数理解析研究所講究録
第 825 巻 1993 年 63-81

Maximal Ideal Space 上の harmonic function について

京大理　庄子聡彦 (Akihiko Shōji)

R: リーマン面

H^∞: R 上の有界正則函数族

h^∞: R 上の有界実調和函数族

$\mathfrak{M}$: H^∞ 上の maximal ideal space

S: $\mathfrak{M}$ の Šilov 境界

としたとき、まず R を $\mathfrak{M}$ の位相で閉包をとると、それは S を含んでいるので、H^∞ の元 f に対して R 上の函数 $\mathrm{Re}f$ を $\mathfrak{M}$ 上連続にのばしたとすると、それは S 上 $(\mathrm{Re}f)(m)=\mathrm{Re}(f(m))$ をみたす。ゆえに $\mathfrak{M}$ の各元での値を、その S 上の表現測度を用いて定義すれば、

$$m(\mathrm{Re}f)=\mathrm{Re}\,m(f) \quad \text{for } {}^\forall m\in\mathfrak{M},\ {}^\forall f\in H^\infty \quad \cdots(0,1)$$

となり、この"自然"な式がある種の"必然"性を伴っていることがわかる。

ところで、$(H^\infty)^{-1}=\{f\in H^\infty;\ 1/f\in H^\infty\}$ の元 f をとったとき、

$$m(\log|f|) = \log|m(f)| \quad (m \in \mathfrak{M},\ f \in (H^\infty)^{-1}) \cdots (0,2)$$

を用いて h^∞ の元 $\log|f|$ に対して自然に定義ができる。特に、R が単位円板であるときには、この式を用いて h^∞ 全体に定義することができる。

ここでは、松岡氏[1]の手法を用いて (0,1), (0,2) を基として"必然"的に拡張できる h^∞ の元はどのようなものであるかについて述べることとする。

§1. Hahn-Banach の定理の確認

まず、"必然"性の確認のため、Hahn-Banach の定理とその証明を見てみよう。

<u>Theorem 1</u> (Hahn-Banach)

X:実ベクトル空間

M:X の部分空間

p:X 上の劣加法的汎函数

φ:M 上の実線型汎函数で、

M の任意の元 x について、$\varphi(x) \leq p(x)$ をみたすとしたとき、φ を X 上へ拡張した実線型汎函数 Φ で、X 上 $\Phi \leq p$ をみたすものがある。

(証明)

$X\setminus M \ni x_0$ としたとき、x_0 と M の線型包 M_0 上に φ の拡張 φ_0 をとるとすると、φ_0 のみたすべき条件は、

$$\left.\begin{array}{l}\varphi_0(x+\alpha x_0)=\varphi(x)+\alpha\varphi_0(x_0)\\ \varphi_0(x+\alpha x_0)\leq p(x+\alpha x_0)\end{array}\right. \qquad \text{for } \forall x\in M,\ \forall\alpha\in\mathbb{R}$$

即ち、$\varphi_0(x_0)$ が

$$\alpha\varphi_0(x_0)\leq p(x+\alpha x_0)-\varphi(x) \qquad \text{for } \forall x\in M,\ \forall\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

をみたしていれば φ_0 をとることができる。

$\alpha>0$ のとき、これは $\varphi_0(x_0)\leq p(\frac{x}{\alpha}+x_0)-\varphi(\frac{x}{\alpha})$ と同じで、

$\alpha<0$ のとき、これは $-\varphi_0(x_0)\leq p(-\frac{x}{\alpha}-x_0)-\varphi(-\frac{x}{\alpha})$ と同じである。

ゆえに、φ_0 の条件は、

$$\sup_{y\in M}\{\varphi(y)-p(y-x_0)\}\leq\varphi_0(x_0)\leq\inf_{z\in M}\{p(z+x_0)-\varphi(z)\} \qquad \cdots(1,1)$$

ところで、

$$\varphi(y)-p(y-x_0)\leq p(z+x_0)-\varphi(z) \Leftarrow \varphi(y+z)\leq p(y+z)=p(y-x_0+z+x_0)$$

より、$\sup_{y\in M}\{\varphi(y)-p(y-x_0)\}\leq\inf_{z\in M}\{p(z+x_0)-\varphi(z)\}$ となるので、

φ_0 をとることはできる。

あとは Zorn の補題を用いた標準的な議論により、

φ は X 全体に拡張できる。

(q.e.d.)

上の定理を複素版(つまり p:半ノルム, $|\varphi(x)|\leq p(x)$)に直す

には、Xを実ベクトル空間とみなして．$(\mathrm{Re}\,\varphi)$は$(\mathrm{Re}\,\varphi_0)$に．

$$\sup_{y\in M}\{\mathrm{Re}\,\varphi(y)-p(y-x_0)\}\leq \mathrm{Re}\,\varphi_0(x_0)\leq \inf_{z\in M}\{p(z+x_0)-\mathrm{Re}\,\varphi_0(z)\} \quad \cdots (1,1)'$$

