数理解析研究所講究録
第 830 巻 1993 年 85-92

有限深さの流体上の表面重力波の非線形発展

山口大教養　松野好雅 (Yoshimasa Matsuno)

1. 序論

有限振幅の表面重力波の研究の歴史は古い[1-3]。波の変調と不安定性、孤立波の形成、粋波等の現象が理論および実験の両面から調べられてきた。現象を近似的に記述する種々のモデル方程式が提案されたが、とりわけ KdV 方程式と Boussinesq 方程式はよく知られている。これらの方程式は波の弱非線形性並びに浅水波という 2 つの仮定に基ずいて導かれたものであり、その適用範囲は限定されている。ここでは任意の深さの流体表面上の有限振幅波を記述するモデル方程式を、2 次元、非粘性、非圧縮、渦なし流体の場合について導く。なお以下の議論の詳細については論文[4]を参照。

2. 基礎方程式

基礎となる流体方程式、および境界条件は無次元形で書くと以下のようになる:

$$\delta^2\phi_{xx}+\phi_{yy}=0,\ (-\infty<x<\infty,\ -1<y<\alpha\eta) \tag{1}$$

$$\eta_t+\kappa\epsilon\phi_x\eta_x=\frac{\kappa}{\delta}\phi_y,\ (y=\alpha\eta) \tag{2}$$

$$\phi_t+\frac{\kappa\epsilon}{2\delta^2}(\delta^2\phi_x^2+\phi_y^2)+\eta-\eta_0=0,\ (y=\alpha\eta) \tag{3}$$

$$\phi_y=0,\ (y=-1) \tag{4}$$

ここで $\phi=\phi(x,y,t)$ は速度ポテンシャル、$\eta=\eta(x,t)$ は流体表面の形状、η_0は定数である。無次元パラメータα,δ およびϵは以下のように定義される。

$$\alpha=\frac{a}{h_0},\ \delta=\frac{h_0}{l},\ \epsilon=\frac{a}{l} \tag{5}$$

上式で a は波の代表振幅、lは代表長さ、h_0は流体の深さである。無次元量と次元量（～をつける）の関係は次のように与えられる: $\tilde{x} = lx, \tilde{y} = h_0 y, \tilde{t} = (l/c_0)t, \tilde{\phi} = (gla/c_0)\phi, \tilde{\eta} = a\eta$。$c_0 = \sqrt{gl/\kappa}$ は波の位相速度で、δに依存する無次元量κは、波の線形分散式$\omega^2 = \kappa k \tanh(k\delta)$ を考慮して、浅水近似（$\delta \to 0$）で$\kappa = \delta^{-1}$、深水近似（$\kappa \to \infty$）で$\kappa = 1$ なる漸近形をもつものとする。ηは負と仮定し、ηの最大値が零となるような座標系を設定する。また、ここでは表面張力の効果は考えていないが、これを含めることは容易である。

3．近似方程式の導出

3．1 解の表式

境界条件（４）を満足する（１）の解として次のものを考える：

$$\phi = -i[f_+(x - i\delta y, t) - f_-(x + i\delta y, t)] \tag{6}$$

ここで $f_+(z,t)[f_-(z,t)]$ は $0 < \mathrm{Im}\ z < 2\delta$ $(-2\delta < \mathrm{Im}\ z < 0)$ で正則な解析関数で具体的には以下の表式をもつ。

$$f_\pm(z,t) = \pm\frac{1}{4i\delta}\int_{-\infty}^{\infty} \coth[\pi(y-z)/2\delta] f(y,t)dy \tag{7}$$

fは任意の実関数であるが、その Fourier 変換

$$\hat{f}(k,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,t)e^{-ikx}dx \tag{8}$$

を用いると（６）は

$$\phi = i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cosh k\delta(y+1)}{\sinh k\delta}\hat{f}(k,t)e^{ikx}dk \tag{9}$$

のようのも書き換えられる。（９）ではなく（６）の表式を用いるのが以下の議論の特徴である。（７）でzを上半面、および下半面からそれぞれ実軸に近ずけると次の関係式が導かれる。

$$f_\pm(x \pm i0, t) = \frac{1}{2}(1 \mp iT)f(x,t) \tag{10}$$

ここでTは

$$Tf(x,t) \equiv \frac{1}{2\delta}P\int_{-\infty}^{\infty} \coth[\pi(y-x)/2\delta] f(y,t)dy \tag{11}$$

