

## Parreau-Widom 型領域上の解析について

— M.V. Samokhin の研究の紹介 —

茨城大理 荷見 守助 (Morisuke Hasumi)

### 1. はしがき

この小文では M.V. Samokhin の一般平面領域に関する最近の一連の研究について紹介する。ここでは Forelli に始まる条件付き期待値作用素の Hardy 族研究への応用が Parreau-Widom 型の場合まで奇麗に展開されてゐる。平面領域に特有な性質を証明に利用する処もあり、一般の Riemann 面への拡張がどの程度まで可能かは検討に値すると思はれる。

### 2. 極値函数

$D$  を複素球面上の領域とし、 $\pi: \Delta \rightarrow D$  を単位開円板からの普遍被覆写像とする。また、 $G$  を写像  $\pi$  に付随した被覆変換の群とする。さて、 $\Gamma$  を  $D$  の基本群  $\pi_1(D)$  の指標とすると、 $H^\infty(D, \Gamma)$  により  $D$  上の乗法的正則函数  $f$  で対応する指標が  $\Gamma$  に等しいものの全体を表す。我々は  $H^\infty(D, \Gamma) \neq \{0\}$  なる仮定の下で極値問題

$$(1) \quad |f^*(z)| = \sup\{|f(z)| : f \in H^\infty(D, \Gamma), \|f\| \leq 1\}$$

を考へる。ここで  $z$  は  $D$  内の任意の定点である。正規族の論法を使へばこのやうな

函数  $f^* \in H^\infty(D, \Gamma)$  が存在することが分かる.

1. 補題 ([S1; Lemma 1])  $E$  を空でない  $D$  の部分集合とし,  $B$  を  $E$  上の全ての複素数値有界函数の作る環で sup-norm  $\|\cdot\|_E$  を持つものとする. 更に,  $\alpha \in B$  を  $\|\alpha\|_E \leq 1$  なるやうに選ぶ. いま, 或  $\zeta \in D \setminus \bar{E}$  に対し函数  $h_\zeta \in H^\infty(D)$  で

$$|h_\zeta(\zeta)| > 1 \quad \text{且つ} \quad \|h_\zeta \alpha\|_E \leq 1$$

を満たすものが存在すると仮定する.  $X$  を  $D \setminus \bar{E}$  の連結成分で点  $\zeta$  を含むものとするれば,  $X$  の任意の点  $\xi$  に対して函数  $h_\xi \in H^\infty(D)$  で  $|h_\xi(\xi)| > 1$  及び  $\|h_\xi \alpha\|_E \leq 1$  を満たすものが存在する.

証明 先づ, もし  $\|\alpha\|_E = q < 1$  ならば, 任意の  $\xi \in X$  に対して  $h_\xi = 1/q$  とおけばよいから, 補題は明らかである. よって, 以下では  $\|\alpha\|_E = 1$  を仮定する.

さて,  $T = \{\xi \in X : \exists h_\xi \in H^\infty(D) \ni |h_\xi(\xi)| > 1 \text{ 且つ } \|h_\xi \alpha\|_E \leq 1\}$  とおく. 先づ,  $\zeta \in T$  であるから, 集合  $T$  は空ではない. 我々が証明すべきことは  $T = X$  である. 定義式より  $T$  が開集合であることは簡単に分かるから, 補集合  $X \setminus T$  も開集合であることを示せばよい. そこで,  $a \in X \setminus T$  を任意に取る. このときは, 条件  $\|h\alpha\|_E \leq 1$  を満たす全ての  $h \in H^\infty(D)$  に対して  $|h(a)| \leq 1$  が成り立つ. 従って, 対応  $h\alpha \mapsto h(a)$  は部分空間  $\alpha \cdot H^\infty(D)|_E$  上の有界な線型汎函数である. これを Hahn-Banach の定理によって空間  $B$  までノルムを保って拡大し  $m$  と書く. 従って,  $\|m\| \leq 1$  である.  $B$  は Banach 環でもあり, その極大イデアル空間を  $M$  とすれば,  $B$  は  $M$  上の全ての連続函数の環  $C(M)$  と自然に等距離同型である. よって, 上で得られた線型汎函数  $m$  は  $M$  上の測度で表される. この測度をまた同じ記号  $m$  で表す. 即ち,

$$(2) \quad h(a) = \int_M \widehat{h\alpha} \, dm \quad (\forall h \in H^\infty(D))$$

且つ,  $\int_M |dm| = \|m\| \leq 1$  である. 但し,  $\hat{h}$  は  $h|_E \in B$  の Gelfand 変換である. ここで特に  $h \equiv 1$  としてみれば,

$$1 = h(a) \leq \int_M |\hat{\alpha}| |dm| \leq \int_M |dm| \leq 1$$

を得るから,  $\|m\| = 1$  となり, 上の不等式から測度  $m$  の台は集合  $K = \{|\alpha| = 1\}$  に含まれることが分かる. そこで  $d\rho := \hat{\alpha} dm$  とおく. このときは (2) より

$$h(a) = \int_M \hat{h} d\rho \quad (\forall h \in H^\infty(D)).$$

次に, 函数  $f(z, \xi) := (z-a)/(z-\xi)$  を考へる. もし  $\xi$  が  $a$  に十分近ければ, 1 変数の函数  $z \mapsto f(z, \xi)$  は  $E$  上で有界である. 即ち,  $f(\cdot, \xi) \in B$  であるから,

$$F(\xi) := \int_M \hat{f}(\cdot, \xi) d\rho$$

は確定である. Gelfand 変換の性質から

$$\begin{aligned} \|\hat{f}(\cdot, \xi) - \hat{f}(\cdot, \xi')\| &\leq \|f(\cdot, \xi) - f(\cdot, \xi')\|_E \\ &= |\xi - \xi'| \left\| \frac{z-a}{(z-\xi)(z-\xi')} \right\|_E \rightarrow 0 \quad (\xi' \rightarrow \xi) \end{aligned}$$

が得られるから,  $F(\xi)$  は  $a$  の近くで連続で  $F(a) = 1$  となる. これから, 点  $a$  の近傍  $U$  を小さくとれば,  $F(\xi) \neq 0$  ( $\forall \xi \in U$ ) となる. いま,  $\xi \in U$  を1つ固定する. 任意の  $h \in H^\infty(D)$  に対して

$$g(z) := (h(z) - h(\xi)) \cdot \frac{z-a}{z-\xi} = (h(z) - h(\xi)) \cdot f(z, \xi)$$