でのびる。$\mathrm{Im}\,\Phi(x)=-\mathrm{Re}\,\Phi(ix)$を更に満たす必要から．

$\Phi(x)=\mathrm{Re}\,\Phi(x)-i\,\mathrm{Re}\,\Phi(ix)$ とすれば、$(\alpha+i\beta)\Phi(x)=\mathrm{Re}\,\Phi(\alpha x+\beta ix)-i\,\mathrm{Re}\,\Phi(-\beta x+\alpha ix)$

$$=\Phi((\alpha+i\beta)x)$$

即ちΦは複素線型汎函数。あとは$\Phi(x)$の偏角を考えて．

$|\Phi(x)|=\sup\limits_{|\alpha|=1}\mathrm{Re}\,\Phi(\alpha x)\leq\sup\limits_{|\alpha|=1}p(\alpha x)=p(x)$ より従う。

これより．$\mathcal{M}$の各元を$(H^\infty)^*$の元とみて$\mathbb{C}h^\infty=\{h_1+ih_2\,;\,h_j\in h^\infty\}$上にノルムを保って拡張したとき、$\mathbb{C}h^\infty$の元$\tilde{h}$に対してはどのような拡張の自由度があるであろうか。

任意のH^∞の元fと正数c、及び$\mathcal{M}$の元mに対し、

$\mathrm{Re}\,m(f+c)=\mathrm{Re}\,m(f)+c$ となるのに比べ．R上では．

$|f-\tilde{h}|+c\geq|f+c-\tilde{h}|=\sqrt{(\mathrm{Re}(f-\tilde{h})+c)^2+(\mathrm{Im}(f-\tilde{h}))^2}\sim\mathrm{Re}(f-\tilde{h})+c \quad (\text{as } c\to\infty)$

となっているので．

$$\mathrm{Re}\,m(f)-\|f-\tilde{h}\|\leq\mathrm{Re}\,m(f+c)-\|f+c-\tilde{h}\|\to\mathrm{Re}\,m(f)-\sup\mathrm{Re}(f-\tilde{h})\ (\text{as } c\to\infty)$$

となる。$\sup\mathrm{Re}(f-\tilde{h})=a$とおくと、$\mathrm{Re}\,m(f)-\sup\mathrm{Re}(f-\tilde{h})=\mathrm{Re}\,m(f-a)$ となるので、以上より．

$$\sup_{f\in H^\infty}\{\mathrm{Re}\,m(f)-\|f-\tilde{h}\|\}=\sup_{f\in H^\infty}\{\mathrm{Re}\,m(f)\,;\,\sup\mathrm{Re}(f-\tilde{h})=0\}=\sup_{f\in H^\infty}\{\mathrm{Re}\,m(f)\,;\,\mathrm{Re}f\leq\mathrm{Re}\tilde{h}\}$$

即ち．$(1,1)'$式はこの場合．

$$\sup_{f\in H^\infty}\{\mathrm{Re}\,m(f)\,;\,\mathrm{Re}f\leq\mathrm{Re}\tilde{h}\}\leq\mathrm{Re}\,m(\tilde{h})\leq\inf_{f\in H^\infty}\{\mathrm{Re}\,m(f)\,;\,\mathrm{Re}f\geq\mathrm{Re}\tilde{h}\}\quad\cdots(1,2)'$$

となる。

上式より特にh^∞の元hに対しては$\mathrm{Re}\,m(ih)=0$となるので、$m(h)=\mathrm{Re}\,m(h)$。ゆえに再び上式より、mはh^∞上の非負実線型汎函数であり、更にH^∞の元fに対し、$\mathrm{Re}\,m(f)=m(\mathrm{Re}\,f)$となり(0,1)は無条件で必然であることもわかる。

次に、(0,2)式を基として考えようとすると、Hahn-Banachの論法にのせるためには、h^∞の部分空間

$\mathbb{R}\log|(H^\infty)^{-1}|$: $\{a\log|f|\,;\,a\in\mathbb{R},\ f\in(H^\infty)^{-1}\}$の線型包

を考える必要がある。

$$\frac{q_1}{p_1}\log|f_1|+\frac{q_2}{p_2}\log|f_2|=\frac{1}{p_1p_2}\log|f_1^{p_2q_1}f_2^{p_1q_2}| \qquad (f_j\in(H^\infty)^{-1},\ p_j\in\mathbb{N},\ q_j\in\mathbb{Z})$$

ゆえ$\mathbb{R}\log|(H^\infty)^{-1}|$内で$\{\frac{1}{n}\log|f|\,;\,n\in\mathbb{N},\ f\in(H^\infty)^{-1}\}$は稠密である。一方、R上で$\frac{1}{n_1}\log|f_1|\leq\frac{1}{n_2}\log|f_2|$ならば、$\|f_1^{n_2}/f_2^{n_1}\|\leq 1$ゆえ任意の$\mathfrak{M}$の元$m$で$\left|(m(f_1))^{n_2}/(m(f_2))^{n_1}\right|\leq 1$、即ち$\frac{1}{n_1}\log|m(f_1)|\leq\frac{1}{n_2}\log|m(f_2)|$。特にR上$c_1\leq\frac{1}{n}\log|f|\leq c_2$なら、$c_1=\log|m(e^{c_1})|\leq\frac{1}{n}\log|m(f)|\leq\log|m(e^{c_2})|=c_2$となる。更に、$\frac{1}{n_1n_2}\log|m(f_1^{n_2}f_2^{n_1})|=\frac{1}{n_1}\log|m(f_1)|+\frac{1}{n_2}\log|m(f_2)|$となっている。以上より、(0,2)式で定義した$m$は、$\mathbb{R}\log|(H^\infty)^{-1}|$上の非負実線型汎函数で、$\|m\|=m(1)=1$をみたす。

