

## 順圧不安定による擾乱の飽和過程について —— 2次元流体の統計理論 ——

石岡 圭一 ・ 余田成男 (京大 ・ 理)

### 1. はじめに

2次元非発散流体は、流体の最も簡単なモデルのひとつであり、これまでさまざまな理論的研究の対象となってきた。例えば、シア不安定などから生じた乱流の状態が、最終的にいくつかの孤立渦にまとまっていくことに対して、理論的解釈が試みられてきた。この問題に対して、最近、Robert and Sommeria (1991) および Sommeria, Staquet and Robert (1991) が新しい統計力学的理論を提出し、さらに数値実験によってその理論の検証を行なった。ここでは、地球流体力学的興味から、彼らの理論を球面上に拡張して整理するとともに、実際に球面上の流体方程式を数値的に解くことによって、理論の検証を行なう。

### 2. 基礎方程式

基礎方程式として球面上の2次元非粘性非発散流体の渦度方程式；

$$\frac{Dq}{Dt} \equiv \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{1}{a^2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \frac{\partial q}{\partial \mu} - \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \frac{\partial q}{\partial \lambda} \right) = 0 \quad (1)$$

を用いる。ここに、 $\psi(\lambda, \mu, t)$  : 流線関数,  $q \equiv \nabla^2 \psi$  : 渦度,  $\lambda$  : 経度,  $\varphi$  : 緯度,  $\mu \equiv \sin \varphi$  : サイン緯度,  $t$  : 時刻,  $a$  : 球半径である。また、 $\nabla^2$  は球面上の水平ラプラシアンで以下のように表される。

$$\nabla^2 \equiv \frac{1}{a^2} \left[ \frac{1}{1 - \mu^2} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ (1 - \mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} \right\} \right]$$

### 3. 保存則

基礎方程式 (1) で支配される球面上の2次元流体の運動には以下のような保存量がある (流線関数および渦度による表式を採用しておく)。

#### 1. 角運動量 ( $M_1, M_2, M_3$ )

$$M_k \equiv \iint Y_k q dS \quad (k = 1, 2, 3)$$

#### 2. カシミール ( $I_f$ )

$$I_f \equiv \iint f(q) dS : f(q) \text{ は } q \text{ の任意関数}$$

#### 3. 運動エネルギー ( $E$ )

$$E \equiv -\frac{1}{2} \iint \psi q dS$$

ここに、

$$\iint dS \equiv \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\lambda \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\lambda \int_{-1}^1 d\mu$$

$$Y_1(\varphi) \equiv \sin \varphi$$

$$Y_2(\lambda, \varphi) \equiv \cos \varphi \cos \lambda$$

$$Y_3(\lambda, \varphi) \equiv \cos \varphi \sin \lambda$$

ここで、保存されるべき角運動量が3成分あることが球面の特殊性の1つである。

#### 4. 統計力学的考えの導入 (Robert and Sommeria(1991))

基礎方程式 (1) より、2次元非発散流体では流体粒子の運動に沿って渦度が保存されている。さらに、非発散性から各流体粒子の面積も保存される。そこで、シア不安定などによって生じた乱流的状态においてはこれらの流体粒子をランダムに動く質点のようにみなし、統計力学的な取り扱いをすることによって最終的に出現する平衡状態が予測できるのではないかというのが Robert and Sommeria(1991) の着想である。彼らは剛体境界条件を課した平面上で議論を展開したが、以下では、彼らの理論を球面上で整理しなおす。

離散的な渦度分布を考え、初期に渦度  $Q_i (i = 1, 2, \dots, n)$  のパーセルが全表面に対して  $R_i$  の割合で存在するとする。このとき、

$$\sum_{i=1}^n R_i = 1 \quad (2)$$

である。このような初期状態から出発して渦度の混合がすすんだ状態を考える。ある点  $(\lambda, \mu)$  の十分小さな近傍において、渦度  $Q_i$  のパーセルが占める割合 (または、存在確率) を  $r_i(\lambda, \mu)$  と定義すると、この  $r_i(\lambda, \mu)$  に対して、