とおけば, これは  $H^\infty(D)$  の元であるから,  $\int_M \hat{g} d\rho = g(a) = 0$ . Gelfand 変換を施せば,  $\hat{g} = (\hat{h} - h(\xi))\hat{f}(\cdot, \xi)$ . よって,

$$\int_M \hat{h} \cdot \hat{f}(\cdot, \xi) d\rho = h(\xi) \int_M \hat{f}(\cdot, \xi) d\rho = h(\xi) \cdot F(\xi).$$

ここで  $h \in H^\infty(D)$  は任意であるから,  $d\mu := \frac{\hat{f}(\cdot, \xi)}{F(\xi)} d\rho$  は点  $\xi$  に対する  $H^\infty(D)|_E$

の表現測度である。

さて,  $h \in H^\infty(D)$  を  $\|h\alpha\|_E \leq 1$  なるやうに任意に取る. このときは,  $\|\widehat{h\alpha}\|_\infty \leq \|h\alpha\|_E \leq 1$  となるから, 集合  $K$  の上では  $|\widehat{h}| \leq 1$  を得る. よって,  $\xi \in U$  に対しては

$$|h(\xi)| = \left| \int_M \widehat{h} d\mu \right| = \left| \int_K \widehat{h} d\mu \right| \leq \int_K |d\mu| = \|\mu\|.$$

$K$  の上では  $|\widehat{h}| \leq 1$  であるから,  $|\widehat{h}^n| \leq 1$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) となり,

$$|h^n(\xi)| = \left| \int_K \widehat{h}^n d\mu \right| \leq \|\mu\|.$$

ここで,  $|h(\xi)| \leq \|\mu\|^{1/n} \rightarrow 1$  ( $n \rightarrow \infty$ ) であるから,  $|h(\xi)| \leq 1$  ( $\forall \xi \in U$ ). 故に,  $X \setminus T$  は開集合である.  $\square$

2. 定理 ([S1; Theorem 1])  $\Gamma$  を  $\pi_1(D)$  の指標で  $H^\infty(D, \Gamma) \neq \{0\}$  を満たすものとし,  $z \in D$  を任意に固定すると, 極値問題 (1) の解  $f^* \in H^\infty(D, \Gamma)$  は次の性質をもつ:

$$\sup_D |f^* h| = \sup_D |h| \quad (\forall h \in H^\infty(D)).$$

証明 証明は背理法によるものとし,

$$\exists h \in H^\infty(D) \ni \sup_D |f^* h| \leq 1 < \sup_D |h|$$

と仮定する. 先づ, 点  $\zeta \in D$  を  $|h(\zeta)| > 1$  なるやうに取り,  $\zeta$  と  $z$  を  $D$  内の曲線  $\gamma$  で結ぶ. 次に, 開集合  $U$  を  $\gamma \subset U \subset \bar{U} \subset D$  のやうに取り,  $E := D \setminus U$ ,  $\alpha := |f^*| \Big|_E$  とおく. このときは,

$$\sup_E \alpha |h| \leq \sup_D |f^* h| \leq 1 \quad \text{且つ} \quad |h(\zeta)| > 1$$

であるから, 補題 1 の仮定が満たされる. 従って, 点  $\zeta$  を含む  $D \setminus \bar{E}$  の連結成分を  $X$  とすれば, 任意の  $\xi \in X$  に対し  $|h_\xi(\xi)| > 1$  及び  $\sup_E |f^* h_\xi| \leq 1$  を満たす  $h_\xi \in$

$H^\infty(D)$  が存在する. ところが,  $E$  の作り方から  $z \in X$  であることが分かるから, 或  $h_z \in H^\infty(D)$  に対して  $|h_z(z)| > 1$  及び  $\sup_E |f^* h_z| \leq 1$  が成り立つ. そこで最大値の原理を適用すれば,  $\sup_D |f^* h_z| = \sup_E |f^* h_z| \leq 1$  を得る. 即ち,  $f^* h_z \in H^\infty(D, \Gamma)$  且つ  $\|f^* h_z\|_\infty \leq 1$  である. ところが,  $|f^*(z)h_z(z)| > |f^*(z)|$  であるから,  $f^*$  が極値問題 (1) の解であることに反する.  $\square$

3. 定理 ([S1; Theorem 2]) 次の5つの命題は同値である:

- (a) 任意の  $u \in L^\infty(d\theta, \mathcal{G})$  ( $u \geq \rho > 0$ ) に対し  $H \in H^\infty(\Delta, \mathcal{G})$  で  $|H(e^{i\theta})| = u(\theta)$  (a.e.  $\theta \in \partial\Delta$ ) を満たすものがある.
- (b)  $H^\infty(\Delta, \mathcal{G})$  は  $L^\infty(d\theta, \mathcal{G})$  の極大イデアル空間  $M_{L^\infty}$  の点を分離し,  $H^\infty(\Delta, \mathcal{G})$  の Shilov 境界は  $M_{L^\infty}$  に一致する.
- (c)  $D$  上の乗法的 (正則) 函数  $f$  が  $\sup_D |fh| = \sup_D |h|$  ( $\forall h \in H^\infty(D)$ ) を満たすならば,  $D$  上の全ての有界な乗法的函数  $\ell$  に対し  $\sup_D |f\ell| = \sup_D |\ell|$  が成り立つ.
- (d)  $D$  上の乗法的 (正則) 函数  $f$  が  $\sup_D |fh| = \sup_D |h|$  ( $\forall h \in H^\infty(D)$ ) を満たすならば, 合成函数  $f \circ \pi \in H^\infty(\Delta)$  は内部函数である.
- (e)  $\partial\Delta$  上の実数値可測函数  $u$  が  $\mathcal{G}$  不変で且つ  $u \geq \rho > 0$  と  $\int_0^{2\pi} \log u \, d\theta < \infty$  を満たすならば,  $\mathcal{G}$  不変な  $H \in H^\infty(\Delta)$  で  $|H(e^{i\theta})| = u(\theta)$  (a.e.  $\partial\Delta$ ) を満たすものが存在する.

証明 (a)  $\Rightarrow$  (b): Gelfand-Neumark の定理により  $L^\infty(d\theta, \mathcal{G}) \cong C(M_{L^\infty})$  であることに先づ注意する.  $\hat{u} \in C(M_{L^\infty})$  を任意の実数値函数とし,  $u \in L^\infty(d\theta, \mathcal{G})$  をこれに対応する函数とすると, 条件 (a) により  $H \in H^\infty(\Delta, \mathcal{G})$  で  $|H(e^{i\theta})| = \exp(u(\theta))$  a.e. を満たすものがある. ここで Gelfand 変換を考へれば,  $|\hat{H}| = \exp(\hat{u})$  を得る. これから (b) はすぐ分かる.

