

非線形シュレディンガー方程式に対する 3 次分散項の効果

九大応力研 及川正行 (Masayuki Oikawa)

1. はじめに

分散系における平面波の非線形変調は非線形性が弱いとき非線形シュレディンガー方程式 (NLS)

$$i \frac{\partial A}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \omega''(k_0) \frac{\partial^2 A}{\partial \chi^2} + \alpha |A|^2 A = 0 \quad (1)$$

で記述されることはよく知られている。¹⁾ ここで変調波の主要項は $\epsilon A(\chi, \tau) e^{i(k_0 x - \omega(k_0)t)}$ + c.c., $\chi = \epsilon(x - \omega'(k_0)t)$, $\tau = \epsilon^2 t$ で表わされ, $\omega = \omega(k)$ は線形分散関係, α は相互作用定数である. a を代表振幅とすると $\epsilon = ak_0 \ll 1$ としている. しかし, $k = k_0$ が分散曲線の変曲点 k_c に近いときには, $\omega''(k_0)$ は小さく, 3 次の分散項もきいてくるであろう. この場合, $X = \epsilon^{2/3}(x - \omega'(k_0)t)$, $T = \epsilon^2 t$ を導入すると, (1) の代りに

$$i \frac{\partial A}{\partial T} - \beta \frac{\partial^2 A}{\partial X^2} - |A|^2 A = i\gamma \frac{\partial^3 A}{\partial X^3} \quad (2)$$

をえる. ここで

$$\beta = -\frac{\omega''(k_0)}{2\epsilon^{2/3}}, \quad \gamma = \frac{1}{6} \omega'''(k_0) \quad (3)$$

である. A の適当なスケールリングによって非線形項の係数は 1 にすることができることに注意しよう. 以下では (2) を MNLS とよぶ. (2) は表面張力重力波や光ファイバーにおける非線形パルス伝播において現われる.

Akylas & Kung²⁾ は MNLS が双山孤立波の (無限) 系列をもつことを数値的に示した. また, Wai, Chen, Lee³⁾ は γ が小さいとき, 特異摂動法によって, NLS のソリトン解を最低次の近似とする近似解は (γ が小さくなると, 指数関数的に小さくなる) 放射を伴うことを示した.

本研究では, 周期的境界条件の下で MNLS の解が γ の値が小さくなるにつれてどのように変化するかを数値的に調べる.

2. 平面波の変調不安定

$$A_0 = a_0 \exp(-ia_0^2 T + ib_0), \quad (a_0 > 0, b_0 : \text{実数}) \quad (4)$$

は MNLS の解である. 実関数攪乱 $\hat{a}(X, T)$, $\hat{\theta}(X, T)$ を導入して

$$A = (a_0 + \hat{a}) \exp(-ia_0^2 T + ib_0 + i\hat{\theta})$$

を (2) に代入して, $\hat{a}, \hat{\theta}$ について線形化し, $(\hat{a}, \hat{\theta}) \propto e^{i(\kappa X - \Omega T)}$ とすれば, 分散関係

$$\Omega = \gamma \kappa^3 \pm \sqrt{\kappa^2(\beta^2 \kappa^2 - 2\beta a_0^2)} \quad (5)$$

をえる。従って、平面波解 (4) の変調不安定性は次の規準による。

(i) $\beta < 0$ ($\omega''(k_0) > 0$) \Rightarrow 安定。

(ii) $\beta > 0$ ($\omega''(k_0) < 0$) \Rightarrow $0 < \kappa < \kappa_c \equiv \sqrt{2/\beta a_0}$ のとき、不安定。

増幅率は γ によらず、従って、NLS のときと同じである。 $\gamma \neq 0$ の効果は攪乱を ($\gamma > 0$ ならば右へ) 伝播させることである。

3. 計算条件

β の値は $\beta = 0.1817\dots$ と固定する。計算に用いた γ の値は $\gamma = 0, \gamma = 0.0936\dots, \gamma = 0.01, \gamma = 0.005$ の 4 通りである。

