数理解析研究所講究録
第826巻 1993年 18-26

Orbital decomposition of an affine symmetric space

東大数理 飯田正敏 述 (Masatoshi Iida)
東大数理 山本敦子 記 (Atsuko Yamamoto)

Motivation

G : reductive Lie group
σ, σ' : Gの可換な involution
$G^{\sigma} := \{ g \in G \mid \sigma g = g \}$
$G^{\sigma'} := \{ g \in G \mid \sigma' g = g \}$
θ : cartan involution とする.

$\sigma = \sigma' = \theta$ の時の double coset 分解 $G^{\theta}\backslash G/G^{\theta}$ とは、Cartan分解のことであり、
$\sigma = \theta$ の時の double coset 分解 $G^{\theta}\backslash G/G^{\sigma'}$ は、Cartan分解の一般化として知られている。
では、σ も σ' も Cartan involution ではない一般の時には、double coset $G^{\sigma}\backslash G/G^{\sigma'}$ は どうなっているのであろうか。
($\sigma = \sigma'$ の時には、大島-松木、G が compact の時には Hoogenboom によって研究されている。)

そこで、$g \in G = GL(n, \mathbb{C})$ として σ, σ' が次のように作用する時を考えてみよう。

$$\sigma : g \longmapsto \begin{bmatrix} I_p & \\ & -I_q \end{bmatrix} g \begin{bmatrix} I_p & \\ & -I_q \end{bmatrix}, \qquad p+q=n$$

$$\sigma' : g \longmapsto \begin{bmatrix} I_{p'} & \\ & -I_{q'} \end{bmatrix} g \begin{bmatrix} I_{p'} & \\ & -I_{q'} \end{bmatrix}, \qquad p'+q'=n.$$

(注意). $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{q}$ (σ での固有分解)
$\quad = \mathfrak{h}' + \mathfrak{q}'$ (σ' での固有分解)

$\mathfrak{a}_{\mathfrak{q}\mathfrak{q}'}$ を $\mathfrak{q}$ と $\mathfrak{q}'$ の maximal abelian subalgebra とした時、$G^{\sigma} \cdot \exp \mathfrak{a}_{\mathfrak{q}\mathfrak{q}'} \cdot G^{\sigma'}$ が G 内 dense になるとは限らない。

注意の例. $G = SL(2, \mathbb{C})$, $G^{\sigma} = SL(2, \mathbb{R})$, $G^{\sigma'} = SO(2, \mathbb{C})$ を自然にとった時、$G^{\sigma} \cdot \exp \mathfrak{a}_{\mathfrak{q}\mathfrak{q}'} \cdot G^{\sigma'}$ の次元は G と等しいが、G 内 dense になっていない.(上の σ, σ' に対して、$G^{\sigma} = GL(p, \mathbb{C}) \times GL(q, \mathbb{C})$, $G^{\sigma'} = GL(p', \mathbb{C}) \times GL(q', \mathbb{C})$ である.)

ここでの目標は

$$GL(p, \mathbb{C}) \times GL(q, \mathbb{C}) \ni \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} A & \\ & D \end{bmatrix} & \begin{matrix} p \\ q \end{matrix} \end{array}, \qquad GL(n, \mathbb{C}) \ni \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} & \begin{matrix} p \\ q \end{matrix} \\ \begin{matrix} p' & q' \end{matrix} & \end{array}$$

$$GL(p', \mathbb{C}) \times GL(q', \mathbb{C}) \ni \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} K & \\ & N \end{bmatrix} & \begin{matrix} p' \\ q' \end{matrix} \end{array}$$

とした時

$$\begin{bmatrix} A & \\ & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}\begin{bmatrix} K & \\ & N \end{bmatrix} = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} AEK & AFN \\ DGK & DHN \end{bmatrix} & \begin{matrix} p \\ q \end{matrix} \\ \begin{matrix} \;\;\; p' \;\;\;\;\;\;\;\;\; & q' \end{matrix} & \end{array}$$

を標準形にする事である。

ただし、行列の右や下の p, q などの添え字は行列の行や列の数である。

<u>Lemma 1</u>. 上記の A, D, K, N を適当にとって

$$AEK = \begin{bmatrix} I_e & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad e = \operatorname{rank} E$$

$$DHN = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_h \end{bmatrix}, \qquad h = \operatorname{rank} H$$