(b)  $\Rightarrow$  (c):  $f$  を  $D$  上の有界な乗法的函数で  $\sup_D |fh| = \sup_D |h|$  ( $\forall h \in H^\infty(D)$ ) を満たすものとし,  $F := f \circ \pi$  とおく. このときは,  $H = h \circ \pi \in H^\infty(\Delta, \mathcal{G})$  とおけば  $(fh)(z) = (f \circ \pi)(\xi) \cdot (h \circ \pi)(\xi) = F(\xi)H(\xi)$  ( $z = \pi(\xi), \xi \in \Delta$ ) が成り立つ. 従って,

$$(3) \quad \sup_{\Delta} |FH| = \sup_D |fh| = \sup_D |h| = \sup_{\Delta} |H| \quad (\forall H \in H^\infty(\Delta, \mathcal{G}))$$

を得る. さて,  $F = f \circ \pi$  は有界正則であるから,  $\partial\Delta$  上殆ど至る処で法線方向の境界値  $F(e^{i\theta})$  を持つ.  $|F(e^{i\theta})|$  は  $\mathcal{G}$  不変であるから,  $L^\infty(d\theta, \mathcal{G})$  に属し, 従って, Gelfand 変換  $|F|^\wedge$  が定義される. 等式 (3) を参照して次を得る.

$$\sup_{M_L^\infty} |\hat{H}| = \sup_{\partial\Delta} |H| = \sup_{\Delta} |FH| = \sup_{\partial\Delta} |F||H| = \sup_{M_L^\infty} |F|^\wedge |\hat{H}|.$$

Shilov 境界は最小の閉境界であるから, 任意の  $x \in M_L^\infty$  と  $M_L^\infty$  内での  $x$  の近傍  $U$  に対し,  $H \in H^\infty(\Delta, \mathcal{G})$  で

$$\sup_U |\hat{H}| > \sup_{M_L^\infty \setminus U} |\hat{H}|$$

を満たすものが存在する. これは函数  $|F|^\wedge$  が近傍  $U$  内の或点で値 1 を取ることを示してゐる.  $|F|^\wedge$  は連続であり  $U$  は任意であったから,  $|F|^\wedge$  は  $M_L^\infty$  上で恒等的に 1 に等しいことが示された. さて, 最後に  $D$  上の任意の有界な乗法的函数  $\ell$  を取り,  $L := \ell \circ \pi$  とおくと,  $|L|$  は  $\Delta$  上で有界且つ  $\mathcal{G}$  不変である. よって,

$$\begin{aligned} \sup_D |f\ell| &= \sup_{\Delta} |FL| = \sup_{\Delta} |F||L| = \sup_{\partial\Delta} |F||L| \\ &= \sup_{M_L^\infty} |F|^\wedge |L|^\wedge = \sup_{M_L^\infty} |L|^\wedge = \sup_{\partial\Delta} |L| \\ &= \sup_{\Delta} |L| = \sup_D |\ell|. \end{aligned}$$

これが求める結果であった.

(c)  $\Rightarrow$  (d):  $f$  は  $D$  上の零でない有界な乗法的函数で  $\sup_D |fh| = \sup_D |h|$  ( $\forall h \in H^\infty(D)$ ) を満たすものとする. 背理法により,  $F := f \circ \pi$  が内部函数ではないと仮定する. このときは,  $\partial\Delta$  の部分集合  $E$  で  $|E| > 0$  且つ  $E$  上では  $|F| \leq \delta < 1$  を満

たすものがある。函数  $|F|$  は  $g$  不変であるから  $E$  も  $g$  不変であるとしてよい。そこで

$$u(z) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \chi_E(\theta) P_z(\theta) d\theta$$

として  $L := \exp(u + iu^*)$  とおく。ここで  $u^*$  は  $u$  に共役な調和函数である。  $|L|$  は有界で  $g$  不変であるから、  $D$  上の有界な乗法的函数  $\ell$  で  $L = \ell \circ \pi$  を満たすものが存在する。このときは

$$\sup_D |f\ell| = \sup_{\Delta} |FL| = \sup_{\partial\Delta} |FL| \leq \max\{e\delta, 1\} < e$$

であるが、  $\sup_D |\ell| = \sup_{\Delta} |L| = e$  であるから、 (c) に反する。

(d)  $\Rightarrow$  (e):  $u$  を  $\partial\Delta$  上の可測で  $g$  不変な函数で  $u \geq \rho > 0$  及び  $\int_0^{2\pi} \log u d\theta < +\infty$  を満たすものとし、

$$L(z) := \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log u(\theta) \cdot \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\theta\right)$$

とおく。このとき、  $|L|$  は  $g$  不変で  $1/L$  は有界である。  $\ell := L \circ \pi^{-1}$  とおけば、  $\ell$  は  $D$  上で乗法的であるから  $\pi_1(D)$  の指標を定義する。それを  $\Gamma$  とおく。このときは、  $(1/L) \circ \pi^{-1} \in H^\infty(D, \Gamma^{-1})$ 。よって、  $H^\infty(S, \Gamma^{-1}) \neq \{0\}$  であり、指標  $\Gamma^{-1}$  に定理 1 を適用することが出来る。即ち、零でない  $f \in H^\infty(D, \Gamma^{-1})$  で  $\sup_D |fh| = \sup_D |h|$  ( $\forall h \in H^\infty(D)$ ) を満たすものが存在する。条件 (d) により  $F = f \circ \pi$  は内部函数である。これから、  $H := FL$  は  $g$  不変で且つ  $|H(e^{i\theta})| = |F(e^{i\theta})| |L(e^{i\theta})| = |L(e^{i\theta})| = u(e^{i\theta})$  a.e. を得る。

(e)  $\Rightarrow$  (a): (d)  $\Rightarrow$  (e) の証明を見れば、  $u$  が有界ならば  $L$  も有界であることが分かる。故に、 (a) が示された。  $\square$

**定義 1** 領域  $D \subset \hat{\mathbb{C}}$  が調和型であるとは、円周  $\partial\Delta$  上の可測函数  $u$  で  $u \geq \rho > 0$  と  $\log u \in L^1(d\theta, g)$  を満たすものに対し  $H \in S(\Delta, g)$  で  $|H(e^{i\theta})| = u(\theta)$  a.e. を