初期条件は

$$A(X, 0) = 1 - 0.1 \cos(\kappa X), \quad 0 \leq X \leq L \equiv 2\pi/\kappa$$

で周期 L の周期的境界条件とする。計算に用いた κ の値は $\kappa = s\kappa_c$ ($s = 0.7, 0.35, 0.27, 0.22, 0.18$) の 5 通りである。 $s = 0.7, 0.35, 0.27, 0.22, 0.18$ に対して不安定域 $0 < \kappa < \kappa_c$ 内にあるモードの数はそれぞれ、 $n = 1, 2, 3, 4, 5$ であることに注意する。このように条件は Yuen & Ferguson⁴⁾ が NLS に対して行った計算の条件と同様である。

計算スキームは空間的にはフーリエ変換し、時間的な積分はルンゲ・クッタ型の公式であるフェールベルグの公式を用い、時間ステップ幅は精度を保つように自動調節されている⁵⁾。計算は次の 3 つの保存量を十分な精度で保つように行った。

$$I_1 = \int_0^L |A|^2 dX, \quad I_2 = i \int_0^L \left(A^* \frac{\partial A}{\partial X} - A \frac{\partial A^*}{\partial X} \right) dX,$$

$$I_3 = \int_0^L \left\{ \beta \frac{\partial A}{\partial X} \frac{\partial A^*}{\partial X} + \frac{i\gamma}{2} \left(\frac{\partial A^*}{\partial X} \frac{\partial^2 A}{\partial X^2} - \frac{\partial A}{\partial X} \frac{\partial^2 A^*}{\partial X^2} \right) - \frac{1}{2} |A|^4 \right\} dX.$$

$H = iI_3$ は MNLS に対するハミルトニアンであって、MNLS は

$$\frac{\partial A}{\partial T} = \frac{\delta H}{\delta A^*}, \quad \frac{\partial A^*}{\partial T} = -\frac{\delta H}{\delta A}, \quad (\delta: \text{汎関数微分})$$

と書けることに注意する。

4. 計算結果

図 1, 図 2, 図 3, 図 4 はそれぞれ $\gamma = 0$ (NLS), $\gamma = 0.0936\dots, \gamma = 0.01, \gamma = 0.005$ に対する $|A|$ の時間発展 (左側の列) と対応する A のフーリエ成分の絶対値の時間発展 (右側の列) を示したものである。いずれの場合も $\beta = 0.1817\dots$ である。実際の計算では周期 L が 2π になるように $\xi = (2\pi/L)X$ と変換している。左側の図の XI-AXIS はこれのことである。右側の列の図の N-AXIS はモード番号のことである。

いくつかの事柄が指摘できる。

- (イ) 初期値における不安定モードの数が増すに従って、解の挙動は複雑になる。この性質は NLS にも MNLS にもあてはまる。
- (ロ) NLS ($\gamma = 0$) の場合、 $|A|$ の波形は秩序だっている。このことはフーリエ成分でみると各時刻において高波数成分と低波数成分に強い相関があるという点に現われている。
- (ハ) NLS の場合、励起されるフーリエ成分の数は意外に多い。実際、 $\gamma = 0.0936 \dots$ の場合より多い。このことは NLS をスペクトル法で解くときにはフーリエ・モードの数を十分大きくとる必要があることを示唆する。モード数が少ないと、そのためにカオスの挙動（数値的カオス）が起ったりする。⁶⁾
- (ニ) $\gamma = 0.0936 \dots$ の場合、 $s = 0.7$ のとき以外は $|A|$ の発展は無秩序に見える。NLS の場合とは定性的に異なる。励起されるフーリエ成分の数は比較的少ないが、 $s = 0.7$ のときを除いてほぼ一様に分布している。
- (ホ) $\gamma = 0.01$ の場合、 $s = 0.7$ のときでさえ $|A|$ の発展は無秩序に見える。励起されるフーリエ成分の数は、 $\gamma = 0.0936 \dots$ のときより多くなる。フーリエ成分の時間発展の図において、 $s = 0.7, 0.35, 0.27, 0.22, 0.18$ のときそれぞれ $n = 8, 17, 22, 28, 35$ 付近に時間軸とほぼ平行な尾根がみられる。
- (ヘ) $\gamma = 0.005$ の場合、 $|A|$ の発展もフーリエ成分の発展も全体的には NLS の場合と似てくる。フーリエ成分の分布に (ホ) で述べたのと同様の尾根が $s = 0.7, 0.35, 0.27, 0.22, 0.18$ に対してそれぞれ $n = 16, 31, 41, 49, 61$ の付近に見られる。これらの高波数成分は図 5 のゆっくりした変動に重った細かな変動として現われる。