なお、$\mathrm{Re}\,f=\log|e^f|$より(0,2)は(0,1)を含んでいる。

(0,1),(0,2)式を基としてmを各々$\mathrm{Re}\,H^\infty$, $\mathbb{R}\log|(H^\infty)^{-1}|$から$h^\infty$上へ拡張したとすると、(1,2)'式と全く同様に(1,1)式から、

$$\sup_{u\in A}\{m(u)\,;\,u\leqq h\}\leqq m(h)\leqq \inf_{u\in A}\{m(u)\,;\,u\geqq h\}\cdots(1,2)$$

となる。ここでAは各々$\mathrm{Re}\,H^\infty$, $\mathbb{R}\log|(H^\infty)^{-1}|$ (もしくは$\frac{1}{N}\log|(H^\infty)^{-1}|$ 即ち$\{\frac{1}{n}\log|f|\,;\,f\in(H^\infty)^{-1}, n\in N\}$) を表す。

(ところでこの式より、H^∞から$C h^\infty$への拡張のh^∞への制限が $\mathrm{Re}\,H^\infty$からh^∞への拡張と一致していることがわかる。)

そこで、h^∞の各元に対し、$\mathfrak{M}$の各元における自由度を与える函数として、

$$\check{h}(m)=\sup_{u\in \mathrm{Re}H^\infty}\{m(u)\,;\,u\leqq h\}$$
$$\check{h}^{(L)}(m)=\sup_{u\in \mathbb{R}\log|(H^\infty)^{-1}|}\{m(u)\,;\,u\leqq h\}\qquad\cdots(1,3)$$

をとると、$\mathrm{Re}\,H^\infty$, $\mathbb{R}\log|(H^\infty)^{-1}|$は$\mathfrak{M}$上の連続函数なので、$\check{h}$及び$\check{h}^{(L)}$は$\mathfrak{M}$上の下半連続函数である。そして$m(h)\in[\check{h}(m), -(\check{-h})(m)]$, $m(h)\in[\check{h}^{(L)}(m), -(\check{-h})^{(L)}(m)]$が各々の自由度である。

さて、h_1に対するm_1の拡張が一意となるとき、即ち$\check{h}_1^\rho(m_1)$が$-(\check{-h_1})^\rho(m_1)$と一致するとき、($\check{h}^\rho$は$\check{h}$又は$\check{h}^{(L)}$) $\mathfrak{M}$の各元毎の$(h^\infty)^*$への拡張を用いて$h(m)=m(h)$でhを$\mathfrak{M}$上の函数とみると、$\mathfrak{M}$上で$\check{h}^\rho\leqq h\leqq -(\check{-h})^\rho$なので、$m_1$は$h_1$の連続点となる。ゆえに任意の$m$で拡張が一意となる$h^\infty$の元は$\mathfrak{M}$上の連続函数である。

ところでmをS上の連続函数の集合$C(S)$の上に拡張することもできるが、このときの条件も同様に(1,2), (1,2)$'$の形になる。即ち、$C_{\mathbb{R}}(S)$の元gに対し、Aを$\mathrm{Re}\,H^\infty$, $\mathbb{R}\log|(H^\infty)^{-1}|$として、

$$\sup_{u\in A}\{m(u)\,;\,u|_S\leqq g\}\leqq m(g)\leqq\inf_{u\in A}\{m(u)\,;\,u|_S\geqq g\}\quad\cdots(1,2)''$$

となる。

$\mathfrak{M}$上の実連続函数Fに対し $\sup_{u\in A}\{m(u)\,;\,u|_R\leqq F|_R\}\leqq\sup_{u\in A}\{m(u)\,;\,u|_S\leqq F|_S\}$ となるので、任意のmで拡張が一意となる$\hat{h}^\infty$の元は、そのS上への制限に$C_{\mathbb{R}}(S)$上への拡張をあてはめても同じ値に(一意に)なる。そこで以下では$C_{\mathbb{R}}(S)$を基として

$$\left.\begin{aligned}\check{g}(m)&=\sup_{u\in\mathrm{Re}H^\infty}\{m(u)\,;\,u|_S\leqq g\}\\ \check{g}^{(L)}(m)&=\sup_{u\in\mathbb{R}\log|(H^\infty)^{-1}|}\{m(u)\,;\,u|_S\leqq g\}\end{aligned}\right\}\quad\cdots(1,3)''$$

を相手に話をしていく。

なお、$u\in A$ ならばe^uはS上で最大値をとるので、正規族の議論により$\{e^u\,;\,u\in A,\,u|_S\leqq\sup g\}$はR上Rの位相で局所同程度連続であり、$\check{g}^\circ\geqq\inf g$ゆえに$\check{g}^\circ|_R=\log\exp\check{g}^\circ|_R$ はRの位相で連続である。更に$\mathfrak{M}$のChoquet境界∂eR上の点xに対しては、任意の正数εに対して$\mathrm{Re}H^\infty$の元u_1,u_2で$u_1|_S\leqq g\leqq u_2|_S$をみたし、なおかつ$u_2(x)-\varepsilon\leqq g(x)\leqq u_1(x)+\varepsilon$となるものがとれるので、$u_1\leqq\check{g}^\circ\leqq-(-\check{g})^\circ\leqq u_2$も用い、ゆえに$\check{g}^\circ$は$\partial eR$の各点で$\mathfrak{M}$の位相で連続である。