満たすものが存在することを云ふ。但し、 $S(\Delta, g)$  は  $\Delta$  上の  $g$  不変な Smirnov 函数全体の族を表す。

4. 定理 領域  $D$  が調和型であるための必要十分条件は  $D$  が定理 2 の同値な条件を満たすことである。

証明 先づ、もし  $D$  が調和型ならば、 $D$  は明らかに定理 2 の条件 (e) を満足する。逆に、 $D$  が定理 2 の同値な条件を満たすと仮定し、 $u$  を  $\partial\Delta$  上の  $g$  不変な函数で  $u \geq \rho > 0$  及び  $\log u \in L^1(d\theta, g)$  を満たすものとする。このときは、定理 2 の証明中の (d)  $\Rightarrow$  (e) により

$$L(z) := \exp \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log u(\theta) \cdot \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\theta \right)$$

とおけば、前に見たやうに  $H = FL$  は  $g$  不変な Smirnov 函数である。実際、 $L$  は外部函数であり、従って  $H$  は Nevanlinna 族に属する。そこで、 $H = B(S_1/S_2)h$  (但し、 $B$  は Blaschke 積、 $S_1$  と  $S_2$  は互いに素な singular function、 $h$  は外部函数である。  $H$  の形から  $S_2 \equiv 1$  であることが分かる。よって、 $H$  は Smirnov 族に入る。更に、 $|H(e^{i\theta})| = u(e^{i\theta})$  a.e. が成り立つ。故に、 $D$  は調和型である。  $\square$

### 3. Parreau-Widom 型の領域.

定義 2 Riemann 球面上の領域  $D$  が Parreau-Widom 型であるとは、基本群  $\pi_1(D)$  の任意の指標  $\Gamma$  に対し  $H^\infty(D, \Gamma) \neq \{0\}$  であることを云ふ。

5. 定理 ([W2]) 領域  $D$  について次は同値である：

(a)  $\pi_1(D)$  の任意の指標  $\Gamma$  に対し  $H^\infty(D, \Gamma) \neq \{0\}$ .

(b)  $\pi_1(D)$  の任意の指標  $\Gamma$  に対し  $H^1(D, \Gamma) \neq \{0\}$ .

(c)  $\inf_{\Gamma \in \pi_1(D)} \left[ \sup \{ |f(a)| : f \in H^\infty(D, \Gamma), \|f\|_\infty \leq 1 \} \right] > 0$ .

この同値な条件を満たす領域 (Riemann 面でもよい) を Parreau-Widom 型の領域と呼ぶ. 定義について若干の解説を加へる.  $D$  を任意の双曲型領域とすると, 任意の定点  $a$  に対しこれを極とする Green 函数  $G(z, a)$  が存在する. いま, 任意の  $\alpha > 0$  に対し  $D(a, \alpha) = \{z \in D: G(z, a) > \alpha\}$  とおき,  $D(a, \alpha)$  の第 1 Betti 数を  $B(a, \alpha)$  と書く. Widom は次のやうに定義した.

**定義 3** (Widom [W2]) 領域 (又は Riemann 面)  $D$  が Parreau-Widom 型であるとは, 1つの  $a \in D$  に対し  $\int_0^\infty B(a, \alpha) d\alpha < \infty$  が成り立つことである.

或  $a \in D$  について上の条件が成り立てば, 全ての  $a$  についても成り立つことが分かる. また, 任意の  $\alpha > 0$  に対し閉領域  $\{z \in D: G(z, a) \geq \alpha\}$  がコンパクトなるとき, この領域は (ポテンシャル論的に) 正則であると云ふ. 領域  $D$  が正則な場合には函数  $z \mapsto G(a, z)$  の危点 (critical point) の集合を  $Z(a) = \{\zeta_1, \zeta_2, \dots\}$  とおけば,  $\int_0^\infty B(a, \alpha) d\alpha = \sum_k G(a, \zeta_k)$  であるから, Widom の条件は  $\sum_k G(a, \zeta_k) < \infty$  となる. これは Parreau [P] が採用した条件である. ところが, この両者は次の意味で本質的には同等で, これが Parreau-Widom 型と呼ばれる理由である.

**6. 定理** ([H2]) 任意の Parreau-Widom 型領域は正則な Parreau-Widom 型領域から或高々可算個の点列を取り除くことで得られる.

**7. 定理** ([S1; Theorem 3]) 任意の Parreau-Widom 型領域は調和型である.

**証明**  $D$  を Parreau-Widom 型の領域とし,  $D$  上の有界な乗法的函数  $f (\neq 0)$  で  $\sup_D |fh| = \sup_D |h|$  ( $\forall h \in H^\infty(D)$ ) を満たすものを取る. 証明すべきことは  $F := f \circ \pi$  が内部函数になることである. そのために,

$$u(z) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F(e^{i\theta})| P_z(\theta) d\theta$$

として,  $L := \exp(u + iu^* - 1)$  とおく. 先づ,  $|F|$  は  $g$  不変であるから  $|L|$  も同様

である。そこで  $\varrho := L \circ \pi^{-1}$  とおけば、 $D$  上の有界な乗法函数が出来る。更に、 $\sup_D |\varrho| \leq 1$  も定義から分かる。

ここで  $\sup_D |\varrho h| = \sup_D |h|$  ( $\forall h \in H^\infty(D)$ ) を示す。このために不等式  $e^{t-1} \geq t$  ( $\forall t \in \mathbb{R}$ ) を利用する。 $|F|$  は劣調和函数であるから、 $|F(z)| \leq u(z)$  ( $\forall z \in \Delta$ ) が成り立つ。従って、 $|L| = e^{u-1} \geq u \geq |F|$  を得る。任意に  $h \in H^\infty(D)$  を取って  $H := h \circ \pi$  とおけば、

$$\sup_D |h| \geq \sup_D |\varrho h| = \sup_{\partial \Delta} |L| |H| \geq \sup_{\partial \Delta} |F| |H| = \sup_D |f h| = \sup_D |h|.$$

故に、 $\sup_D |\varrho h| = \sup_D |h|$ .