$$\sum_{i=1}^n r_i(\lambda, \mu) = 1 \quad (3)$$

$$\iint r_i dS = R_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (4)$$

が成立する。この  $r_i$  を用いて混合エントロピー  $S$  を次で定義する:

$$S \equiv - \iint \left( \sum_{i=1}^n r_i \log r_i \right) dS \quad (5)$$

もし、各パーセルの運動がランダム (エルゴード的) であるとする、この混合エントロピーが最大になるような  $r_i$  分布が最も実現されやすいと考えられる。そこで、3. にまとめた保存則の束縛のもとで  $S$  の極値を与えるような  $r_i(\lambda, \mu)$  分布をもとめることを考える。まず、 $(\lambda, \mu)$  における渦度  $q(\lambda, \mu)$  は、 $Q_i (i = 1, 2, \dots, n)$  のいずれかであるはずであるが、実際には微細な構造は観測不能であり、 $(\lambda, \mu)$  の十分小さな近傍での平均値 (確率的に考えれば期待値) が観測されると考えて、

$$q(\lambda, \mu) = \sum_{i=1}^n r_i(\lambda, \mu) Q_i \quad (6)$$

と表されるものとする。このようにして  $q(\lambda, \mu)$  を  $r_i(\lambda, \mu)$  と結びつけておくことによって、3. にまとめた  $q(\lambda, \mu)$  に対する保存則を  $r_i(\lambda, \mu)$  に対する束縛条件として扱うことができる。以上のような準備のもとに、 $r_i(\lambda, \mu)$  に対する束縛条件は、変分  $\delta r_i(\lambda, \mu)$  に対して次のように表せる：

1. 角運動量保存より、

$$0 = \delta M_k = \iint Y_k \delta q dS = \iint Y_k \sum_{i=1}^n Q_i \delta r_i dS \quad (k = 1, 2, 3) \quad (7)$$

2. エネルギー保存より、

$$\begin{aligned} 0 = \delta E &= -\frac{1}{2} \iint (\delta \psi \nabla^2 \psi + \psi \nabla^2 \delta \psi) dS \\ &= -\iint \psi \delta \nabla^2 \psi dS \\ &= -\iint \psi \delta q dS \\ &= -\iint \psi \sum_{i=1}^n Q_i \delta r_i dS \quad (8) \end{aligned}$$

\* 1行目から2行目への変形には Green の定理を用いた。

3. パーセルの面積保存 (4) より、

$$0 = \delta R_i \equiv \iint \delta r_i dS \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (9)$$

4. 確率分布の総和 (3) より、

$$0 = \delta G(\lambda, \mu) \equiv \sum_{i=1}^n \delta r_i(\lambda, \mu) \quad (10)$$

以上の束縛条件のもとに混合エントロピー  $S$  が最大となるような  $r_i$  分布を求めるために、Lagrange の未定乗数法を用いる。すなわち、 $S$  の変分  $\delta S$ ：

$$\delta S = - \iint \sum_{i=1}^n (\log r_i + 1) \delta r_i dS \quad (11)$$

および上記の保存量の変分に対して未定乗数  $\alpha_k, \beta, \gamma_i, \epsilon(\lambda, \mu)$  ( $k = 1, 2, 3, \quad i = 1, 2, \dots, n$ ) を導入して

$$\delta F \equiv \delta S - \sum_{k=1}^3 \alpha_k \delta M_k - \beta \delta E - \sum_{i=1}^n \gamma_i \delta R_i - \iint \epsilon(\lambda, \mu) \delta G dS \quad (12)$$

が任意の変分 $\delta r_i$ に対して0になるような $r_i(\lambda, \mu)$ 分布を求めれば、それが前述の束縛条件のもとでのエントロピー $S$ の極値を与える。(12)に(7)~(11)を代入すると、

$$\delta F = - \iint \sum_{i=1}^n f_i(\lambda, \mu) \delta r_i dS \quad (13)$$

ここに、

$$f_i(\lambda, \mu) \equiv \log r_i + 1 + Q_i \left( \sum_{k=1}^3 \alpha_k Y_k - \beta \psi \right) + \gamma_i + \epsilon \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (14)$$

