} f_{1,t}+f_{1,x}+\dfrac{\delta^2}{2}\left(\dfrac{3}{2}f_1^2+\dfrac{1}{3}f_{1,xx}\right)_x=0 \\ f_1(0)=f(0) \end{cases}$$

(6.4) $$\begin{cases} g_{1,t}-g_{1,x}-\dfrac{\delta^2}{2}\left(\dfrac{3}{2}g_1^2+\dfrac{1}{3}g_{1,xx}\right)_x= \\ \qquad =-\dfrac{\delta^2}{2}\left(\dfrac{3}{2}f_0^2+\dfrac{1}{3}f_{0,xx}\right)_x-\dfrac{\delta^2}{2}\left((g_0-f_0)f_0\right)_x \\ g_1(0)=g(0) \end{cases}$$

は, 次をみたす:

$$(6.5)\qquad \|f(t)-f_1(t)\|_\rho = O(\delta^4),\ \|g(t)-g_1(t)\|_\rho = O(\delta^4).$$

これ等の f_1, g_1 をもって R_1 を次の式で定義する：

$$R_1 = \frac{\delta^2}{2}\left(\frac{3}{2}g_1^2+\frac{1}{3}g_{1,xx}\right)_x+\frac{\delta^2}{2}\left((f_1-g_1)g_1\right)_x -$$
$$-\left(f_{1,x}w_1+2f_1w_{1,x}+\frac{1}{3}w_{1,xxx}\right),$$

$R_1 \in B_\rho[2]$.

この R_1 をもって (5.3) をつくれば，次節で示すように

$$(6.6)\qquad \begin{cases} (5.3) \\ v(0) = f(0) \end{cases}$$

は

$$(6.7)\qquad C^0([0,T];H^5(\mathbb{R}^1))\cap C^1([0,T];L^2(\mathbb{R}^1))$$

で解をもつから，再び $f-v$ に対する初期値問題を解いて右辺に関する連続性を用いる事によって定理を得る。

注意：上で定義した R_1 の存在は，実際には，高々 $t1<a\rho$。でしか保障されない。従って定理の述方は不正確である。要は，近似される時間はちぢまらぬ事，が大事な点である。

7. $v_t + v_x + \frac{\delta^2}{2}\left(\frac{5}{2}v^3 + 5Avv_{xx} + \frac{5}{2}Av_x^2 + A^2 v_{xxxx}\right)_x = R_1$

の大域解。

はじめに，$\varepsilon > 0$ に対して

$$(7.1)\quad \begin{cases} \tilde{v}_t + \tilde{v}_x + \frac{\delta^2}{2}\left(\frac{5}{2}\tilde{v}^3 + 5A\tilde{v}\tilde{v}_{xx} + \frac{5}{2}A\tilde{v}_x^2 + A^2\tilde{v}_{xxxx}\right)_x + \\ \qquad\qquad + \varepsilon\tilde{v}_{xxxx} = R_1 \\ \tilde{v}(0) = v(0) = f(0) \end{cases}$$

の局所解を構成する： $\tilde{v}(t) \in (6.7)$.

次に，ε に一様な a priori estimates は次の様に得られる：

① KdV方程式 (1.3) の全ての保存則は，そのまま

$$v_t + v_x + \frac{\delta^2}{2}\left(\frac{5}{2}v^3 + 5Avv_{xx} + \frac{5}{2}Av_x^2 + A^2 v_{xxxx}\right)_x = 0$$

の保存則である。

② 上の事を利用して

$$\int_{-\infty}^{\infty}\{(7.1)\text{の方程式}\} \times V_j\, dx,\ j = 0,1,2,3,4,5$$

を計算する。ここに $\{V_n\}$ は，$V_0 = v$ から出発して (1.5) が定義する KdV hierarchy である。

ここから実際，

$$\|R_1\|_{H^5(\mathbb{R}^1)} \leq N$$

とする時，

$$\|\tilde{v}(t)\|^2_{L^2} + 2\varepsilon\int_0^t e^{t-s}\|\tilde{v}_{xx}(s)\|^2_{L^2}ds \leq$$

$$\leq e^t\|v(0)\|^2_{L^2} + N(e^t - 1),$$

$$\|\tilde{v}_x(t)\|^2_{L^2} + \varepsilon\int_0^t e^{t-s}\|\tilde{v}_{xxx}(s)\|^2_{L^2}ds \leq$$

$$\leq e^t\|\tilde{v}_x(0)\|^2_{L^2} + e^{\frac{10}{3}t}\cdot C\left(N, \|\hat{v}(0)\|^2_{L^2}\right),$$

等々を得る。

BIBLIOGRAPHIE

[1] T.Kano-T.Nishida: A mathematical justification for Korteweg-de Vries equation and Boussinesq equation of water surface waves, Osaka J.Math., 23(1986),389-413.

[2] T.Kano : Une théorie trois-dimensionnelle des ondes de surface de l'eau et le développement de Friedrichs, J.Math.Kyoto Univ., 26(1986), 101-155,157-175.

[3] S.Kichenassamy-P.J.Olver: Existence and nonexistence of solitary wave solution to higher order model evolution equation,SIAM J.Math.Anal., 23(1992),1141-1166.

[4] L.V.Ovsjannikov: A nonlinear Cauchy problem in a scale of Banach spaces, Dokl.Akad.Nauk SSSR,200 (1971)=Soviet Math.Dokl.,12(1971),1497-1502.

[5] V.I.Nalimov: A priori estimates of solutions of elliptic equations in the class of analytic functions and their applications to the Cauchy-Poisson problem,Dokl.Akad.Nauk SSSR,189 (1969)=Soviet Math.Dokl.,10(1969),1350-1354.

[6] T.Kano-T.Nishida: Sur les ondes de surface de l'eau avec une justification mathématique des équations des ondes en eau peu profonde, J.Math. Kyoto Univ.,19(1979),335-370.