さて、函数  $\varrho$  によって定義された  $\pi_1(D)$  の指標を  $\Gamma$  とし、 $g \in H^\infty(D, \Gamma)$  を  $\|g\|_\infty \leq 1$  なるやうに任意に選ぶ。このときは、 $h := g/\varrho \in H^\infty(D)$  であるから、 $1 \geq \|g\|_\infty = \sup_D |\varrho h| = \sup_D |h|$ 。即ち、 $D$  上至る処で  $|g(z)| \leq |\varrho(z)|$  が成り立つ。

最後に  $|\varrho| \equiv 1$  を背理法で示す。仮に或点  $a \in D$  で  $|\varrho(a)| = k < 1$  であったとする。 $D$  は Parreau-Widom 型であるから、Widom の定理の (c) で決まる正数を  $m(a)$  と書く。自然数  $N$  を  $k^N < m(a)$  が成り立つ程度に大きく取る。このときは、任意の  $h \in H^\infty(D)$  に対して  $\sup_D |\varrho^N h| = \sup_D |h|$  が成り立つ。上と同様な議論を繰り返せば、任意の  $\|g\|_\infty \leq 1$  を満たす任意の  $g \in H^\infty(D, \Gamma^N)$  に対して  $|g| \leq |\varrho^N|$  が成り立つ。よって、

$$m(a) \leq \sup \{|g(a)| : g \in H^\infty(D, \Gamma), \|g\|_\infty \leq 1\} \leq |\varrho(a)^N| = k^N$$

となり矛盾である。即ち、 $|\varrho| \equiv 1$  が示された。これから  $\varrho$  は定数となり、 $\varrho(z) \equiv e^{i\alpha}$  を満たす実数  $\alpha$  が存在することが分かる。よって、 $u \equiv 1$  となり、 $\partial \Delta$  上では  $|F(e^{i\theta})| = 1$  a.e. でなければならない。これが示すべきことであつた。□

8. 定理 ([S1; Theorem 4])  $D$  を Parreau-Widom 型の領域とし、 $u$  は単位円

周上の非負の  $g$  不変な可測函数で  $\int_0^{2\pi} |\log u d\theta| d\theta < \infty$  を満たすものとすれば,  
 $\Delta$  上の  $g$  不変な正則函数  $H$  で  $|H(e^{i\theta})| = u(\theta)$  a.e. となるものが存在する.

**証明** 既に見たやうに

$$L(z) := \exp \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log u(\theta) \cdot \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\theta \right)$$

として,  $\ell := L \circ \pi^{-1}$  とおくと,  $\ell$  は  $D$  上で乗法的であるから,  $\pi_1(D)$  の指標  $\Gamma$  を定義する. 仮定により  $D$  は Parreau-Widom 型であるから,  $H^\infty(D, \Gamma^{-1})$  は 0 ではない. 従って, 定理 1 により  $\sup_D |fh| = \sup_D |h|$  ( $\forall h \in H^\infty(D)$ ) を満たす  $f \in H^\infty(D, \Gamma^{-1})$ ,  $f \neq 0$ , が存在する. 定理 5 によれば, 合成函数  $F := f \circ \pi$  は内部函数である. よって,  $H := LF$  は  $g$  不変で且つ  $\partial\Delta$  上で  $|H| = u$  a.e. これが証明すべきことであった.  $\square$

#### 4. 調和領域の他の例.

9. 定理  $D$  を複素球面上の領域で無限遠点を含むものとし,  $D$  の補集合の各連結成分の直径は一定数  $\varepsilon_D > 0$  より大きいとする. このとき,  $D$  は調和型である.

証明は省略する.

10. 定理 ([S1; Theorem 6])  $E$  を  $\hat{\mathbb{C}}$  の対数容量 0 の閉部分集合とすると,  $D$  が調和型領域ならば  $D \setminus E$  も同様であり, 逆も成り立つ.

この結果を定理 6 と比較すれば, 調和型領域の族は Parreau-Widom 型の族より遙に広いことが分かる.

11. 命題 前定理で対数容量 0 を解析的容量 0 で置き換へることはできない.

**証明**  $D$  の閉部分集合  $E$  で解析的容量は 0 であるが対数容量は正であるものを任意にとる. この場合は,  $\hat{\mathbb{C}} \setminus E$  上に定数でない有界な調和函数  $u$  が存在する.  $v$  を

$u$  に共役な調和函数とし,  $f = \exp(u + iv)|_{D \setminus E}$  とおく.  $f$  は  $D \setminus E$  上の有界な乗法的函数である. さて,  $p \in H^\infty(D \setminus E)$  を定数でない函数で任意の  $h \in H^\infty(D \setminus E)$  に対し  $\sup_D |ph| = \sup_D |h|$  を満たすものとする. 最大値の原理を使へば,

$$\sup_{\partial D} |f| < \sup_{D \setminus E} |f|, \quad \sup_E |p| < \sup_{D \setminus E} |p| = \sup_D |p| = 1.$$

これから,  $\zeta \in \partial(D \setminus E)$  とすれば

$$\overline{\lim}_{z \rightarrow \zeta} |pf| < \begin{cases} 1 \sup_{\partial D} |f| < \sup_{D \setminus E} |f| & (\zeta \in \partial D) \\ \sup_E |p| \sup_{D \setminus E} |f| < \sup_{D \setminus E} |f| & (\zeta \in E) \end{cases}$$

を得るが, これは定理 3 の条件(c)が成立しないことを示してゐる. よって,  $D$  が調和型であっても  $D \setminus E$  は調和型ではない.  $\square$

### 5. Fuchs 群による解析.

普遍被覆写像  $\pi: \Delta \rightarrow D$  に対応する被覆変換群  $g$  の元は  $\Delta$  上の一次変換であるから,

$$\gamma(z) = e^{i\alpha} \frac{a-z}{1-\bar{a}z} \quad (\alpha \text{ は実数, } |a| < 1)$$

の形である. 領域  $D$  が双曲型であることを  $g$  を用ゐて表せば, Myrberg により

$$\sum_{\gamma \in g} (1 - |\gamma(z)|^2) < \infty \quad (\forall z \in \Delta)$$

となる. これはまた,  $\sum_{\gamma \in g} (1 - |a|^2) < \infty$  と同値であるから, 次の形の Blaschke 積は収束することが分かる:

$$A(z) := \prod_{\gamma \in g} \left\{ e^{-i\vartheta(\gamma)} \gamma(z) \right\} \quad (\vartheta(\gamma) = \arg \gamma(0), \vartheta(\text{Id}) = 0).$$

これを  $g$  の複素 Green 函数と呼ぶ.  $w = \pi(z)$ ,  $a_0 = \pi(0)$  とおけば,  $a_0$  に極を持つ Green 函数  $G(w, a_0)$  は

$$G(w, a_0) = -\log |A(z)|$$

で与えられる。また、領域  $D$  に puncture がないことと群  $G$  が放物型の不動点を持たぬことは同値である。更に、Pommerenke [P] は  $D$  (一般の Riemann 面でもよい) が Parreau-Widom 型であるための条件を  $G$  を用いて考察した。その結果は次の通りである。

