数理解析研究所講究録
第 825 巻 1993 年 89-94

正則関数の空間上の Fredholm 作用素について

東京医科大学　　羽鳥　　理 (Osamu Hatori)

序。H. J. Schwartz [4] は単位円板Δ上の Hardy 空間 H^2上の合成作用素 C_φが可逆であることと、φ がΔ上の conformal automorphism であることが同値であることを示した。J. A. Cima, J. E. Thomson and W. R. Wogen [2] は、H^2上の Fredholm 合成作用素は可逆なものに限ることを示した。よって H^2上の合成作用素 C_φについて、Fredholm 作用素であることと、可逆であることと conformal automorphism であることは皆同値である。さらに、P. S. Bourdon [1] は同様の結果がΔ上の H^p、円板環、Bergman 空間等についても成立すると述べている。ここでは、もっと一般的な空間について 3 条件の関係について調べてみたい。

1。Dを解析多様体で A は $H(D)$ (: D上の正則関数全体) の部分空間とする。正則写像$\varphi : D \to D$はすべての $f \in A$ にたいして $f \circ \varphi \in A$ となるものとする。このとき

$$C_\varphi : A \to A$$

を $C_\varphi(f) = f \circ \varphi$ により定義し A 上の合成作用素と呼ぶ。A が Banach 空間で C_φが有界のとき、$\dim \ker C_\varphi < \infty, \dim A/C_\varphi(A) < \infty$ であるとき C_φは Fredholm であるという (以後、(F) と略す)。一般に、(F)、可逆であること (以後、(I) と略す) と、φ が Dから Dへの双正則写像であること (以後、(A) と略す) の間の関係は次のようである。

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

i) (I) $\Longrightarrow$ (F)、ii) (F) $\not\Longrightarrow$ (I)、iii) (I) $\not\Longrightarrow$ (A)、iv) (A) $\not\Longrightarrow$ (F)

よって、(F) と (A) や (I) と (A) はそれぞれ必要条件でも十分条件でもない。

例 1. $\Delta = \{z \in C : |z| < 1\}$、$\varphi(z) = \frac{2z+1}{z+2}$ とする。Δ上の点列 $\{z_n\}$ を $z_0 = 0,\ z_{n+1} = \varphi(z_n)(n = 0, 1, 2, \ldots)$ により定義する。すると、$\{z_n\}$ は *Blaschke* の条件$\sum(1 - |z_n|) < \infty$ を満たしている。次に、

$$A = \{f \in H^\infty(\Delta) : f(z_n) = 0, n = 1, 2, \ldots\}$$

と定めると A は一様ノルムに関する **Banach**空間である。ここで、$H^\infty(\Delta)$ はΔ上の有界正則関数全体よりなる **Hardy**環である。すると C_φは A 上の合成作用素であって $\dim A/C_\varphi(A) = 1$ である。よって C_φは **Fredholm** であって可逆でない。

例 2. Δ、φ は例 1 と同じで$\bar{\Delta} = \{z \in C : |z| \leq 1\}$ とする。Δの境界$\partial\Delta$上の点列 $\{z_0^{(k)}\}_{k=1}^\infty$ は、m、n、k_1、k_2にたいして$\varphi^m(z_0^{(k_1)}) \neq \varphi^n(z_0^{(k_2)})$ を満たしているものとする。ただし、φ^mはφ の m 回の合成$\varphi \circ \cdots \circ \varphi$ を表す。各 kにたいして $z_n^{(k)} = \varphi^n(z_0^{(k)})$ と定める。$\bar{\Delta}$上の円板環（$\bar{\Delta}$上解析的多項式で一様近似できる連続関数全体）を $P(\bar{\Delta})$ で表す。

$$A = \{f \in P(\bar{\Delta}) : f(z_n^{(k)}) = 0, n = 1, 2, \ldots k = 1, 2, \cdots\}|\Delta$$

と定める。このとき、C_φは A 上の合成作用素であって $\dim A/C_\varphi(A) = \infty$ である。よってこれはφ がΔ上の双正則写像であるが C_φは **Fredholm** とならないような例を与えている。

例 3. φ、$\{z_n\}$ は例 1 と同じものとする。$D = \Delta \setminus \{z_n\}$ とする。$A = H^p|D$とする。ただし、H^pはΔ上の **Hardy** 空間である。すると、$\psi = \varphi^{-1}|D$に対して C_ψは A 上の可逆な合成作用素であるが$\psi(D) = D \setminus \{0\}$ である。つまりψは D上の双正則写像ではない。