Wai 達³⁾ は MNLS

$$i \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + |u|^2 u = i\sigma \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \quad (6)$$

の無限区間における解を σ が小さいときに指数関数的に小さくなる項も考慮した摂動法によって調べ、NLS ソリトン解を第 1 近似とする解は波数 $1/(2\sigma)$ の放射を放出することを示した。この放射は (ホ), (ヘ) で述べた高波数域で出現する尾根と関係があると期待される。MNLS (2) の場合にこの波数を換算すると、 ξ 座標での波数 k_r は

$$k_r = \beta \sqrt{\frac{\beta}{2\gamma s}} = \frac{0.05477}{\gamma s} \quad (\beta = 0.1817 \dots \text{ のとき}) \quad (7)$$

となる。この公式に基づく値は表 1 のようになり、(ホ), (ヘ) で述べた値とよく一致する。

γ	s	0.7	0.35	0.27	0.22	0.18
0.01		7.82	15.65	20.29	24.90	30.43
0.005		15.65	31.30	40.57	49.79	60.86

表1. 公式 (7) による放射波の波数

図1～4で示した解が規則的であるのか、カオス的であるのかを調べるために最大リアプノフ指数の計算を試みた。最大リアプノフ指数は次のように計算した。 $\bar{A}(X, T)$ を (2) の考えている解として、(2) の A に $\bar{A}(X, T) + B$ を代入し、 B が十分小さいとして B について線形化すると

$$i \frac{\partial B}{\partial T} - \beta \frac{\partial^2 B}{\partial X^2} - 2|\bar{A}|^2 B - \bar{A}^2 B^* = i\gamma \frac{\partial^3 B}{\partial X^3} \quad (8)$$

をえる。 $T=0$ で任意に初期値 $B(X, 0)$ を与えて、(8) を解き、 $d(T) = \|B(X, T)\|$ (実際の計算では $B(X, T)$ は有限次元ベクトルで、 $\|B(X, T)\|$ はユークリッド・ノルム) とする。 T_0 を適当な正数として

$$\lambda_T = \frac{1}{T - T_0} \log \frac{d(T)}{d(T_0)}$$

とおく。これの $T \rightarrow \infty$ の極限

$$\lambda = \lim_{T \rightarrow \infty} \lambda_T$$

が一般に最大リアプノフ指数を与える。⁷⁾ ただし、初期値 $B(X, 0)$ の選びかたによっては最大リアプノフ指数を与えない場合もある。実際の計算では $d(T)$ があまり大きくならないように一定の時間間隔ごとに、 $B(X, T)$ のノルムを規格化してやる。 $\lambda > 0$ と考えられる場合には、 λ への収束が比較的速いが、 $\lambda = 0$ と考えられる場合には λ への収束は非常に遅い。図6は収束値が $\lambda = 0$ と考えられる場合の例である。図7は収束値が $\lambda > 0$ と考えられる場合の例である。NLS は可積分であるから、当然 $\lambda = 0$ であるべきであって、この点からも図6に示した場合は $\lambda = 0$ に収束すると判断してよいように思われる。すると λ の 0 か正かは表2のようになる。 $\lambda = 0$ の場合は解の挙動は規則的、 $\lambda > 0$ の場合はカオス的と考えられる。

γ	s	0.7	0.35	0.27	0.22	0.18
0.0		0	0	0	0	0
0.0936		0	正	正	正	正
0.01		正	正	正	正	正
0.005		0	正	正	正	正

表2. 最大リアプノフ指数の符号

ここで現われたカオスの挙動にとっては境界条件が周期的であることが決定的に重要であるように思われる。

また、Wei 達によって見出された放射の振幅は $\gamma \rightarrow 0$ のとき指数関数的に 0 になるので、 $\gamma \rightarrow 0$ のとき MNLS(2) の解は NLS の解に結局は近づくように思われる。