§2. 特異調和測度の定義と性質

Rの点PとPを含む相対コンパクト領域Dをとったとき、λ^D_Pで∂D上のPを中心とする調和測度を表すとする。

$$\mathcal{F}=\{u_1\vee u_2\vee\cdots\vee u_n\,;\,u_j\in\mathrm{Re}H^\infty,\,n\in\mathbb{N}\}$$

$$\mathcal{F}^{(L)}=\{u_1\vee\cdots\vee u_n\ ;\ u_j\in\mathbb{R}\log|(H^\infty)^{-1}|,\ n\in\mathbb{N}\}$$

としたとき、特異調和函数を以下のように定義する。

Definition

P: R 上の点

μ: S 上の正の(正則)測度

としたとき、μ が P の特異調和測度であるとは、P を含む任意の相対コンパクト領域 D に対し、$d\mu \succ_{\mathcal{F}} d\lambda_P^D$. 即ち

$$\int_S F\,d\mu \geq \int_{\partial D} F\,d\lambda_P^D \quad \text{for } {}^\forall F\in\mathcal{F}$$

をみたすことをいう。特に上記の $\mathcal{F}$ を $\mathcal{F}^{(L)}$ にまでできるものを Arens-Singer 特異調和測度とよぶ。

$A\subset(\mathcal{F}^\circ\cap(-\mathcal{F}^\circ))$ であるので (A は $\mathrm{Re}\,H^\infty$, $\mathbb{R}\log|(H^\infty)^{-1}|$)、上述の測度は表現測度である。(Arens-Singer)特異調和測度の作り方としては、$C_{\mathbb{R}}(S)$ の元 g に対し、$\check{g}^\circ|_R$ は有界劣調和函数なので、

$U^\circ(g)$: $\check{g}^\circ|_R$ の最小調和優函数 (U° は U 又は $U^{(L)}$ を表す)

とすると、$C_{\mathbb{R}}(S)\ni g\longmapsto -U^\circ(-g)(P)$ は劣加法的汎函数となっている。$U^\circ(g)\geq \inf g$ ゆえ、Hahn-Banach の定理で作ったものは有界線型汎函数、即ち S 上の測度で $\int_S g\,d\mu \leq -U^\circ(-g)(P)$ 。ゆえに

$$\int_S g\,d\mu \geq U^\circ(g)(P) \quad \cdots (2,1)$$

となるので、$g\geq 0$ ならばその像は非負、即ち μ は正の測度。

$\mathscr{F}^o$の元Fに対し、$(\check{F|_S})^o \geq F$なので$U^o(F|_S) \geq F|_R$であるので、
$\int_{\partial D} F\, d\lambda_p^D \leq \int_{\partial D} U^o(F|_S)\, d\lambda_p^D = U^o(F|_S)(p) \leq \int_S F\, d\mu$ となる。

(2,1)式から(Arens-Singer)特異調和測度であることを導いたが、これは逆もいえる。

Theorem)

pをR上の点として、S上の測度μがpの(Arens-Singer)特異調和測度となる条件は、$C_{\mathbb{R}}(S)$の任意の元gに対し、(2,1)式が成立することである。

(証明)

十分性は既に述べたので必要性を示す。

Aを$\mathrm{Re}\, H^\infty, \mathbb{R}\log|(H^\infty)^{-1}|$として、$C_{\mathbb{R}}(S)$の各元$g$に対し、函数族$\{(\inf g)\vee u_1\vee\cdots\vee u_n \,;\, u_j\in A, u_j|_S\leq g, n\in N\}$はR上局所同程度連続なので、この中から連続函数$\check{g}^o$へ局所一様収束する列$\{F_n\}$がとれる。$F_n\in\mathscr{F}^o$ゆえ、$\int_S g\, d\mu \geq \int_S F_n\, d\mu \geq \int_{\partial D} F_n\, d\lambda_p^D \longrightarrow \int_{\partial D} \check{g}^o\, d\lambda_p^D$ (as $n\to\infty$)
ここでDはpを含む相対コンパクト領域である。よって、
$\int_S g\, d\mu \geq \sup_{D\subset R} \int \check{g}^o\, d\lambda_p^D = U^o(g)(p)$ となる。

(q.e.d.)

Kを$\mathcal{H}^\infty$の台空間(即ち$K=\{\varphi\in(\mathcal{H}^\infty)^*;\ \|\varphi\|=\varphi(1)=1\}$)としたとき、

$\partial_e K$:KのChoquet境界

はKのŠilov境界でもあり、更に$h^\infty|_{\partial_e K}=C_{\mathbb{R}}(\partial_e K)$，$\partial_e K$は極端非連結となっている。

K各点の$\partial_e K$への表現測度は一意になるが、R上の点p, qのときはHarnackの不等式よりHarnackの函数$P(p,q)$を用い、

$$\int_{\partial_e K} h\, P(p,q)\, d\tau_p \geq \int_{\partial_e K} h\, d\tau_q \geq \int_{\partial_e K} h \frac{d\tau_p}{P(p,q)} \quad \text{for } {}^\forall h \in C^+_{\mathbb{R}}(\partial_e K)$$