という形にする事ができる。

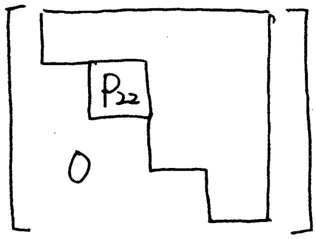
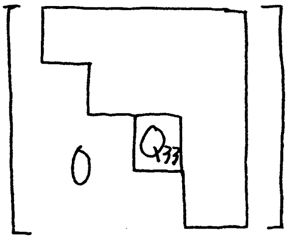
<u>Lemma 2</u>. 更に、E と H の isotropy により、G を次の形にできる

$$G = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & I_{g_{12}} \\ 0 & 0 & I_{g_{11}} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & I_{g_{22}} & 0 \\ 0 & I_{g_{21}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] & \begin{matrix} \left.\begin{matrix} g_{12} \\ g_{11} \end{matrix}\right\} h \\ g_{22} \\ g_{21} \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} e-g_{11}-g_{21} & g_{21} & g_{11} & g_{22} & g_{12} \end{matrix} & \end{array}$$

($g_{11}, g_{12}, g_{21}, g_{22}$ は G の subblock の rank を表すパラメータ)

☆次に、これらの isotropy でFを動かす.

(*1)… PFQ

ただし、 $P =$  , $Q =$ 

$$P_{22}^{-1} = Q_{33}$$

PはFに対し、行に関する基本変形.（下にある行を上の行に加える.）

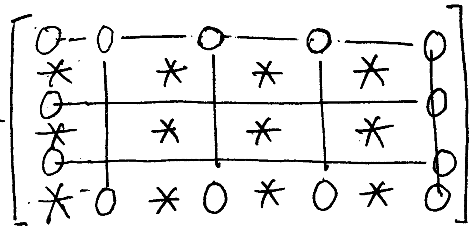
QはFに対し、列に関する基本変形.（左の列を右の列に加える.）であることに注意して次を得る

<u>Lemma 3.</u> Fは上の基本変形で次のようにできる.

$$F = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} e \\ p-e \end{array} \\ \begin{array}{cc} \quad q'-h & \qquad h \end{array} & \end{array}$$

ただし、

$$F_{11} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} & \begin{smallmatrix} I_{f_{11}^1} & \\ & 0 \end{smallmatrix} & 0 & 0 \\ \cline{2-4} 0 & 0 & \begin{smallmatrix} I_{f_{11}^2} & \\ & 0 \end{smallmatrix} & 0 \\ \cline{2-4} & 0 & 0 & \begin{smallmatrix} I_{f_{11}^3} & \\ & 0 \end{smallmatrix} \end{array}\right],$$

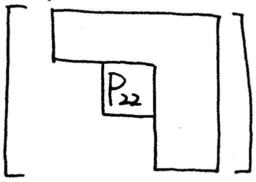
$F_{12} =$ 

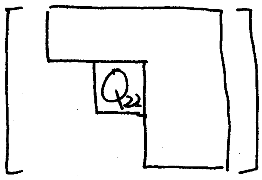
$$F_{21} = \begin{array}{c} \begin{array}{ll} f_{21} & \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c} I_{f_{21}} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$$F_{22} = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{0} \\ \hline 0 \; I_{f_{22}^1} & & & \\ \hline & 0 \; I_{f_{22}^2} & & \\ \hline & & 0 \; I_{f_{22}^3} & \\ \hline & & & 0 \; I_{f_{22}^4} \end{array}\right] & \begin{array}{l} f_{21} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Lemma 3. でできた F_{12} の $*$ の部分を残し、0 をつぶしてできる行列の部分に作用する isotropy を考えると、上の $(*1)$ と同じ形になっているので、再び同じ操作を行う。この繰り返しでサイズが小さくなっていく(これは E, F, G, H 及び、その subblock の rank condition に依存)のなら、この操作はいつか終る.

★ サイズが小さくならない $\begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}$ に対しては $(*1)$ は、

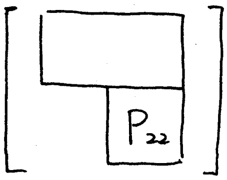
$P=$ 

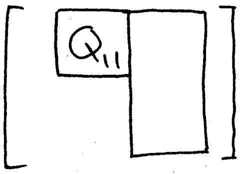
, $Q=$ 

. $P_{22}^{-1}=Q_{22}$.

と退化していて、Lemma 3 と同様にして標準形に直せる。

☆ それでもサイズが小さくならない $\begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}$ に対して $(*1)$ は、

$P=$ 

, $Q=$ 

. $P_{22}^{-1}=Q_{11}$

と退化していて、これを標準形にする。これは繰り返しの操作なしで標準形にできて、 $F=\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}$ の F_{11}, F_{21}, F_{22} は 0, 1, のみを成分にもち、F_{12} に Jordan 標準形が出る形になる。

例. $p'=n-1$, $q'=1$, $2\le q\le p$. (orbit が 8個と1種類).