参考文献

- 1) たとえば, T.Taniuti and N.Yajima : J. math. Phys. **10**(1969) 1369.
- 2) T.R.Akylas and T.-J.Kung : J. Fluid Mech. **214**(1990) 489.
- 3) P.K.A.Wai, H.H.Chen and Y.C.Lee : Phys. Rev. **A41**(1990) 426.
- 4) H.C.Yuen and W.E.Ferguson, Jr. : Phys. Fluids **21**(1978) 1275.
- 5) 森正武 : FORTRAN 77 数値計算プログラミング, 増補版 (岩波書店, 1987).
- 6) M.J.Ablowitz and B.M.Herbst : SIAM J. Appl. Math. **50**(1990) 339.
- 7) A.J.Lichtenberg and M.A.Lieberman : Regular and Chaotic Dynamics, 2nd ed. (Springer, 1991).

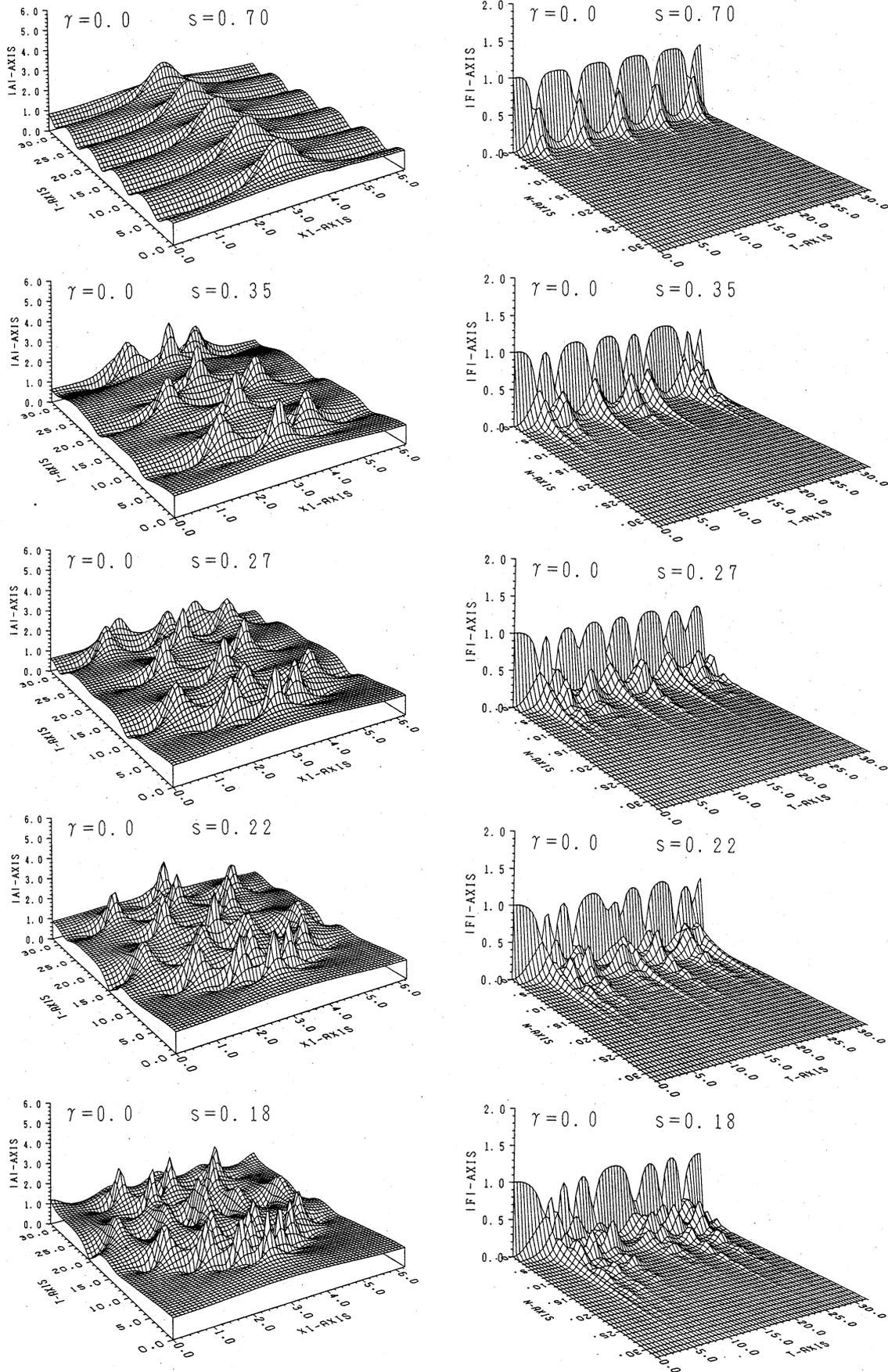


図1. $|A|$ の時間発展と A のフーリエ成分の絶対値の時間発展. ($\gamma = 0$)