となる。ここでτ_p, τ_qは各々p, qの表現測度である。これによって、$P(p,q) \geq \frac{d\tau_q}{d\tau_p} \geq \frac{1}{P(p,q)}$となる。特に$\overline{\mathrm{supp}}(\tau_p)=\overline{\mathrm{supp}}(\tau_q)$。これより$\overline{\mathrm{supp}}(\tau_p)=\partial_e K$となる。一方、$\tau_p$は正規測度、即ち$B=\partial B$であるならば$\tau_p(\partial B)=0$となっているので、$\tau_p$の正則性から任意の可測集合Eで$\tau_p(E)=\tau_p(\mathrm{Int}E)=\tau_p(\overline{\mathrm{Int}E})$である。$\overline{\mathrm{Int}E}$の定義函数は連続なので、$L^\infty(\tau_p)=C(\partial_e K)$とみなせる。

以下R上の点pを1つ固定し、$P(q,\cdot)=\frac{d\tau_q}{d\tau_p} \in C^+_{\mathbb{R}}(\partial_e K)$とすると次のことが成立する。

<u>Lemma</u>

Pは$R \times \partial_e K$上の連続函数であり、更に任意の$\partial_e K$の元kに対し、$P(\cdot, k)$はR上の調和函数である。

(証明)

Harnackの不等式より、任意のR上の二点q_1, q_2に対して

$$\int_{\partial_e K} h P(q_1,q_2) P(q_1,\cdot)\, d\tau_p \geq \int_{\partial_e K} h\, P(q_2,\cdot)\, d\tau_p \geq \int_{\partial_e K} h \frac{P(q_1,\cdot)}{P(q_1,q_2)}\, d\tau_p \quad \text{for } {}^\forall h \in C^+_{\mathbb{R}}(\partial_e K)$$

ゆえに、$P(q_j,\cdot)$の連続性と$\overline{\mathrm{supp}}(\tau_p)=\partial_e K$も用いて

$P(g_1,g_2)P(g_1,k) \geq P(g_2,k) \geq \frac{P(g_1,k)}{P(g_1,g_2)}$ for $^{\forall}k \in \partial_e K$ となる。よって

$$\left.\begin{array}{l} P(p,g_1) \geq P(g_1,k) \geq 1/P(p,g_1) \\ \sup_{k\in\partial_e K} |P(g_1,k)-P(g_2,k)| \leq (P(g_1,g_2)-1)P(p,g_1) \end{array}\right\} \cdots (2,2)$$

となるので、PはR側で同程度連続。ゆえに$R\times\partial_e K$上Pは連続となる。

g_1を含む相対コンパクト領域Dに対し、任意のh_+^pの元hで

$$\iint h(k)P(g,k)\,d\lambda_{g_1}^D(g)\,d\tau_p(k) = \iint h(k)P(g,k)\,d\tau_p(k)\,d\lambda_{g_1}^D(g) = \int h(g)\,d\lambda_{g_1}^D(g) = h(g_1)$$

$$= \int h(k)P(g_1,k)\,d\tau_p(k)$$

よって前述と同様に$\int_{\partial D} P(\cdot,k)\,d\lambda_{g_1}^D = P(g_1,k)$ 即ち$P(\cdot,k)$は調和函数。

(q.e.d.)

このPを利用して各点での特異調和測度をうつしあうことを考えるが、そのために更に1つの命題を要する。

<u>Proposition</u>

X:実ベクトル空間

p_j:X上の劣加法的汎函数 $(1\leq j\leq n)$

φ:X上の実線型汎函数で、$\varphi \leq \sum_{j=1}^{n} p_j$ をみたす

としたとき、

φ_j:X上の実線型汎函数で、$\sum_{j=1}^{n}\varphi_j = \varphi$, $\varphi_j \leq p_j$ をみたすものがとれる。

(証明)

X^n 上の劣加法的汎函数 $\tilde{p}$ として、$X^n \ni (x_1, \cdots x_n) \xrightarrow{\tilde{p}} \sum_{j=1}^{n} p_j(x_j)$ をとると、Hahn-Banach の定理により X の部分空間 $M = \{(x, \cdots, x); x \in X\}$ 上の汎函数 $\tilde{\varphi}(x, \cdots, x) = \varphi(x)$ は X^n 全体にのびる。

$\varphi_j(x_j) = \tilde{\varphi}(0, \cdots, 0, x_j, 0, \cdots 0)$ とすると、$\varphi_j(x) \leq \sum_{l \neq j} p_l(0) + p_j(x) = p_j(x)$ で、$\sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x) = \tilde{\varphi}(x, \cdots, x) = \varphi(x)$ となり題意をみたす。

(q. e. d.)