任意の変分 $\delta r_i$ に対して $\delta F = 0$ となるためには、 $f_i = 0$ でなければならない。すなわち、

$$\log r_i + 1 + Q_i \left( \sum_{k=1}^3 \alpha_k Y_k - \beta \psi \right) + \gamma_i + \epsilon = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (15)$$

$r_i$ について解くと、

$$r_i = \exp \left\{ -Q_i \left( \sum_{k=1}^3 \alpha_k Y_k - \beta \psi \right) - \gamma_i - \epsilon - 1 \right\} \quad (16)$$

この式を(3): ( $\sum_{i=1}^n r_i = 1$ )に代入して $\epsilon$ を求めると、

$$\exp(\epsilon + 1) = \sum_{i=1}^n \exp \left\{ -Q_i \left( \sum_{k=1}^3 \alpha_k Y_k - \beta \psi \right) - \gamma_i \right\} \quad (17)$$

(17)を(16)に代入することにより、

$$r_i = \frac{\exp \left\{ -Q_i \left( \sum_{k=1}^3 \alpha_k Y_k - \beta \psi \right) - \gamma_i \right\}}{\sum_{i=1}^n \exp \left\{ -Q_i \left( \sum_{k=1}^3 \alpha_k Y_k - \beta \psi \right) - \gamma_i \right\}} \quad (18)$$

さらに、上式の両辺に $Q_i$ を掛けて $i$ について総和をとると、(6)より $q = \sum_{i=1}^n r_i Q_i$ であるから、

$$q = \frac{\sum_{i=1}^n Q_i \exp \left\{ -Q_i \left( \sum_{k=1}^3 \alpha_k Y_k - \beta \psi \right) - \gamma_i \right\}}{\sum_{i=1}^n \exp \left\{ -Q_i \left( \sum_{k=1}^3 \alpha_k Y_k - \beta \psi \right) - \gamma_i \right\}} \quad (19)$$

が得られる。さらに、 $q \equiv \nabla^2 \psi$ を代入すれば、(19)は $\psi$ のみに対する偏微分方程式になる。

## 5. 理論の検証

Sommeria, Staquet and Robert(1991)にならって、この理論の検証をある特殊な場合において考える。初期状態として2種類の渦度( $Q_1, Q_2$ )しか存在しない場合を仮定する。このとき、(19)より

$$\begin{aligned} q &= \frac{Q_1 \exp \left\{ -Q_1 \left( \sum_{k=1}^3 \alpha_k Y_k - \beta \psi \right) - \gamma_1 \right\} + Q_2 \exp \left\{ -Q_2 \left( \sum_{k=1}^3 \alpha_k Y_k - \beta \psi \right) - \gamma_2 \right\}}{\exp \left\{ -Q_1 \left( \sum_{k=1}^3 \alpha_k Y_k - \beta \psi \right) - \gamma_1 \right\} + \exp \left\{ -Q_2 \left( \sum_{k=1}^3 \alpha_k Y_k - \beta \psi \right) - \gamma_2 \right\}} \\ &= \frac{Q_1 \exp \left\{ -(Q_1 - Q_2) \left( \sum_{k=1}^3 \alpha_k Y_k - \beta \psi \right) - (\gamma_1 - \gamma_2) \right\} + Q_2}{\exp \left\{ -(Q_1 - Q_2) \left( \sum_{k=1}^3 \alpha_k Y_k - \beta \psi \right) - (\gamma_1 - \gamma_2) \right\} + 1} \quad (20) \end{aligned}$$

もし、解が定常であったとすると $q = q(\psi)$ が成立していなければならないから、

$$\alpha_k = 0 \quad (k = 1, 2, 3)$$

であることが分かる。このとき (20) は

$$q = \frac{Q_1 \exp \{(Q_1 - Q_2)\beta\psi - (\gamma_1 - \gamma_2)\} + Q_2}{\exp \{(Q_1 - Q_2)\beta\psi - (\gamma_1 - \gamma_2)\} + 1} \quad (21)$$