12. 定理 (Pommerenke [P]) 次の条件は同値である。

(a)  $A'(z)$  は Nevanlinna 族に属する。

(b)  $\rho(z) = \sum_{\gamma \in G} |\gamma'(z)|$  ( $\forall z \in \bar{\Delta}$ ) とおけば、

$$\int_{\partial D} \log \rho(z) |dz| < \infty.$$

(c)  $\Delta$  上の  $G$  擬不変な正則関数  $A^*$  (即ち、 $|A^*(\gamma(z))| = |A^*(z)|$ ) で  $A^*(0) \neq 0$  且つ

0 且つ

$$|A^*(z)| \leq \frac{|A'(z)|}{\rho(z)} \leq 1 \quad (\forall z \in \Delta).$$

この条件を満たす群  $G$  を Parreau-Widom 型の (Fuchs) 群と呼ぶ。以下では、我々の群  $G$  はこの条件を満たすものとする。さて、

$$F = \{z \in \Delta: |\gamma'(z)| < 1 \quad (\forall \gamma \in G, \gamma \neq \text{Id})\}$$

を群  $G$  の原点  $0$  に関する標準基本領域とする。このとき、

$$13. \text{ 定理 (Pommerenke [P]) } \sum_{\gamma \in G} \text{mes}(\partial \Delta \cap \partial \gamma(F)) = 2\pi.$$

これを利用すれば、次の計算が出来る：

$$\begin{aligned} \int_{\partial \Delta} f d\theta &= \int_{\cup[\partial \Delta \cap \partial(\gamma(F))]} f d\theta = \sum_{\gamma \in G} \int_{\partial \Delta \cap \partial(\gamma(F))} f d\theta \\ &= \sum_{\gamma \in G} \int_{\gamma(\partial \Delta \cap \partial F)} f d\theta = \sum_{\gamma \in G} \int_{\partial \Delta \cap \partial F} f \circ \gamma \cdot |\gamma'| d\theta \end{aligned}$$

$$= \int_{\partial\Delta \cap \partial F} f \cdot \sum_{\gamma \in \mathcal{G}} |\gamma'| d\theta.$$

もし  $f$  が  $\mathcal{G}$  不変ならば, この最後の辺は

$$\int_{\partial\Delta \cap \partial F} f \cdot \rho d\theta$$

に等しい. 特に,  $f \equiv 1$  とおけば,

$$\int_{\partial\Delta \cap \partial F} \rho d\theta = 2\pi.$$

故に,  $\rho(z)$  は  $\partial\Delta$  上で殆ど至る処有限である.

## 6. 条件付き期待値作用素による Parreau-Widom 領域の解析.

以下, 領域  $D$  はポテンシャル論の意味で正則な Parreau-Widom 型領域とし, 対応する被覆群を  $\mathcal{G}$  とする. 先づ, Poincaré 級数を利用して  $\mathcal{G}$  不変関数の空間への射影作用素を作る. 即ち,  $H(z)$  を  $\Delta$  上の有理型函数として

$$\Theta(H)(z) := \sum_{\gamma \in \mathcal{G}} H(\gamma(z)) \gamma'(z)$$

とおく. 例へば,

$$\Theta\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{\gamma} \frac{\gamma'(z)}{\gamma(z)} = \frac{A'(z)}{A(z)}.$$

$H$  を  $\Delta$  上の正則函数として, 作用素  $E(H)$  を次式で定義する.

$$E(H)(z) = \frac{\sum_{\gamma} \frac{H(\gamma(z)) \gamma'(z)}{\gamma(z)}}{\sum_{\gamma} \frac{\gamma'(z)}{\gamma(z)}} = \frac{A(z)}{A'(z)} \sum_{\gamma} H(\gamma(z)) \frac{\gamma'(z)}{\gamma(z)}.$$

**14. 命題** もしこの級数が収束するならば,  $E(H)$  は  $\mathcal{G}$  不変である.

**証明**  $\gamma_0 \in \mathcal{G}$  とすると,

$$\begin{aligned}
E(H)(\gamma_0(z)) &= \frac{\theta\left(\frac{H}{z}\right)(\gamma_0(z))}{\theta\left(\frac{1}{z}\right)(\gamma_0(z))} = \frac{A(\gamma_0(z))}{A'(\gamma_0(z))} \sum_{\gamma} H((\gamma \circ \gamma_0)(z)) \frac{\gamma'(\gamma_0(z))}{\gamma(\gamma_0(z))} \\
&= \frac{A(\gamma_0(z))}{A'(\gamma_0(z)) \cdot \gamma_0'(z)} \sum_{\gamma} H((\gamma \circ \gamma_0)(z)) \frac{(\gamma \circ \gamma_0)'(z)}{(\gamma \circ \gamma_0)(z)} \\
&= \frac{A(z)}{A'(z)} \sum_{\gamma} H(\gamma(z)) \frac{\gamma'(z)}{\gamma(z)} = E(H)(z). \quad \square
\end{aligned}$$

15. 命題 函数  $H$  が  $G$  不変ならば,  $E(H) = H$ .

作用素  $E$  を  $\partial\Delta$  上の函数に拡張することが出来る. 実際,  $z \in \partial\Delta$  ならば,

$|\gamma'(z)| = z \cdot \frac{\gamma'(z)}{\gamma(z)}$  であるから,  $\partial\Delta$  上の函数  $H$  に対して形式的に計算すれば

$$\begin{aligned}
E(H)(z) &= \frac{\sum_{\gamma} \frac{H(\gamma(z))\gamma'(z)}{\gamma(z)}}{\sum_{\gamma} \frac{\gamma'(z)}{\gamma(z)}} = \frac{\sum_{\gamma} H(\gamma(z)) \cdot \bar{z} \cdot |\gamma'(z)|}{\sum_{\gamma} \bar{z} |\gamma'(z)|} \\
&= \frac{\sum_{\gamma} H(\gamma(z)) |\gamma'(z)|}{\sum_{\gamma} |\gamma'(z)|} = \frac{1}{\rho(z)} \sum_{\gamma} H(\gamma(z)) |\gamma'(z)|.
\end{aligned}$$

これを使って空間  $L^p(d\theta)$  上での  $E$  の作用を見る:

16. 定理 作用素  $E$  は次の性質を持つ:

(a)  $\int_{\partial\Delta} t d\theta = \int_{\partial\Delta \cap \partial F} E(t) \rho d\theta = \int_{\partial\Delta} E(t) d\theta \quad (\forall t \in L^1(d\theta)).$

(b)  $E: L^p(d\theta) \rightarrow L^p(d\theta, G)$  はノルム 1 の射影作用素である.