で定義される特異積分演算子である。積分記号の前のシンボル P は主値積分を意味する。（１０）から直ちに次の重要な公式が出てくる。

$$f_+(x+i0,t)+f_-(x-i0,t)=f(x,t) \tag{12}$$

$$f_+(x+i0,t)-f_-(x-i0,t)=-iTf(x,t) \tag{13}$$

３．２近似方程式

有限深さの流体の場合 $\delta=O(1), \kappa=O(1)$ である。従って以下では波の弱非線形性 $\epsilon \ll 1$ の仮定の下で η および流体表面速度の水平成分に対する近似方程式系を導く。また η 単独の発展方程式も得られる。近似は $O(\epsilon)$ まで考えるが、高次方程式への拡張は容易である。

さて、（６）および（１２）、（１３）を用いて流体表面上で速度ポテンシャルを ϵ のべきで展開すると

$$\phi_x\,|_{y=\alpha\eta}=-Tf_x-\epsilon\eta f_{xx}+O(\epsilon^2) \tag{14}$$

$$\phi_y\,|_{y=\alpha\eta}=-\delta(f_x-\epsilon\eta Tf_{xx})+O(\epsilon^2) \tag{15}$$

$$\phi_t\,|_{y=\alpha\eta}=-Tf_t-\epsilon\eta f_{xt}+O(\epsilon^2) \tag{16}$$

流体表面速度の水平成分

$$u=\phi_x\,|_{y=\alpha\eta} \tag{17}$$

を用いて（１４）の f_x を逐次的に解いて u と η で表すと

$$f_x=-\tilde{T}u+\epsilon\tilde{T}(\eta\tilde{T}u_x)+O(\epsilon^2) \tag{18}$$

ここで $\tilde{T}$ は T の逆演算子で以下で与えられる。

$$\tilde{T}f(x,t)=-\frac{1}{2\delta}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(y,t)}{\sinh[\pi(y-x)/2\delta]}dy \tag{19}$$

（１８）を（１５）および、（１６）の x 微分へ代入すると

$$\phi_y\,|_{y=\alpha\eta}=-\delta[-\tilde{T}u+\epsilon\{\tilde{T}(\eta\tilde{T}u_x)+\eta u_x\}+O(\epsilon^2)] \tag{20}$$

$$(\phi_t\,|_{y=\alpha\eta})_x = u_t + \epsilon(\eta_x \tilde{T} u_t - \eta_t \tilde{T} u_x) + O(\epsilon^2) \tag{21}$$

最後に（１７）、（２０）および（２１）を（２）および（３）に代入するとηとuに対する次の発展方程式が得られる：

$$\eta_t - \kappa\tilde{T}u + \kappa\epsilon[(u\eta)_x + \tilde{T}(\eta\tilde{T}u_x)] + O(\epsilon^2) = 0 \tag{22}$$

$$u_t + \eta_x + \epsilon(\kappa u u_x - \eta_x \tilde{T}\eta_x) + O(\epsilon^2) = 0 \tag{23}$$

上式は閉じた方程式系であり適当な初期条件と境界条件の下で解くことができるが、η単独の式もこれらから導かれる。実際（２３）をuに関して摂動的に解くと

$$\kappa u = T\eta_t + \epsilon[T(\eta T\eta_t)_x + \eta\eta_{xt}] + O(\epsilon^2) \tag{24}$$

これを（２２）へ代入し$O(\epsilon)$の項のη_{tt}に対して最低次の近似式$\eta_{tt} = -\kappa\tilde{T}\eta_x + O(\epsilon)$を用いると$\eta$の時間発展を支配する以下の方程式が出る：

$$\eta_{tt} + \kappa\tilde{T}\eta_x + \epsilon[-\kappa\eta\eta_x + 2\eta_t T\eta_t + \tilde{T}\eta_t^2 - \kappa\tilde{T}(\eta\tilde{T}\eta_x)]_x + (\epsilon^2) = 0 \tag{25}$$

ここで$O(\epsilon)$の項の変形には公式

$$\tilde{T}(fg) = \tilde{T}[(\tilde{T}f)(\tilde{T}g)] + g\tilde{T}f + f\tilde{T}g \tag{26}$$

を用いた。（２５）は有限深さの流体表面上を伝播する波の正面衝突を記述することができる。なおここでの議論ではηは負と仮定したが、正の場合も全く同じ形の方程式が得られることに注意しておく。