となる。(21) を  $\psi$  について解くと

$$(Q_1 - Q_2)\beta\psi - (\gamma_1 - \gamma_2) = \log \frac{q - Q_2}{Q_1 - q} \quad (22)$$

となる。従って、この統計理論が正しければ、2種類の渦度 ( $Q_1, Q_2$ ) からなる初期状態から時間発展して得られる (定常の) 平衡状態においては、 $\psi$  と  $\log \{(q - Q_2)/(Q_1 - q)\}$  とが直線にのることが予想される。

## 6. 数値実験

5. までの理論は、非粘性流体に対するものであるが、数値計算において非粘性流体を取り扱うのはほとんど不可能であるため、粘性流体において粘性係数ができるだけ小さな場合を扱うものとする (粘性があっても、エネルギー保存が十分によく成立していれば、粘性は渦度の微細構造を平均化するにすぎず、理論の成立条件に対して悪影響は与えないと考えられる)。

基礎方程式は、(1) に粘性項を付加することにより、

$$\frac{\partial q_*}{\partial t_*} = -\frac{1}{a_*^2} \left( \frac{\partial \psi_*}{\partial \lambda} \frac{\partial q_*}{\partial \mu} - \frac{\partial \psi_*}{\partial \mu} \frac{\partial q_*}{\partial \lambda} \right) + \nu_* \left( \nabla_*^2 + \frac{2}{a_*^2} \right) q_* \quad (23)$$

(\*は次元つきの量であることを示す。また、粘性項は角運動量保存則に対する要請から、球面ではこのような形をとる。)

長さのスケールとして  $a_*$ 、時間のスケールとして  $T_*$  を用いて、以下のように無次元化を行なう。

$$\psi_* = 2\pi a_*^2 T_*^{-1} \psi$$

$$q_* = 2\pi T_*^{-1} q$$

$$t_* = T_* t$$

$$\nu_* = a_*^2 T_*^{-1} \nu$$

$$\nabla_*^2 = a_*^{-2} \nabla^2$$

以上を (21) に代入すると

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -2\pi \left( \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \frac{\partial q}{\partial \mu} - \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \frac{\partial q}{\partial \lambda} \right) + \nu (\nabla^2 + 2) q \quad (24)$$

が得られる。この (24) を数値計算における基礎方程式として用いる。また、この系の Reynolds 数  $Re$  は、初期の無次元エネルギー  $E_0$ :

$$E_0 \equiv \left[ -\frac{1}{2} \iint \psi q dS \right]_{t=0}$$

を用いて、

$$Re \equiv \frac{2\pi\sqrt{2E_0}}{\nu}$$

と定義する。

初期状態として、以下の式で与えられる渦度分布を考える：

$$[q]_{t=0} = \bar{q}(\mu) + q'(\lambda, \varphi)$$

$$\bar{q}(\mu) = \begin{cases} Q_1 & (|\mu| \leq W - D) \\ \frac{Q_1 + Q_2}{2} - \frac{Q_1 - Q_2}{2} \tanh \left\{ \tan \left( \frac{\pi}{2} \cdot \frac{|\mu| - W}{D} \right) \right\} & (W - D < |\mu| < W + D) \\ Q_2 \equiv \frac{W}{W-1} Q_1 & (|\mu| \geq W + D) \end{cases}$$

$$q'(\lambda, \varphi) = \begin{cases} B_1 & (r \leq R - d) \\ \frac{B_1 + B_2}{2} - \frac{B_1 - B_2}{2} \tanh \left\{ \tan \left( \frac{\pi}{2} \cdot \frac{r - R}{d} \right) \right\} & (R - d < r < R + d) \\ B_2 \equiv \frac{R}{R-2} B_1 & (r \geq R + d) \end{cases}$$

ここに、

$$r \equiv 1 - \cos \theta$$

$$\cos \theta \equiv \sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos(\lambda - \lambda_0)$$