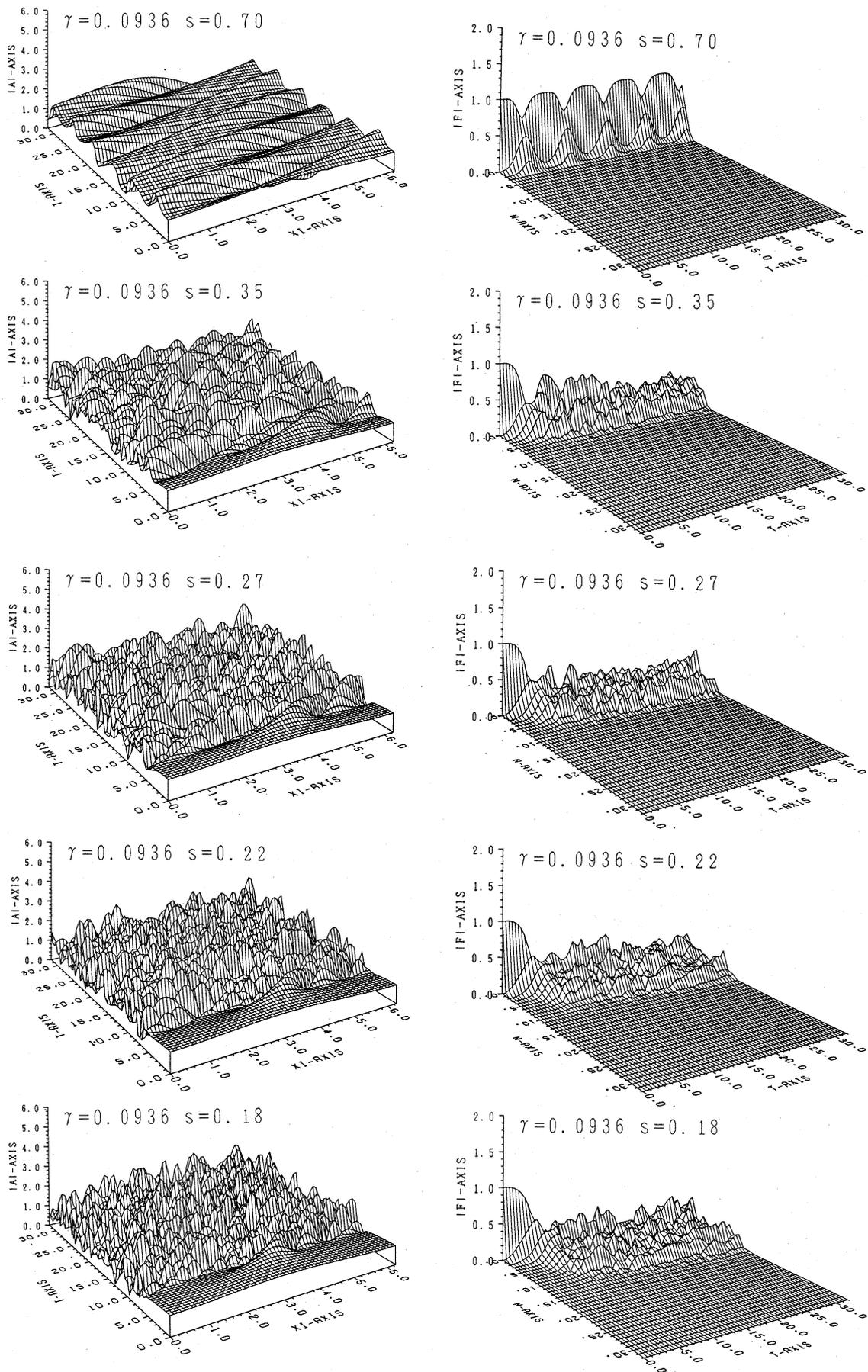


図 2. $|A|$ の時間発展と A のフーリエ成分の絶対値の時間発展. ($\gamma = 0.0936 \dots$)