４．浅水、および深水の極限

ここでは§３で導いた方程式の浅水、および深水の極限から生じる方程式について議論する。現存の浅水波方程式は特別な場合として自然に出てくることが示される。

４．１ 浅水近似

i)Broer-Kaup 系

浅水近似$\delta \to 0$では$\kappa = \delta^{-1}$とおく。演算子$\tilde{T}$に対する展開式

$$\tilde{T}f = -\delta f_x - \frac{\delta^3}{3} f_{xxx} + O(\delta^5) \tag{27}$$

を用いると（２２）、（２３）は以下の方程式系に還元される：

$$\eta_t + u_x + \alpha(u\eta)_x + \frac{\delta^2}{3} u_{xxx} + O(\alpha\delta^2, \delta^4) = 0 \tag{28}$$

$$u_t + \eta_x + \alpha u u_x + O(\alpha\delta^2) = 0 \tag{29}$$

これらはBroer[5]およびKaup[6]によって独立に導かれた方程式であり、完全積分可能な系であることも証明されている[6,7]。

ii)Boussinesq 系

平均水平速度を

$$\bar{u} = \frac{1}{1+\alpha\eta} \int_{-1}^{\alpha\eta} \phi_x(x,y,t)dy \tag{30}$$

によって定義する。$O(\delta^2)$ までの近似で u は$\bar{u}$によって

$$u = \bar{u} - \frac{\delta^2}{3} \bar{u}_{xx} + O(\delta^4) \tag{31}$$

と関連づけられる。（３１）を（２８）、（２９）へ代入すると、$\alpha = O(\delta^2) \ll 1$ の仮定の下でこれらの方程式は

$$\eta_t + [(1+\alpha\eta)\bar{u}]_x + O(\alpha\delta^2, \delta^4) = 0 \tag{32}$$

$$\bar{u}_t + \eta_x + \alpha \bar{u}\bar{u}_x + \frac{\delta^2}{3} \eta_{xtt} + O(\alpha\delta^2, \delta^4) = 0 \tag{33}$$

となる。上式はBoussinesq によって最初に導かれた方程式系である[2]。

iii)η単独の式

$\alpha = O(\delta^2) \ll 1$ と仮定し、展開式、（２７）および

$$Tf = \frac{1}{2\delta} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sgn}(y-x) f(y) dy + O(\delta) \tag{34}$$

を用いると（２５）よりη単独の発展方程式が得られる：

$$\eta_{tt}-\eta_{xx}-\frac{\delta^2}{3}\eta_{xxxx}$$

$$+\alpha[-\eta\eta_x+\eta_t\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sgn}(y-x)\eta_t(y,t)dy]_x+O(\alpha\delta^2,\delta^4)=0 \tag{35}$$

iv)Boussinesq 方程式

仮定 (i)$\alpha=O(\delta^2)\ll 1$, および (ii)$\eta_t=-\eta_x+O(\alpha,\delta^2)$ の下で（３５）より

$$\eta_{tt}-\eta_{xx}-\frac{\delta^2}{3}\eta_{xxxx}-3\alpha(\eta\eta_x)_x+O(\alpha\delta^2,\delta^4)=0 \tag{36}$$

が導かれる。Boussinesq 方程式（３６）は両方向に伝播する波を記述するが、これは一方向伝播を意味する上の第２の仮定と矛盾する。この観点からは（３５）の方がより適切な方程式と言える。

v)KdV 方程式

KdV 方程式は（３５）より iv) と同じ仮定の下で導かれる。結果は以下のようになる。

$$\eta_t+\eta_x+\frac{3}{2}\alpha\eta\eta_x+\frac{\delta^2}{6}\eta_{xxx}+O(\alpha\delta^2,\delta^4)=0 \tag{37}$$

４．２ 深水近似

深水近似$\delta\to\infty$ では$\kappa=1$ とおく。このとき演算子 Tおよび$\tilde{T}$は各々Hおよび$-H$に還元する。ここで Hは Hilbert 変換

$$Hf(x,t)=P\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(y,t)}{y-x}dy \tag{38}$$

である。このとき（２２）、（２３）および（２５）は次のようになる。

$$\eta_t+Hu+\epsilon[(u\eta)_x+H(\eta Hu_x)_x]+O(\epsilon^2)=0 \tag{39}$$

$$u_t+\eta_x+\epsilon(uu_x+\eta_x H\eta_x)+O(\epsilon^2)=0 \tag{40}$$

$$\eta_{tt}-H\eta_x+\epsilon[-\eta\eta_x+2\eta_t H\eta_t-H\eta_t^2-H(\eta H\eta_x)]_x+O(\epsilon^2)=0 \tag{41}$$