Theorem

P : R 上の点

μ : P の (Arens-Singer) 特異調和測度

としたとき、以下のような $R \times S$ 上の函数 Q がとれる。

i) $Q(z, \cdot) \in L^{\infty}_{+}(\mu)$

ii) $Q(z, \cdot) d\mu$ は z の (Arens-Singer) 特異調和測度となる。

iii) 任意の $L^{\infty}_{\mathbb{R}}(\mu)$ の元 h に対して $\int_S h Q(z, \cdot) d\mu$ は R 上の調和函数で、$\mathrm{ess.inf}\, h \leq \int_S h Q(z, \cdot) d\mu \leq \mathrm{ess.sup}\, h$ である。

iv) 任意の $C_{\mathbb{R}}(S)$ の元 g に対し、$\partial_e R$ の各点に ($\mathfrak{M}$ の位相で) 連続にのび、そこで g に一致する。ゆえに特に

$\inf g = \inf_z \int_S g Q(z, \cdot) d\mu$, $\sup g = \sup_z \int g Q(z, \cdot) d\mu$

(証明)

$\mathcal{D} = \{\{O_j\}_{j=1}^{n}; \partial_e K$ の有限分割で、各 O_j は空でない開かつ閉集合$\}$

という族に対して"細分"で順序を入れる。即ち．

$\{O_j\}_{j=1}^{n} < \{O'_\ell\}_{\ell=1}^{N} \Leftrightarrow$ 任意のO'_ℓがあるO_jに含まれる　。

これにより$(\mathcal{D}, <)$は有向集合となる。

各分割$\{O_j\}_{j=1}^{n}$に対し$C_{\mathbb{R}}(S)$上の劣加法的汎函数

$C_{\mathbb{R}}(S) \ni g \longmapsto -\int_{O_j} U^{\rho}(-g)\, d\tau_p$　を考えると、$\int_S g\, d\mu \leqq -U^{\rho}(-g)(p)$ゆえ

$\int_S g\, d\mu = \sum_{j=1}^{n} \int_S g\, d\mu_j$ ，$\int_S g\, d\mu_j \leqq -\int_{O_j} U^{\rho}(-g)\, d\tau_p$ 即ち $\int_S g\, d\mu_j \geqq \int_{O_j} U^{\rho}(g)\, d\tau_p$

を任意の$C_{\mathbb{R}}(S)$の元gに対してみたすS上の測度μ_jがとれる。

これらは正の測度ゆえ、$d\mu_j = h_j\, d\mu$，$\sum_{j=1}^{n} h_j = 1$ なる$L^{\infty}_{+}(\mu)$ の函数h_jがある。

分割毎に$O_j \ni k_j$を各々固定しておき、$P_j(z) = P(z, k_j)$ とおく。すると(2,2)より $\rho(p, z) \geqq \sum_{j=1}^{n} P_j(z) h_j \geqq \frac{1}{\rho(p, z)}$　となる。

ところで$E_z = \{f \in L^{\infty}(\mu) ; \|f\| \leqq \rho(p, z)\}$は汎弱コンパクトなので．部分有向点族をとって$\{\sum_{j=1}^{n} P_j(z) h_j\}_{z \in R} \longrightarrow \{Q(z, \cdot)\} \in \prod_{z \in R} L^{\infty}(\mu)$ と上述の位相で収束するとしてよい。すると再び(2,2)を用いて．

$$\begin{aligned} &\rho(p, z) \geqq Q(z, m) \geqq 1/\rho(p, z) \quad \text{for } \mu\text{-a.e.}\, m \\ &\|Q(z_1, \cdot) - Q(z_2, \cdot)\| \leqq (\rho(z_1, z_2) - 1)\, \rho(p, z_1) \end{aligned} \qquad \cdots (2,2)'$$

ゆえにQのGel'fand変換$\hat{Q}$は$R \times \mathfrak{M}(L^{\infty}(\mu))$上の連続函数である。($\mathfrak{M}(L^{\infty}(\mu))$は$L^{\infty}(\mu)$のmaximal ideal space)

任意のR上の点zに対し、それを含む相対コンパクト領域Dをとると．$\int_{\partial D} \sum_j P_j(w) h_j(k)\, d\lambda_z^D(w) = \sum_j P_j(z) h_j(k)$ であり．(2,2)式より任意の正数εに対し十分各成分の直径の小さい∂Dの分割

$\{E_\ell\}_{\ell=1}^N$をとると．各E_ℓからz_ℓをとって．任意の$\{O_j\}_{j=1}^n$で
$\|\sum_{j,\ell} P_j(z_\ell)\lambda_z^D(E_\ell)h_j - \sum_j P_j(z)h_j\| \leqq \varepsilon$ となる。また．$\hat{Q}$の連続性から
$\{E_\ell\}$をさらに細かく分けて．$|\int_{\partial D}\hat{Q}(\cdot,\hat{m})d\lambda_z^D - \sum_\ell \hat{Q}(z_\ell,\hat{m})\lambda_z^D(E_\ell)| \leqq \varepsilon$ と
できる。前者の極限をとると、$\|\sum_\ell Q(z_\ell,\cdot)\lambda_z^D(E_j) - Q(z,\cdot)\| \leqq \varepsilon$ ゆ
えに $|\int_{\partial D}\hat{Q}(\cdot,\hat{m})d\lambda_z^D - \hat{Q}(z,\hat{m})| \leqq 2\varepsilon$ となる、即ち$\hat{Q}(\cdot,\hat{m})$は調
和函数である。これより$L^\infty_R(\mu)$の元hに対して、

$$\int_{\partial D}\int_S hQ(w,\cdot)d\mu d\lambda_z^D(w) = \int_{\partial D}\int_{\hat{S}}\hat{h}\hat{Q}(w,\cdot)d\hat{\mu}d\lambda_z^D(w) = \int_{\hat{S}}\hat{h}\int_{\partial D}\hat{Q}(w,\cdot)d\lambda_z^D(w)d\hat{\mu}$$
$$= \int_{\hat{S}}\hat{h}\hat{Q}(z,\cdot)d\hat{\mu} = \int_S hQ(z,\cdot)d\mu$$