例4．$D=\{z\in\Delta : Rez>0\}$としφは例1と同じとする。$A=H^p|D$とする。このとき、C_φは可逆であるがφはD上の双正則写像ではない。

例3、例4は一見特殊な例にも見えるが、次の定理1の(a)、(b)の特別な場合になっている。以下では、Banach空間とは限らない正則関数の空間を扱う。さらに、(F′)で条件$\dim A/A\circ\varphi<\infty$を表す。$A$がBanach空間のときは(F)→(F′)である。

定理1．Ωはn次元解析多様体でDはその相対コンパクトな領域で次を満たすものとする：DのΩにおける境界∂Dの各点zとzのΩの開近傍Vにたいして$V'\subset V$で$V'\cap D$が連結であるようなzの開近傍V'が存在する。　Aは$H(D)$：D上の正則関数全体の部分空間で次の2条件1)、2)を満たすものとする。

1）Aのn個の直積$A^n=\{(f_1,\ldots,f_n): f_i\in A\}$の中の列$\{F^{(i)}\}_{i=1}^\infty$で各$F^{(i)}$は$\Omega$まで正則に拡張できて、$\{F^{(i)}\}_{i=1}^\infty$から作った任意の一次結合$\sum a_i f^{(i)}$に対して$D$の開集合$U$が存在して、$\sum a_i F^{(i)}$はその上で単葉となる。

2）Dの任意の有限集合Kに対して

$$\dim A|K = K\text{の要素の個数}$$

が成立する。

φはDからDへの正則写像で$A\circ\varphi\subset A$、$\dim A/A\circ\varphi<\infty$を満たすとする。すると、$\varphi$は単葉になる。さらに、次の*(a)*または*(b)*が成立する。

(a) Dの *thin set* E(空集合にもなりうる）が存在して、φはDから$D\setminus E$の上への双正則写像である。

(b) ∂Dの点z_0とz_0の（Ωでの）開近傍V_{z_0}と正則関数$\tilde{\varphi}: D\cup V_{z_0}\to D$で$\tilde{\varphi}|D=\varphi$なるものが存在する。

注) $\Omega = C^n$、A が各座標関数 $z_1, \ldots, z_n$ の多項式を含んでいるときは、$F^{(i)} = (z_1^i, \ldots, z_n^i)$ と考えれば1) は満たされ、また、2) も成立する。(ちなみに、定理1において A が定数関数を含んでいる場合は A が D の点を分離することと要素が2つの K について2) の等式が成立することは同値である。よって、例3、例4の A は定理1の条件を満たしている。

略証: まず、2) などより φ が D 上単葉であることがわかる。そこで、(a) または (b) が成立することを示す。まず、$\dim A/A \circ \varphi < \infty$ より $\dim A^n/A^n \circ \varphi = l < \infty$ となるので $u = (u_1, \ldots, u_n) \in A^n$ と $(a_1, \ldots, a_{l+1}) \in C^{(l+1)}$ で

$$\sum_{i=1}^{l+1} a_i F^{(i)} = u \circ \varphi$$

となるものが存在する。$f = \sum a_i F^{(i)}$ とおく。つまり $f = u \circ \varphi$ である。

$$M = \{z \in D : z \text{の } D \text{内の開近傍 } U_z \text{ と } C^n \text{ の領域 } \Phi \text{ と } \Phi \text{ から } U_z \text{ への双正則写像 } \zeta \text{ が存在して } \det\left(\frac{\partial u_i \circ \zeta}{\partial w_j}\right) \circ \zeta^{-1}(z) = 0\}$$

とおく。ただし、$\det\left(\frac{\partial u_i \circ \zeta}{\partial w_j}\right)$ は Φ の座標系 $(w_1, \ldots, w_n)$ に関する $(u_1 \circ \zeta, \ldots, u_n \circ \zeta)$ の complex Jacobian である。すると、M は (Φ、ζ の選び方によらず) well-defined である。1) より f は D のある開部分集合上単葉なので $M = D$ とはなりえず、よって M は D の thin set (空集合の場合も含めて) である。つぎの2つの場合を考察する。

a) $\partial(D \setminus \varphi(D)) \subset M$ (ここでは、∂ は $D \setminus \varphi(D)$ の D における境界を意味する。)

b) $\partial(D \setminus \varphi(D)) \not\subset M$.