(c)  $E(st) = sE(t) \quad (\forall t \in L^p(d\theta), s \in L^q(d\theta, G), p^{-1} + q^{-1} = 1).$

(d)  $\int_{\partial\Delta} st |dz| = \int_{\partial\Delta} sE(t) |dz| \quad (\forall t \in L^p(d\theta), s \in L^q(d\theta, G), p^{-1} + q^{-1} = 1).$

(e)  $\int_{\partial\Delta} tE(s) |dz| = \int_{\partial\Delta} E(t)s |dz| \quad (\forall t \in L^p(d\theta), s \in L^q(d\theta), p^{-1} + q^{-1} = 1).$

証明 先づ, 準備として  $t \in L^p(d\theta)$  を考へる. もし  $p = \infty$  ならば, 任意の  $z \in \partial\Delta$  に対して

$$|E(t)(z)| \leq \sum_{\gamma \in \mathcal{G}} |t(\gamma(z))| |\gamma'(z)| / \rho(z) \leq \|t\|_{\infty} \sum_{\gamma \in \mathcal{G}} |\gamma'(z)| / \rho(z) = \|t\|_{\infty}.$$

次に,  $1 \leq p < \infty$  ならば,

$$\begin{aligned} \rho(z)^p |E(t)(z)|^p &\leq \left( \sum_{\gamma \in \mathcal{G}} |t(\gamma(z))| |\gamma'(z)| \right)^p \\ &\leq \left( \sum_{\gamma \in \mathcal{G}} |t(\gamma(z))|^p |\gamma'(z)| \right) \left( \sum_{\gamma \in \mathcal{G}} 1^{p/(p-1)} |\gamma'(z)| \right)^{p-1} \\ &= \left( \sum_{\gamma \in \mathcal{G}} |t(\gamma(z))|^p |\gamma'(z)| \right) \rho(z)^{p-1}. \end{aligned}$$

故に,  $|E(t)(z)|^p \leq E(|t|^p)(z)$ .

(a)  $t \in L^1(d\theta)$  とすると,

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Delta} t d\theta &= \sum_{\gamma \in \mathcal{G}} \int_{\partial\Delta \cap \gamma(\partial F)} t |dz| = \sum_{\gamma \in \mathcal{G}} \int_{\gamma(\partial\Delta \cap \partial F)} t(z) |dz| \\ &= \sum_{\gamma \in \mathcal{G}} \int_{\partial\Delta \cap \partial F} t(\gamma(w)) |\gamma'(w)| |dw| = \int_{\partial\Delta \cap \partial F} E(t)(w) \rho(w) |dw| \\ &= \sum_{\gamma \in \mathcal{G}} \int_{\partial\Delta \cap \partial F} E(t)(w) |\gamma'(w)| |dw| = \sum_{\gamma \in \mathcal{G}} \int_{\gamma(\partial\Delta \cap \partial F)} (E(t))(\gamma^{-1}z) |dz| \\ &= \int_{\partial\Delta} E(t)(z) |dz|. \end{aligned}$$

(b)  $t \in L^p(d\theta)$  ならば,

$$\|E(t)\|_p^p = \int_{\partial\Delta} |E(t)(z)|^p |dz| \leq \int_{\partial\Delta} E(|t|^p)(z) |dz| = \int_{\partial\Delta} |t|^p(z) |dz| = \|t\|_p^p.$$

(c) 以下は省略する.  $\square$

ここで述べた所謂「条件付き期待値」作用素  $E$  は Samokhin [S4] によるものである. この種の作用素を Riemann 面上の解析に最初に応用したのは Forelli [F] である. Forelli は有限な Riemann 面を扱ったが, その後 Earle と Marden [EM] に受け継がれ, Poincaré 級数を利用して具体的に表現された. 更に, Pommerenke [P] は Parreau-Widom 型の Riemann 面を Fuchs 群の立場からの特徴付けを与

へ、併せて Earle-Marden の結果をこの場合まで拡張した。上に述べた Samokhin の作用素は Pommerenke の定義の一つの変形と見られる。以下では、この期待値作用素の効用を知るため、Samokhin [S4] の二三の結果を紹介する。

さて、我々は  $\pi(0)$  に極を持つ  $D$  の Green 函数  $w \mapsto G(w, \pi(0))$  の危点の集合を  $Z(\pi(0)) = \{\zeta_1, \zeta_2, \dots\}$  と書き、

$$\tilde{A}(w) = \exp\{-\lambda(w) - i\lambda^*(w)\}, \quad \lambda(w) = \sum_k G(w, \zeta_k),$$

とおく。更に、

$$A^*(z) := \tilde{A} \circ \pi(z)$$

とし、 $A^*$  が定義する  $g$  の指標を  $\Gamma_*$  と書く。このとき、次が成り立つ。

17. 補題 ([S4; Lemma 1]) 任意の  $p \geq 1$  に対して

$$E(H^p(\Delta)) \subset \frac{1}{A^*} H^p(\Delta, \Gamma_*).$$

実際、次が成り立つ：

$$\|G^* E(f)\|_p \leq \|f\|_p \quad (\forall f \in H^p(\Delta)).$$

証明  $f \in H^\infty(\Delta)$  とすれば、 $\|E(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$  且つ  $E(f) \in H^\infty(\Delta, g)$  であるから、 $\|A^*\|_\infty \leq 1$  に注意して、 $A^* E(f) \in H^\infty(\Delta, \Gamma_*)$  及び  $\|A^* E(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$  を得る。次に、 $f \in H^p(\Delta)$  ( $1 \leq p < \infty$ ) を仮定する。このときは、 $f_r(z) := f(rz)$  ( $r < 1$ ) とおけば、 $\|f_r - f\|_p \rightarrow 0$  ( $r \rightarrow 1-0$ ) である。従って、 $\|E(f_r)\|_p \leq \|f_r\|_p$ 、 $\|E(f_r) - E(f)\|_p = \|E(f_r - f)\|_p \leq \|f_r - f\|_p \rightarrow 0$ 、及び  $\|A^* E(f_r) - A^* E(f)\|_p \leq \|E(f_r) - E(f)\|_p \rightarrow 0$  を得る。 $f_r$  は有界であるから、 $A^* E(f_r) \in H^\infty(\Delta)$  となり、 $A^* f$  は  $H^\infty(\Delta)$  の  $L^p$  閉包 (即ち、 $H^p(\Delta)$ ) に属すること、ならびに  $\|A^* E(f)\|_p \leq \|f\|_p$  が分かった。□