参考のため以下に $O(\epsilon^2)$ の項まで含む近似方程式を記しておく：

$$\eta_t + Hu + \epsilon[(u\eta)_x + H(\eta H u_x)_x]$$

$$+\epsilon^2[H\{\eta H(\eta H u_x)_x\} + \frac{1}{2}H(\eta^2 u_{xx}) + \frac{1}{2}(\eta^2 H u_x)_x] + O(\epsilon^3) = 0 \tag{42}$$

$$u_t + \eta_x + \epsilon(uu_x + \eta_x H\eta_x)$$

$$+\epsilon^2[2\eta_x H(uu_x) - 2\eta_x u H u_x + \eta_x H(\eta H\eta_x) + \eta\eta_x\eta_{xx}] + O(\epsilon^3) = 0 \tag{43}$$

$$\eta_{tt} = H\eta_x + \epsilon F_x + \epsilon^2 G_x + O(\epsilon^3) \tag{44a}$$

$$F = \eta\eta_x + H(\eta H\eta_x) + H(H\eta_t)^2 \tag{44b}$$

$$G = \frac{1}{2}(\eta^2 H\eta_x)_x + H\{\eta H(\eta H\eta_x)_x\} + \frac{1}{2}H(\eta^2\eta_{xx}) - \eta_x(H\eta_t)^2$$

$$+2H\{\eta H(\eta_t\eta_{xt})\} - 2\eta_t H(\eta H\eta_t)_x + 2H(\eta_x\eta_t H\eta_t) \tag{44c}$$

（４４）は次の周期解（いはゆる Stokes 解）を持つ。

$$\eta = const. + a\cos\xi + \frac{1}{2}\epsilon k a^2\cos 2\xi + \frac{3}{8}\epsilon^2 k^2 a^3 \cos 3\xi + O(\epsilon^3) \tag{45a}$$

$$\xi = kx - \omega t \tag{45b}$$

$$\omega = \sqrt{k}\{1 + \frac{1}{2}\epsilon^2 k^2 a^2 + O(\epsilon^3)\},\ (k > 0) \tag{45c}$$

５．応用

ここで提出した方程式は、その導出が波の弱非線形の仮定にのみ基づいており、流体の深さには何等制限が無いためその適用範囲は広い。また議論が物理空間で行われているため、種々のモデル方程式は波動現象と直接結びつけられるという利点を持っている。以下では理論の応用のいくつかについて簡単に述べる。

i) 流体底面が平らでない場合[8]

最初等角写像によって底の形状を平らな底へ変換し、その後ここでの議論を適用する。

ii) ２層流体系（流体底面は平ら）[9]

a) 上端固定の場合　b) 上端自由境界の場合

iii) 2層流体系（流体底面が平らでない場合）

iv) 多層流体系

ii)-iv) では各層ごとに速度ポテンシャルの展開を行い、境界条件でこれらを関連づければよい。iv) は連続的な密度分布の近似を与える。

v) 3次元空間への拡張

これが最も興味あると思われるが、一般の3次元空間での満足のゆく扱いは現在できていない。しかし波の進行方向に垂直な方向に対して物理量、例えば波の表面形状がゆるやかに変化する（弱2次元運動）と仮定すると、ここでの議論が適用できる。実際これによって Kadomtsev-Petviashvili 方程式（あるいは2次元 KdV 方程式）の有限深さの場合への拡張版が導かれる[10]。

参考文献

[1] G.B. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves* (Wiley, New York, 1974).

[2] *Nonlinear Water Waves*, edited by K. Horikawa and H. Maruo (Springer-Verlag, New York, 1988).

[3] *Nonlinear Dispersive Wave Systems*, edited by L. Debnath (World Scientific, Singapore, 1992).

[4] Y. Matsuno, Phys. Rev. Lett. **69**, 609(1992).

[5] L.J.F. Broer, Appl. Sci. Res. **31**, 377(1975).

[6] D.J. Kaup, Prog. Theor. Phys. **54**, 396(1975).

[7] M. Jaulent and I. Miodek, Lett. Math. Phys. **1**, 243(1976).

[8] Y. Matsuno, to appear in J. Fluid Mech.(1993).

[9] Y. Matsuno, to be published.

[10] Y. Matsuno, to be published.