a) の場合が (a) に対応し、b) が (b) に対応する。まず a) の場合は $D \setminus M$ が連結であることから $D \setminus \partial(D \setminus \varphi(D))$ も連結となりこのことから $D \setminus \varphi(D) = \partial(D \setminus \varphi(D))$ となっ

てよって $D\setminus\varphi(D)\subset M$である。そこで $E=D\setminus\varphi(D)$ とおけば Eは thin set でφ は Dから $D\setminus E$への双正則写像となる。次に、b）の場合を考える。この場合は $w_0\in\partial(D\setminus\varphi(D))$ と w_0の D内での開近傍 U_{w_0}で $u|U_{w_0}$が U_{w_0}より $u(U_{w_0})$ への双正則写像となるようなものが存在する。$\{w_n\}$ を$\varphi(D)\cap U_{w_0}$の点列で $w_n\to w_0$なるものとする。φ が単葉なので $z_n=\varphi^{-1}(w_n)$ が well-defined で $z_n\to z_0$なる $z_0\in\partial D$が存在すると仮定して一般性を失わない。条件1）より fはΩ上の正則写像$\tilde{f}$に拡張される。すると$\tilde{f}(z_n)=u\circ\varphi(z_n)=u(w_n)$ より$\tilde{f}(z_0)=u(w_0)$ となる。$V=\tilde{f}^{-1}(u(U_{w_0}))$ とおくと、u が U_{w_0}で単葉なので $u(U_{w_0})$ が開集合となる。よってVは z_0の開近傍となる。Dに関する条件より z_0の開近傍 V_{z_0}で $V_{z_0}\subset V$、$V_{z_0}\cap D$は連結なるものが存在する。そこで$\varphi_0:V_{z_0}\to D$を$\varphi_0(z)=(u|U_{w_0})^{-1}\circ\tilde{f}(z)$ により定めるとφ_0は正則で $V_{z_0}\cap D$が連結なので$\varphi_0|V_{z_0}\cap D=\varphi|V_{z_0}\cap D$となる。そこで

$$\tilde{\varphi}=\begin{cases}\varphi(z), & z\in D\\ \varphi_0(z), & z\in V_{z_0}\end{cases}$$

とおけば$\tilde{\varphi}$は $V_{z_0}\cup D$で well-defined な正則関数で$\tilde{\varphi}=\varphi$ となる。

定理1より Schwartz[4]、Cima-Thomson-Wogen[2] と同様な結果が広い範囲の空間に対して成立することが分かる。

系1．Dは *compact bordered Riemann* 面または *polydisc* または C^2級の強擬凸領域とする。D上の正則関数からなる *Banach* 空間 A が $A\supset H(D)\cap C(\bar{D})$ を満たし、Dから Dへの任意の双正則写像ψについて $A\circ\psi\subset A$ であるとする。ただし、$C(\bar{D})$ は Dの閉包（*compact bordered Riemann* 面のときは $D\cup(D$の *borders*)）上の複素値連続関数全体である。φ が Dから Dへの正則写像で $A\circ\varphi\subset A$ とするとき、*(F′)*、*(F)*、*(I)*、*(A)* は互いに同値である。

略証: まず (I) $\Longrightarrow$ (F)、(F) $\Longrightarrow$ (F′) は自明である。次に、(F′) $\Longrightarrow$ (A) を示す。A は

定理 1 の条件を満たすことが分かりそのことより (a) または (b) が成立する。一方 $A \supset H(D) \cap C(\bar{D})$ なので各 $z \in \partial D$に対して $\dim A/B_z = \infty$ となる。ここで $B_z = \{f \in A : f$ は zで正則 $\}$ である。このことから実は (b) は起こり得ないことが分かる。さらに、この系の Dにおいては Dと $D \setminus E$が双正則同値となる thin set Eは空集合に限ることが分かる。つまり (A) が成立する。最後に (A) $\Longrightarrow$ (I) は A が D上の双正則写像に関して不変であることから分かる

系 1 の条件を満たす A は例えば H^p $(0 < p \leq \infty)$、Bergman 空間、Bloch 空間等たくさんある。

References

1. P. S. Bourdon, *Fredholm multiplication and composition operators on the Hardy space*, Integral Eq. and Operator th. **13** (1990), 607–610.
2. J. A. Cima, J. E. Thomson and W. R. Wogen, *On some properties of composition operators*, Indiana Univ. Math. J. **24** (1974), 215–220.
3. O. Hatori, *Fredholm composition operators on a space of holomorphic functions*, preprint.
4. H. J. Schwartz, *Composition operators on H^p*, Thesis, University of Toledo, 1969.