18. 定理 ([S4; Theorem 2])  $p \geq 1$  ならば

$$\left[ \overline{E(H_0^p(\Delta))} \right]^\perp = H^p(\Delta, \mathcal{G}), \quad \left[ \overline{E(A^* H^p(\Delta))} \right]^\perp = \frac{1}{A^*} H_0^q(\Delta, \Gamma_*).$$

**証明**  $t \in L^q(d\theta, \mathcal{G})$  とすれば, 任意の  $f \in H_0^p(\Delta)$  に対して

$$0 = \int_{\partial\Delta} E(f)t \, d\theta = \int_{\partial\Delta} f t \, d\theta$$

が成り立つ必要十分条件は  $t \in H^q(\Delta)$  (従って,  $t \in H^q\Delta, \mathcal{G}$ ) である. 一方,  $t \in L^q(d\theta)$  が  $t \circ \gamma = \Gamma_*(\gamma)t$  ( $\forall \gamma \in \mathcal{G}$ ) を満たすならば,  $t/A^*$  は  $\partial\Delta$  上で  $\mathcal{G}$  不変であるから, 任意の  $f \in H^p(\Delta)$  に対して

$$\int_{\partial\Delta} E(A^*f) \cdot \frac{t}{A^*} \, d\theta = \int_{\partial\Delta} A^*f \cdot \frac{t}{A^*} \, d\theta = \int_{\partial\Delta} f \cdot t \, d\theta = 0$$

であるための必要十分条件は  $t \in H_0^q(\Delta)$ , 従って,  $t \in H_0^q(\Delta, \Gamma_*)$  を得る.  $\square$

以下では, 証明を原論文 [S4] に譲り結果のみを述べる.

**19. 定理** 部分空間  $\overline{E(H^1(\Delta))}$  の元に対しては Cauchy 型条件 (DCT) (詳細は [H3; p.151] を参照) が成り立つ: 即ち, 任意の  $f \in \overline{E(H^1(\Delta))}$  に対して

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Delta} f \, d\theta.$$

Cauchy 条件 (DCT) は不変部分空間定理その他を成立させるために重要な役割を演じるものであることが分かってゐる. 従って, (DCT) が成り立つ範囲を特定できることは面白い結果である.

**20. 定理** Parreau-Widom 型の領域について次は同値である:

(a)  $D$  は条件 (DCT) を満たす.

(b)  $\overline{E(A^* H^p(\Delta))} = H^p(\Delta, \mathcal{G})$  ( $p \geq 1$ ).

(c)  $[H^p(\Delta, \mathcal{G})]^* = L^q(d\theta, \mathcal{G}) / \frac{1}{A^*} H_0^q(\Delta, \Gamma_*)$  且つ

$$\left[ L^p(d\theta, \mathcal{G}) / \frac{1}{A^*} H_0^q(\Delta, \Gamma_*) \right]^* = H^p(\Delta, \mathcal{G}).$$

終りに、測度の絶対連続性に関連する結果を述べる。先づ、 $\mu$  を  $D$  内の compact 集合内に台を持つ正則な Borel 測度として  $H^\infty(D)$  上の線型汎函数  $\varphi(f) := \int_D f d\mu$  を考へれば次が成り立つ。

21. 定理  $D$  を条件 (DCT) を満たす Parreau-Widom 型の領域とすると、 $H^\infty(D)$  の Shilov 境界上  $\partial H^\infty$  に台を持つ汎函数  $\varphi_\mu$  の表現測度は  $\partial H^\infty$  上の調和測度に対して絶対連続である。

証明には Parreau-Widom 型の平面領域が調和型であることが使はれる。

F. & M. Riesz の定理と Rudin-Carleson の定理の一般化としては次がある。

22. 定理  $D$  は条件 (DCT) を満たす Parreau-Widom 型の領域で、環  $A(D)$  は  $H^\infty(D)$  の中で pointwise boundedly dense であるとする、境界  $\partial D$  上の測度で  $A(D)$  に直交するものは  $\partial D$  上の調和測度に関して絶対連続である。

23. 定理 前定理と同じ仮定の下で、境界  $\partial D$  の調和測度 0 の任意の閉部分集合は  $A(D)$  の峰型の内挿集合 (peak interpolation set) である。

### 参考文献

- [EM] C.J. Earle and A. Marden, On Poincaré series with application to  $H^p$  spaces on bordered Riemann surfaces, Illinois J. Math. 13 (1969), 202-219.
- [F] F. Forelli, Bounded holomorphic functions and projections, Illinois J. Mat. 10 (1966), 367-380.
- [H1] M. Hasumi, Invariant subspace theorems on open Riemann surfaces, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 24, 4 (1974), 241-286.
- [H2] M. Hasumi, Invariant subspace theorems on open Riemann surfaces, II, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 26, 2 (1976), 273-299.
- [H3] M. Hasumi, Hardy Classes on Infinitely Connected Riemann Surfaces,

Lecture Notes in Math. Vol. 1027, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, 1983.

- [P] M. Parreau, Théorème de Ratou et problème de Dirichlet pour les lignes de Green de certaines surfaces de Riemann, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A.I. No. 250/25 (1958), 8 pp.
- [S1] M.V. Samokhin, On automorphic analytic functions with given modulus of boundary values, Mat. Sb. 101 (143)(2) (1976), 189-203.
- [S2] M.V. Samokhin, On some questions related to the problem of existence of automorphic analytic functions with given modulus of boundary values, Math. Sb. 111 (153) (4) (1980), 557-578.
- [S3] M.V. Samokhin, On some boundary properties of bounded analytic functions and the maximum modulus principle in the domains with arbitrary connectivity, Mat. Sb. 135 (177) (4) (1988), 497-513.
- [S4] M.V. Samokhin, Some classical questions in the theory of analytic functions in domains of Parreau-Widom type, Math. Sb. 182 (6) (1991), 892-910.
- [W1] H. Widom, The maximum principle for multiple-valued analytic functions, Acta Math. 126 (1971), 63-82.
- [W2] H. Widom,  $\mathcal{H}_p$  sections of vector bundles over Riemann surfaces, Ann. of Math. 94 (1971), 304-324.