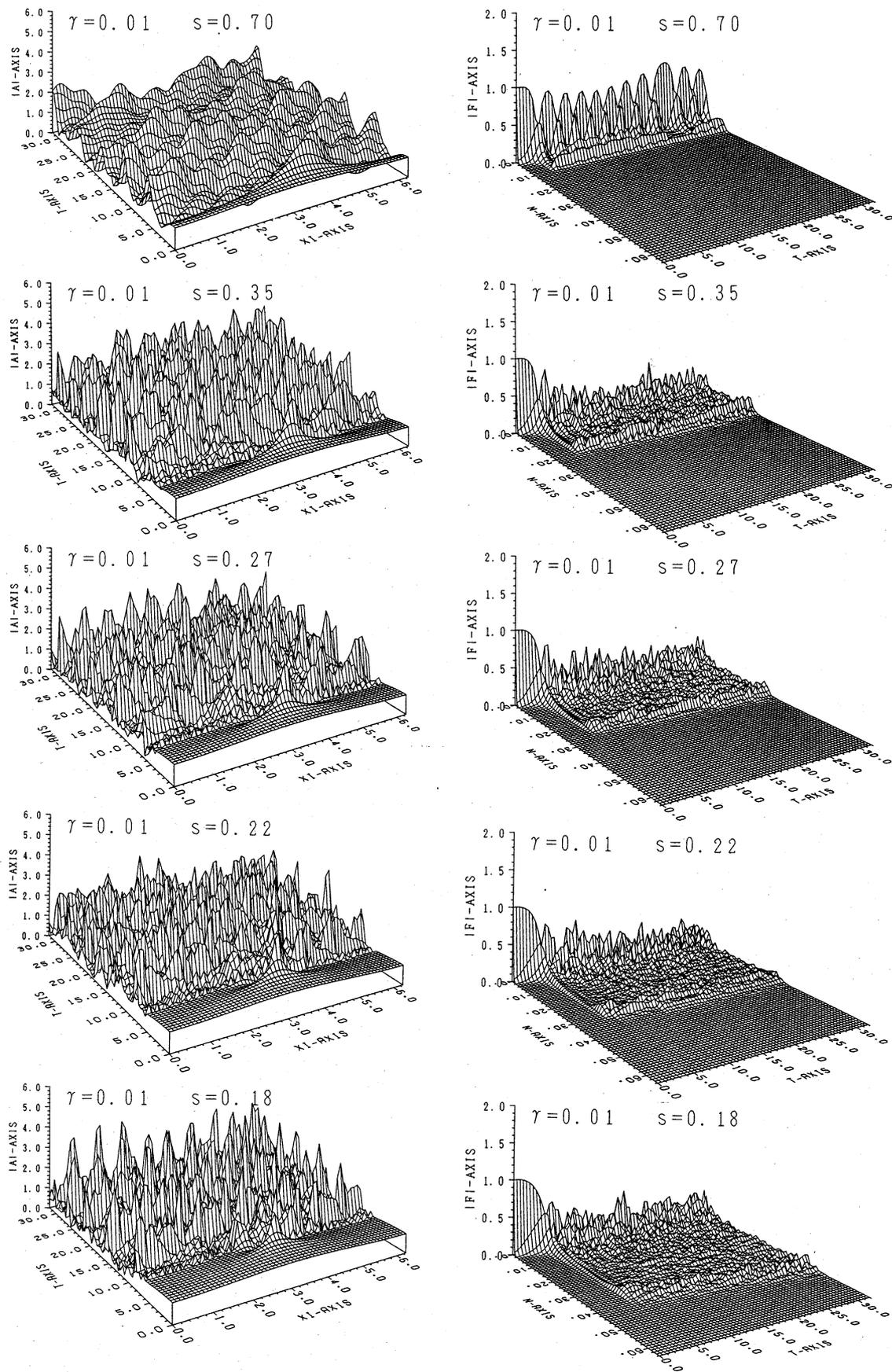


図3. $|A|$ の時間発展と A のフーリエ成分の絶対値の時間発展. ($\gamma = 0.01$)