即ち $\int_S hQ(z,\cdot)d\mu$ は調和函数。
さて．$C_R(S)$の元gに対して $\int_S g\sum_j P_j(z)h_j d\mu \geqq \sum_j\int_{O_j} U^\circ(g)P_k(z)d\tau_p$ ゆえ、
両辺とも極限をとれば、$\int_S gQ(z,\cdot)d\mu \geqq U^\circ(g)(z)$ 即ち$Q(z,\cdot)d\mu$は
zの(Arens-Singer)特異調和測度である。これは特に確率
測度なので、以上のことより i)~iii)まではいえた。
iv)は．$\check{g}(z) \leqq U^\circ(g)(z) \leqq \int_S gQ(z,\cdot)d\mu \leqq -U^\circ(-g)(z) \leqq -(\check{-g})(z)$より従う。

(q.e.d.)

§3. $\mathfrak{M}$上"必然"的に連続となる有界調和函数、即ち Hahn-Banachの拡張が一意となる函数族について

上述の定理によって．任意の(Arens-Singer)特異調和測度
μ_0に対し．

$\{\mu_z$:(Arens-Singer)特異調和測度；$z\in R$, $R\ni{}^\forall w_1, w_2$で$\mu_{w_1}\sim\mu_{w_2}\}\ni\mu_0$
というものがとれる。($\mu_1\sim\mu_2 \Leftrightarrow \mu_1$と$\mu_2$が互いに絶対連続)

これを用いて次のような命題が成り立つ。

Proposition

g：S上の実連続函数

としたとき、$\check{g}^{\circ}$がR上調和函数となる条件は、$\{u\in A; u|_S<g\}$の中の函数列$\{u_n\}$で、R上各点で$\check{g}^{\circ}$に収束するものがとれることである。(A：$\mathrm{Re}H^{\infty}$ 又は $\mathbb{R}\log|(H^{\infty})^{-1}|$)

(証明)

十分性は正規族の話より、$\{e^{u_n}\}$はR上局所一様に$e^{\check{g}^{\circ}}$へ収束するが、$e^{\check{g}^{\circ}}\geq \exp\inf g>0$ ゆえ、$\{u_n\}$も局所一様収束する。ゆえに$\check{g}^{\circ}$は調和函数である。

次に必要性を示そう。$A\cup\{g\}$の線型包上の実線型汎函数φで、$\varphi(u)=u(P)$，$\varphi(g)=\check{g}^{\circ}(P)=U^{\circ}(g)(P)$となるR上の点Pがあるものをとると、$\varphi(-g)=-U^{\circ}(g)(P)$，$\varphi(g)\leq -U^{\circ}(-g)(P)$ なのでHahn-Banachの定理によって$C_{\mathbb{R}}(S)$上の汎函数に$\varphi(g')\leq -U^{\circ}(-g)(P)$でのびる。すると、(2,1)式を導いたのと同じく、φをS上に表現した測度μは(Arens-Singer)特異調和測度となる。

$\{u\in A; u|_S\leq g\}$から、点Pで$\check{g}^{\circ}(P)$に収束する列$\{u_n\}$をとると、$\lim_{n\to\infty}\int_S|g-u_n|d\mu=\lim_{n\to\infty}\left(\int_S g\,d\mu-\int_S u_n d\mu\right)=\lim_{n\to\infty}(\check{g}^{\circ}(P)-u_n(P))=0$ ゆえ、$\{u_n\}$はgに$L^1(\mu)$で収束する。よって(2,2)′よりμに対応したQを用いて、$\check{g}^{\circ}(P)\geq \lim_{n\to\infty}\int_S u_n Q(z,\cdot)d\mu=\int_S gQ(z,\cdot)d\mu\geq U^{\circ}(g)(P)\geq \check{g}^{\circ}(P)$となる、

即ち $u_n(z) \to \check{g}^0(z)$ (for $\forall z \in R$) となる。

(q.e.d.)

なお、上の証明からこの状況ではうまい(Arens-Singer)特異調和測度 μ を用いて、$\check{g}^0(z) = U^0(g)(z) = \int g Q(z,\cdot) d\mu$ とできる。

上の命題を用いて以下の定理が導かれる。

Theorem

R:リーマン面

$\mathfrak{M}$:$H^\infty(R)$ の maximal ideal space

S:$\mathfrak{M}$ の Šilov 境界

としたとき、$C(S)$ 上への $\mathfrak{M}$ の各元の(双対空間としての)ノルムを保つ拡張のやり方によらず、各元に対する値が変わらない $C_R(S)$ の元 g の条件は、

$\sup\{\mathrm{Re} f(z) ; f \in H^\infty, \mathrm{Re} f|_S \leq g\}$ が R 上の調和函数

となっていることである。

(証明)

必要性は、拡張の一意性の条件が $\check{g} = -(\check{-g})$ であり、この等号の左辺が劣調和、右辺が優調和ゆえ、$\check{g}$ は調和函数となる。

十分性は、前命題で作った $\{u_n\}$ に対し $(H^\infty)^{-1}$ の元 F_n を、$|F_n|$ が e^{u_n} となるようにとると、正規族の議論により部分列をとっ