基本場 $\bar{q}$ は緯度円に平行な、主に2種類の渦度( $Q_1, Q_2$ )からなる渦度分布で、初期擾乱 $q'$ は $(\lambda_0, \varphi_0)$ を中心とする円形の渦度分布である。どちらもギブス現象を防止するために平滑化しており、 $Q_2$ および $B_2$ は

$$\iint \bar{q} dS = 0, \quad \iint q' dS = 0$$

を満たすように定義してある。

数値計算は球面スペクトル法(T213切断)によって行ない、時間積分はアダムズ法を用いた(球面スペクトル法の詳細については、余田, 山田, 石岡(1990)を参照)。Reynolds数 $Re = 3000$ とし、基本場のパラメータは $W$ を与えて $Q_1 = 1/W, D = 0.1$ とした。また、擾乱のパラメータは、 $B_1 = 0.001, R = 0.1, d = 0.05, \lambda_0 = 0, \varphi_0 = \pi/4$ に固定した。

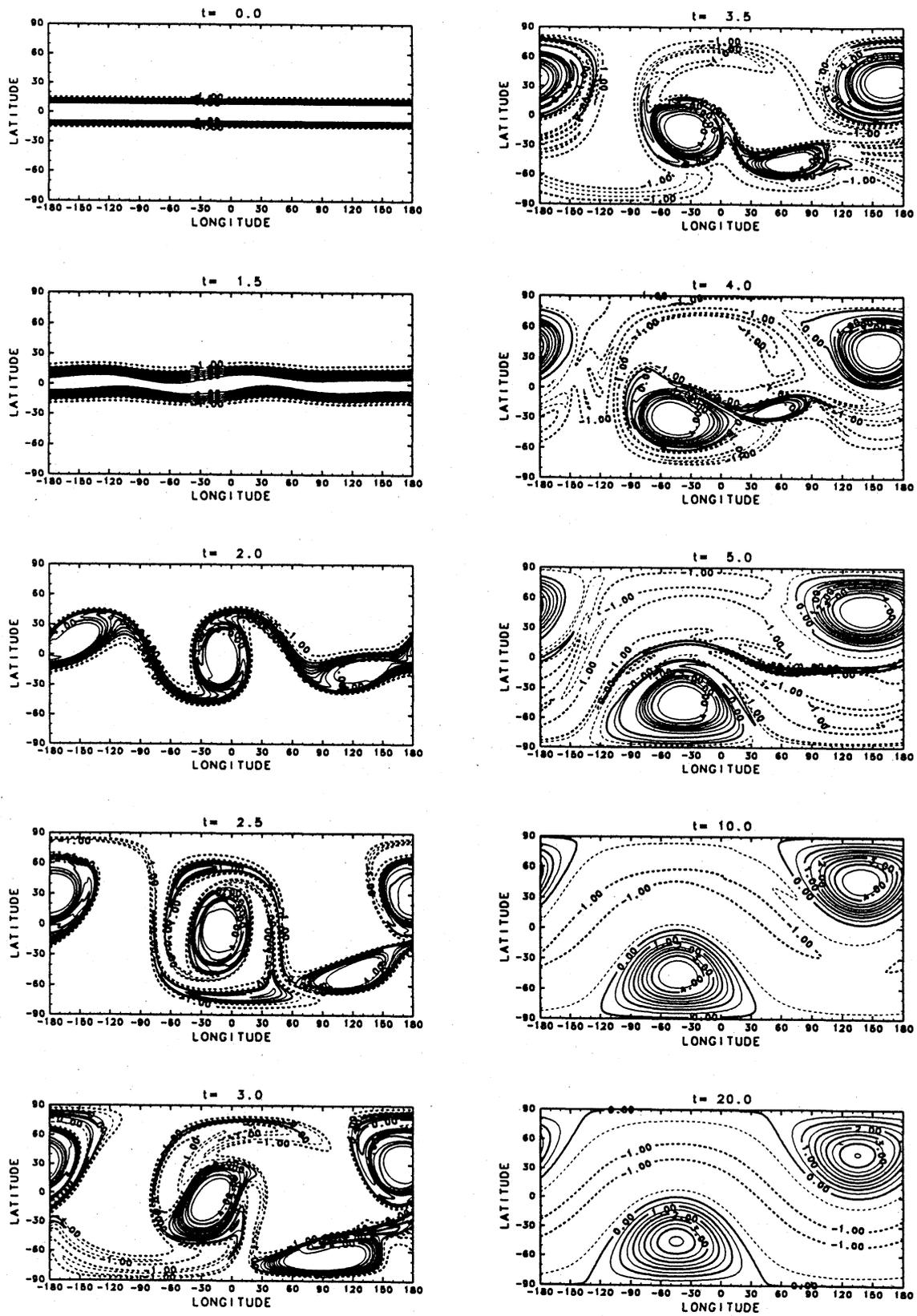


図 1: 渦度場の時間発展 ( $W = 0.2$ )