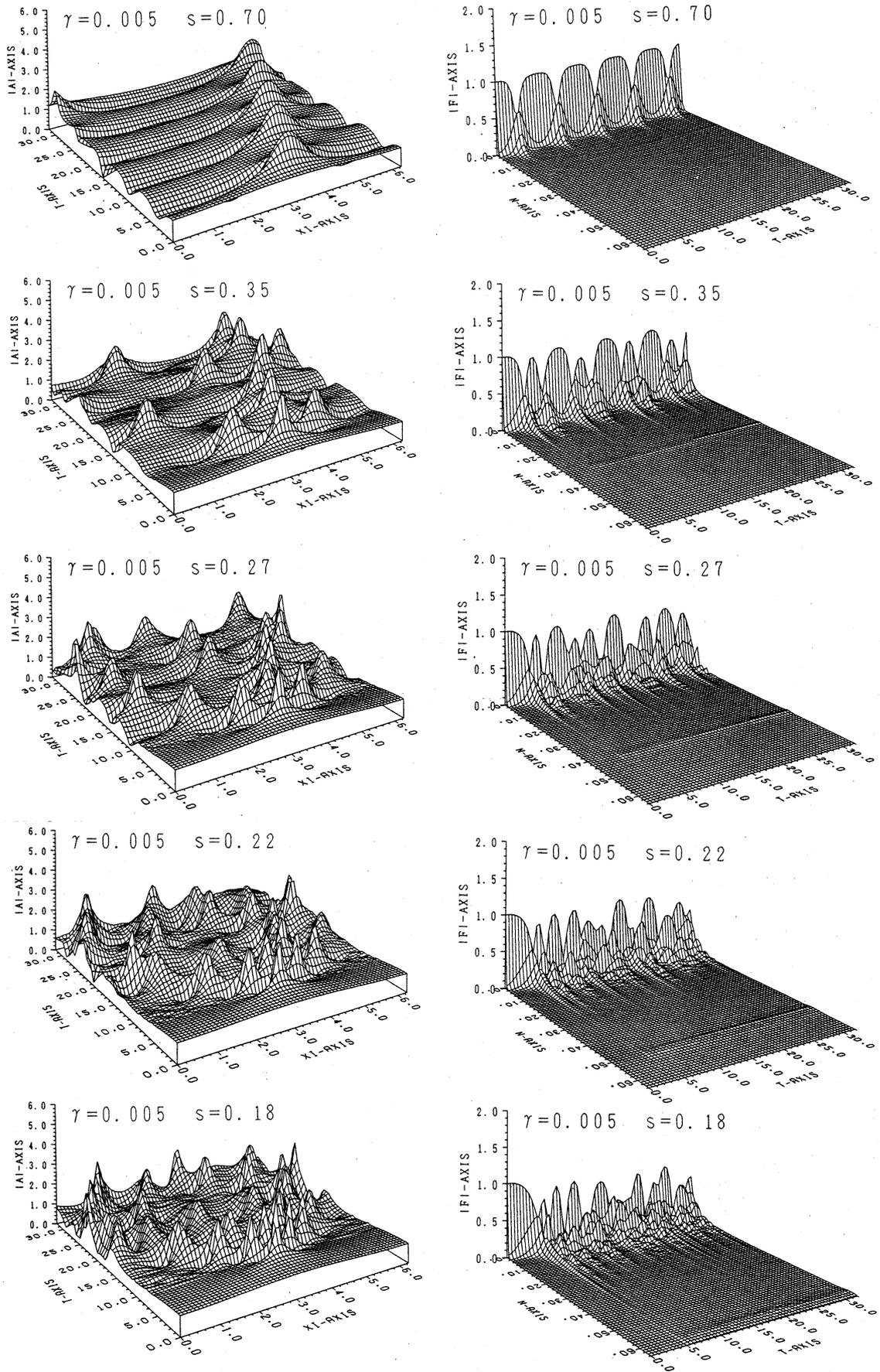


図4. $|A|$ の時間発展と A のフーリエ成分の絶対値の時間発展. ($\gamma = 0.005$)