てF_nがR上局所一様にH^∞の元Fに収束する。

$|F|$はR上$\exp\check{g}$に一致し、$\check{g}$は$\partial_e R$の各点で連続であり、そこでgに一致するので、$\mathfrak{M}$上の連続函数$|F|$は$\overline{\partial_e R}$. 即ちS上でe^gに一致する。

$\check{g} \geq \inf g$ゆえ$F \in (H^\infty)^{-1}$であるが、任意の正の数tに対して、tgも条件をみたすので同様に作った函数をF_tとおく。

$\mathfrak{M}$の各元mとそのS上の二つの表現測度μ_1, μ_2をとると、

$$1 = |m(F_t \cdot F_t^{-1})| = |m(F_t)||m(F_t^{-1})| \leq \int_S |F_t| d\mu_1 \int_S |F_t|^{-1} d\mu_2 = \int_S e^{tg} d\mu_1 \int_S e^{-tg} d\mu_2$$

さて、$e^{sg} = 1 + sg + O(s^2\|g\|^2)$ $(\text{as } \mathbb{R} \ni s \to 0)$ なので、上式より、

$\int_S tg\, d\mu_1 - \int_S tg\, d\mu_2 + O(t^2\|g\|^2) \geq 0$ ゆえに$\int_S g\, d\mu_1 \geq \int_S g\, d\mu_2$となる。$\mu_1, \mu_2$は任意であったので役割を入れかえても成立する。再び任意性から結局、mの任意の二つのS上への拡張の測度表現μ_1, μ_2に対し、$\int_S g\, d\mu_1 = \int_S g\, d\mu_2$となる。

(q. e. d.)

(C,2)を基にした場合、上に有界な函数の局所一様収束先を$\mathfrak{M}$上の函数として"自然"な見方ができないので、上述の定理の十分性の側は、同じ論法でいくには$\{u_j\}$の列は$u_j = \frac{1}{n_j}\log|f_j|$で、$\varlimsup_{j\to\infty} n_j < \infty$となるもの、即ち$\{u_j\}$として、$\{\frac{1}{n}\log|f_j| ; f_j \in (H^\infty)^{-1}\}$の形でとれる必要があるが、その結果としては$\check{g} = \frac{1}{n}\log|F|$となってしまう。(0,1)を基とした場合の強みは、$\mathrm{Re}\, H^\infty$の元uから$|F_u| = e^u$

で作った$F_u\in(H^\infty)^{-1}$が任意乗根をもつことにある。この状況を明解に反映した結果として次の定理をあげておく。

Theorem1

h^∞の元uが、$\mathfrak{M}$の任意の元におけるノルムを保つ双対空間としての拡張に対して、各元毎に拡張によらず一意に定まる条件は、uが共役調和函数をもつことである。

(証明)

必要性は、前定理の証明より、$|F|=e^u$となる$F\in(H^\infty)^{-1}$をとると、Fは任意の正の数tに対しても乗根F_tがとれるので、uは共役調和函数$\arg F$をもつ。

十分性を示すには、まず$F_t=\exp t(u+i{}^*u)$ (tは実数, ${}^*u$はuの共役調和函数)とおくと、$u=\log|F_1|$で$\mathfrak{M}$上の連続函数とみなせる。

前述のように$\check{u}\leq(\widecheck{u|_S})$であるが、$H^\infty$の元$f$で$\mathrm{Re}f|_S\leq u|_S$となるものをとると、$R$上の点$z$のArens-Singer測度で測ったとき$|e^f/F_1|\,|_S\leq 1$ゆえ、$\mathrm{Re}f(z)\leq u(z)$となる。即ち$\check{u}=(\widecheck{u|_S})$である。ゆえに$R$上$(\widecheck{u|_S})\leq u$である。

逆向きを示すのに、Rの点zに対して簡単のため$u(z)=0$, $F_t(z)=1$とすると、$Q_t=\frac{F_t-1}{t}$ $(t>0)$は$\mathrm{Re}\,Q_t\leq\frac{e^{tu}-1}{t}$, $\mathrm{Re}\,Q_t(z)=0$。

ところで $\frac{e^{tu}-1}{t}$ は一様に u へいく (as $t \to 0$) ので、結局 $\check{u}(z)=0$

となる。即ち R 上 $u \leq \check{u} \leq (\widecheck{u|_S})$

よって $(\widecheck{u|_S})$ は調和函数に R 上でなっているので前定理より

$(\widecheck{u|_S}) = -(\widecheck{-u|_S})$ となる。

ゆえに R 上 $\check{u} = (\widecheck{u|_S}) = -(\widecheck{-u|_S}) = -(\widecheck{-u})$ となり、拡張は一意となる。

(q.e.d.)

(注) $C_R(S)$ の任意の元の拡張が一意となるときは、$H^\infty(R)$ は単位円板のそれと algebra として同型となることが知られている。(松岡[1])

参考文献

[1] 松岡長一郎 「Bounded harmonic …」 (J. Math. Kyoto Univ. 22-1 175-190 (1982))

[2] K. Hoffman 「Analytic functions …」 (Acta. Math. 108 (1962) 271-317)

[3] T.W. Gamelin 「The Shilov boundary …」 (Amer. J. Math. 96 (1974) 79-103)

[4] 〃 「Uniform algebras and Jensen Measures」 (London Math. Soc. Lect. Notes Ser. 32 (1978))