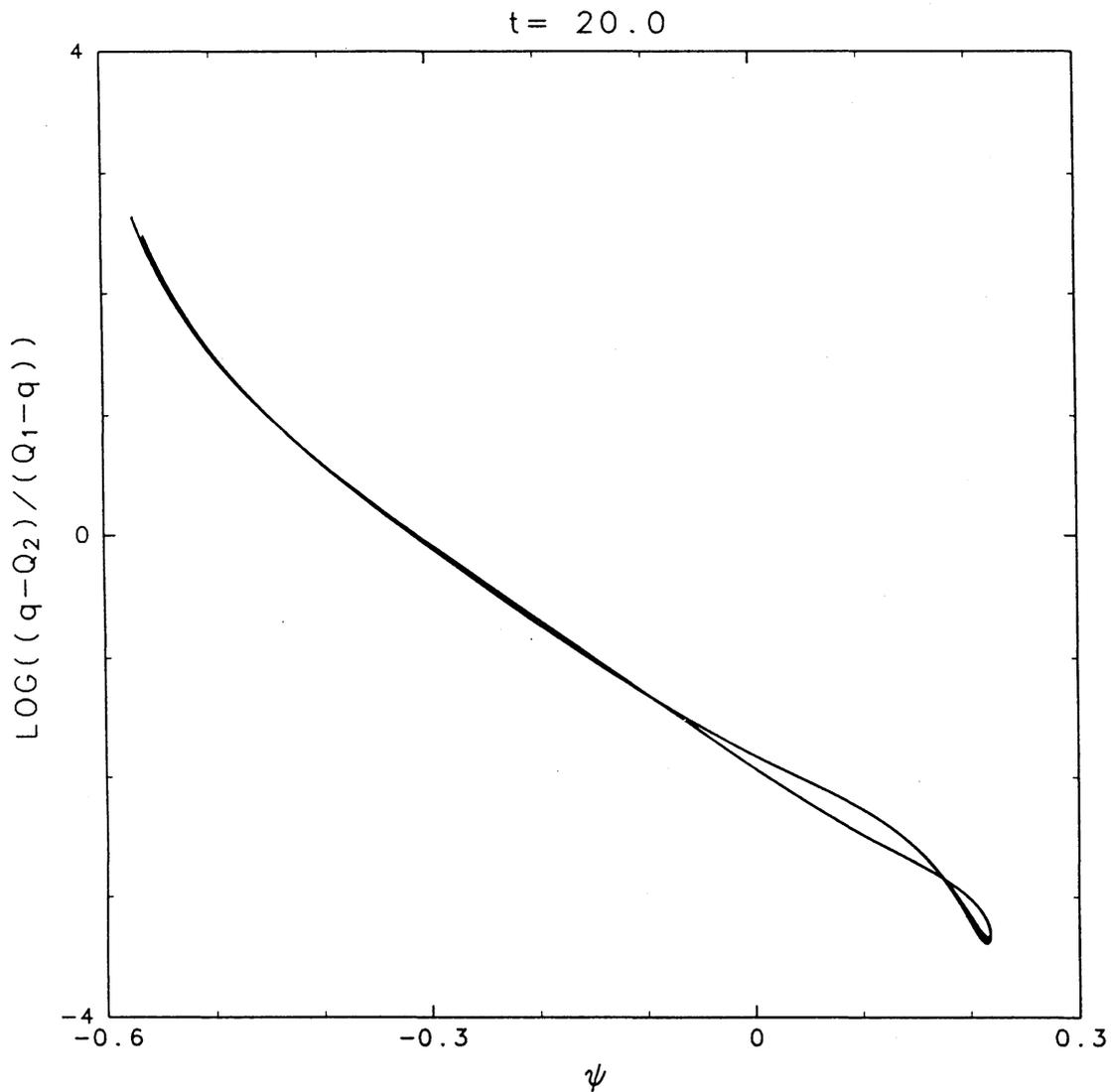


図 2: 図 1 の  $t = 20.0$  における  $\psi$  と  $\log((q - Q_2)/(Q_1 - q))$  との対応関係

## 7. 結果

図 1 は、 $W = 0.2$  の場合の渦度場の時間発展である。このように、初期場は緯度円に平行な渦度分布であるが、シア不安定により波状の擾乱が発達していく。図 1 の場合は初期に(東西)波数 3 が卓越して発達しているが、この初期に発達する波数は  $W$  によって決まり、 $W = 0.1$  では 4、 $W = 0.3$  では 2 となる。また、 $W \geq 0.5$  では基本場は安定である。初期に発達した波数に対応して  $t = 2.0$  では 3 個の渦が形成されているが、時間が経過するとともに渦どうしの融合が起こり、最終的にはちょうど球の中心に対して対称の位置にある 2 個の孤立渦にまとまって定常的になっている ( $t = 20.0$ )。  $W = 0.2$  の場合に限らず、初期の基本場が不安定であるすべての場合について、このように、最終的に球の中心に対して対称の位置にある 2 個の孤立渦が出現するという結果が得られた。この性質は 3. の保存則

の節でも述べたように、球面上では角運動量保存則が3成分に対して成立しなければならないという特殊性に起因しているものと考えられる (Sommeria, et.al.(1991) などによる平面上での数値実験では1個の孤立渦が出現することに対応している)。

図2は5.の理論の検証をもとにして、図1の最終状態 ( $t = 20.0$ ) に対して、各格子点における流線関数  $\psi$  と渦度  $q$  の関数  $\log((q - Q_2)/(Q_1 - q))$  との対応関係を描いたものである。図1からも分かるように最終状態では流れがほとんど定常であるため、 $\psi$  と  $\log((q - Q_2)/(Q_1 - q))$  とは一部を除いて1本の曲線にのっている ( $\psi$  が大きな領域で曲線が2本に分岐しているのは、孤立渦が2個あることに対応している)。