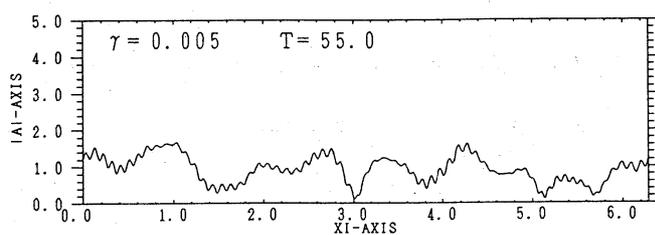


図5. $T = 55.0$ における $|A|$ の波形. ($\gamma = 0.005, s = 0.18$)

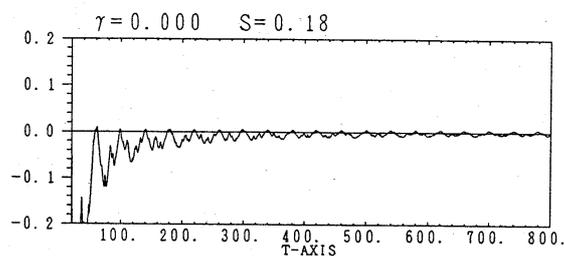
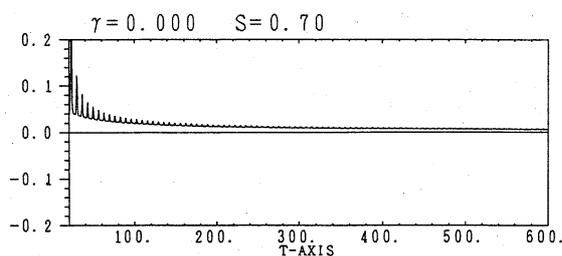


図6. λ_T の λ への収束の様子.
($\lambda = 0$ と考えられる場合の例)

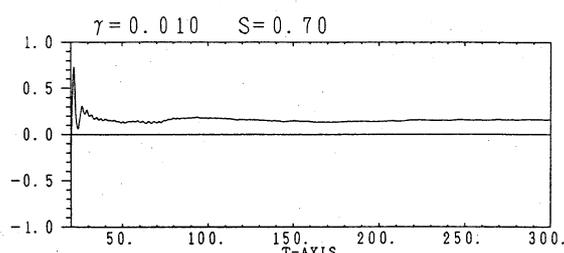
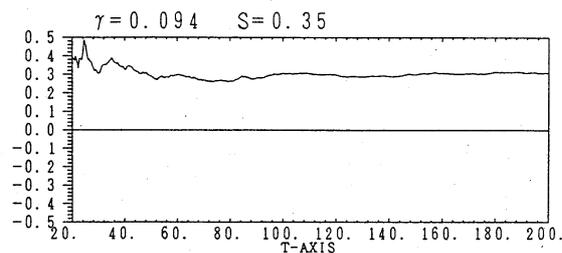
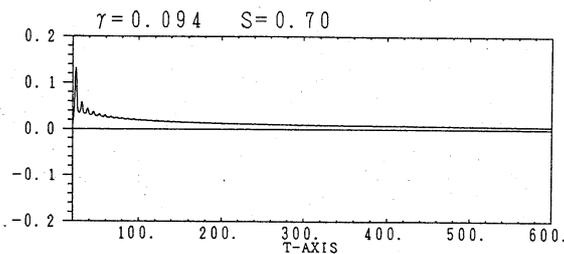


図7. λ_T の λ への収束の様子. ($\lambda > 0$ と考えられる場合の例)