(I) $$\left[\begin{array}{ccc|c} I_{p-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & I_{q-1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

(codim = q)

(II) $$\left[\begin{array}{cccc|c} I_{p-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & I_{q-2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

(codim = 1)

(III) $$\left[\begin{array}{ccc|c} I_{p-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_{q-1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

(codim = p)

(IV) $$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & I_{p-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & I_{q-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

(codim = 1)

(V)$_{f_p}$ $$\left[\begin{array}{ccc|c} I_{p-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & f_p \\ \hline 0 & 0 & I_{q-1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$f_p \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$

(codim = 1)

(VI) $$\left[\begin{array}{cc|c} I_p & 0 & 0 \\ \hline 0 & I_{q-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

(codim = $2p$)

(VII) $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & I_{p-1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_{q-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

(codim = p)

(VIII) $$\left[\begin{array}{cc|c} I_{p-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & I_q & 0 \end{array}\right]$$

(codim = $2q$)

(IX) $\left[\begin{array}{ccc|c} I_{p-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & I_{q-1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$

(codim $= q$)

これらのorbit達の不変量を比べてみる。

	I	II	III	IV	$(\mathrm{V})_{fp}$	VI	VII	VIII	IX
rank E	$p-1$	p	p	p	p	p	p	$p-1$	p
rank F	1	1	0	1	1	0	1	1	1
rank G	q	q	q	q	q	$q-1$	$q-1$	q	q
rank H	1	1	1	1	1	1	1	0	0
dim(G(Ker E) + Im H)	q	$q-1$	q	q	q	q	q	q	$q-1$

(表 1)

以上によるとこの不変量では IV と V の区別がつかないので
この区別をつけられる不変量を見つけたい.

<u>def-prop</u> $X := \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{c}\left[\begin{array}{cc} E & F \\ G & H \end{array}\right] \\ \begin{array}{cc} n-1 & 1 \end{array}\end{array}\begin{array}{c} p \\ q \\ \\ \end{array} \in GL(n, \mathbb{C})$ $(p+q=n)$

- $\dim(G(\operatorname{Ker} E) + \operatorname{Im} H) = q$
- $\operatorname{rk} E = p$

である時、$\operatorname{Im} H \cap G(E^{-1}F(v)) = \{1点\}$ なので
$\Phi \in \operatorname{End}(\mathbb{C})$ を $H(\Phi(v)) \in \operatorname{Im} H \cap G(E^{-1}F(v))$ $({}^{\forall} v \in \mathbb{C})$

で定める。

すると、Φ_X は X について $GL(p,\mathbb{C})\times GL(q,\mathbb{C})-GL(n-1,\mathbb{C})\times GL(1,\mathbb{C})$-invariant である.

<u>Remark</u>　Φ は次のように理解できる.

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{C}^{n-1} \arrow[dl, "E"'] \arrow[dr, "G"] & \\
\mathbb{C}^{p} & & \mathbb{C}^{q} \\
 & \mathbb{C} \arrow[ul, "F"] \arrow[ur, "H"'] &
\end{tikzcd}
\qquad \Phi = H^{-1}GE^{-1}F
$$

X に左から $\begin{bmatrix} A & \\ & D \end{bmatrix}$, 右から $\begin{bmatrix} K & \\ & N \end{bmatrix}$ を作用させると,

$\Phi = H^{-1}GE^{-1}F \longmapsto L^{-1}H^{-1}GE^{-1}FL$ となり, traceや det. は一致する。つまり $\mathrm{tr}\,H^{-1}GE^{-1}F$ や $\det H^{-1}GE^{-1}F$ は $GL(p,\mathbb{C})\times GL(q,\mathbb{C})-GL(n-1,\mathbb{C})\times GL(1,\mathbb{C})$-invariantである.

(これは $p\neq n-1$ でも成り立つ。$p=n-1$ では. L は scalarなので Φ 自身 invariant)

表1に $\det\Phi$ の値を書き加えると

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
$\det\Phi$	—	—	0	0	f_p	0	0	—	—

(— は Φ が定義できない orbit)

以上により、IV と V の区別もできるようになった。

Remark 後に、この問題を含む、より一般的な結果が、京都大の松木先生によって出された。

References

B. Hoogenboom, Intertwining functions on compact Lie groups, Mathematatish Centrum, Amsterdam (1983)

T. Oshima and T. Matsuki, Orbits on affine symmetric spaces under the action of the isotropy subgroups, J. Math. Soc. Japan, 32, No2 (1980)