それだけでなく、渦度の混合が十分に行なわれていると考えられる  $q = (Q_1 + Q_2)/2$  すなわち  $\log((q - Q_2)/(Q_1 - q)) = 0$  の付近では(22)式で予想したように、 $\psi$  と  $\log((q - Q_2)/(Q_1 - q))$  との間はかなり良い直線関係が成立している。

$W$  が0.2以外の場合においても、平衡状態における  $\psi$  と  $\log((q - Q_2)/(Q_1 - q))$  との間関係は、 $\log((q - Q_2)/(Q_1 - q)) = 0$  の付近ではかなり良く直線にのっている。

## 8. まとめ

2次元非発散非粘性流体に対する Robert and Sommeria(1991)の理論を球面上で整理するとともに、球面スペクトルモデルを用いた数値実験によって理論の検証を行なった。その結果、最終平衡状態において、Sommeria, et.al.(1991)の平面上での実験結果とは異なって2個の孤立渦が出現したが、理論から予想されるような  $\psi$  と  $\log((q - Q_2)/(Q_1 - q))$  との直線関係が成立することが確認された。従って、彼らの統計理論は球面上でも有効であると考えられる。

## 9. 参考文献

Robert, R. and J. Sommeria 1991: Statistical equilibrium states for two-dimensional flows *J. Fluid Mech.*, **229**, 291-310

Sommeria, J., C. Staquet and R. Robert 1991: Final equilibrium state of a two-dimensional shear layer *J. Fluid Mech.*, **233**, 661-689

余田成男・山田道夫・石岡圭一, 1990: スペクトル法による球面上の流体方程式の数値解法. 京都大学大型計算機センター広報, **23**, 283-290.