

高次要素を用いた残差反復法による
楕円型方程式の解の数値的検証法
Numerical verifications for solutions of elliptic equations
using residual iterations with higher order elements

山本 野人[†]
Nobito Yamamoto

中尾 充宏[†]
Mitsuhiro T. Nakao

[†]九州大学理学部
Department of Mathematics, Kyushu University

1 はじめに

楕円型方程式の解の検証を行なう場合に、方程式の右辺の値が大きいと検証がうまく行かないことがある。このような困難に対処するには、近似解を用いた残差反復の手法によって方程式の解を 0 の近傍に引き戻す方法が用いられる (文献 [12] を参照)。ここでは a posteriori な方法によって引き戻しを行なうことを提唱し、さらに高次要素を用いることで検証効率と精度の飛躍的な向上が得られることを示す。

2 問題と検証法

領域 Ω を R^n ($1 \leq n \leq 3$) の凸多角形領域、 f を $H^1(\Omega)$ から $L^2(\Omega)$ への有界連続な写像として次の Dirichlet 問題を考える。

$$\begin{cases} \Delta u = -f(u) & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2-1)$$

以下、 Ω を二次元の領域として扱う。 g を $L^2(\Omega)$ に属する関数とし、ポアソン方程式

$$\begin{cases} \Delta v = -g & \text{in } \Omega, \\ v = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2-2)$$

の解 v が $H^2(\Omega)$ の元であるとしよう。また $S_h \subset H_0^1(\Omega)$ を有限要素空間とし、その次元を n とする。さらに v_h を、

$$(\nabla v_h, \nabla \psi) = (g, \psi) \quad \text{for } \forall \psi \in S_h,$$

を満たす S_h の元とする。ただし (\cdot, \cdot) は L^2 内積を表わす。このとき、通常、 S_h は次の近似性を持つ。

$$\|v - v_h\|_{H_0^1} \leq C_0 h \|g\|_{L^2}. \quad (2-3)$$

ここに C_0 は領域と S_h に依る定数、 h は S_h のパラメータで、通常メッシュサイズを表わす。

方程式 (2-1) の解の存在の検証は次のように行なう。斉次境界条件の逆ラプラス作用素を K と書くことにしよう。今、 $H_0^1(\Omega)$ の部分集合 U に対し、 $V = \{v \in H_0^1(\Omega); v = -Kf(u), \forall u \in U\}$ を作る。もし $V \subset U$ となれば、 $-Kf$ が $H_0^1(\Omega)$ から $H_0^1(\Omega)$ へのコンパクト作用素であることから、Schauder の不動点定理により方程式の解が U の中に存在することが証明される。

この関係を満足する集合を見いだすことを、計算機を使って行なうことを考えよう。計算機上に U, V をつくり、さらに $V \subset U$ を確かめるには次のようにする。

集合 V の S_h への H_0^1 -projection をとって、これを $R(V)$ と書き、 V の S_h への rounding と呼ぶことにする。これは区間係数を用いることで、計算機上で specify できる。また、 S_h の直交補空間からある集合 $RE(V)$ をとってきて、

$$V \subset R(V) \oplus RE(V) \quad (2-4)$$

となるようにする。この $RE(V)$ を rounding error と呼ぼう。これは有限要素法の誤差評価の式を使って表現されるものである。

この rounding, rounding error を用い、元の検証条件のかわりに、

$$R(V) \oplus RE(V) \subset U$$

を満たすような U を構成する。

もっと具体的に述べよう。まずはじめに、もとの問題に対する S_h 上の近似解 \hat{u}_h をなんらかの方法に依って求めておく。 U を構成するプロセスは、反復計算になる。最初の U の候補を $u^{(0)} = \hat{u}_h$ として $U^{(0)} = \{u^{(0)}\}$ と決めよう。また、考えている U の候補が S_h からみ出している部分の大きさをはかる量として、 α というものを考える。はじめは $\alpha^{(0)} = 0$ である。そして次の反復を行なう。

$i \geq 0$ のとき、 $U^{(i)}$ に対する $V^{(i)}$ は、

$$V^{(i)} = \{v^{(i)} \in H_0^1(\Omega) \mid v^{(i)} = -Kf(u^{(i)}) \quad \forall u^{(i)} \in U^{(i)}\}$$

となる。この $V^{(i)}$ を以下のように包み込むことにしよう。

まず $R(V^{(i)})$ について、 $u^{(i)} \in U^{(i)}$ に対して $v_h^{(i)} \in S_h$ を次の方程式

$$(\nabla v_h^{(i)}, \nabla \psi) = (f(u^{(i)}), \psi) \quad \forall \psi \in S_h$$

を満たすように定め、 $R(V^{(i)})$ を $u^{(i)}$ が $U^{(i)}$ 全体を動くときに $v_h^{(i)}$ のなす集合とする。これは、 S_h 内の subset であり、区間係数を用いて次のように包み込むことが出来る事を注意しておく。

$$R(V^{(i)}) \subset \sum_{j=1}^n [a_j, \bar{a}_j] \psi_j$$

ここに ψ_j ($j = 1, \dots, n$) は S_h の基底、 $[a_j, \bar{a}_j]$ は区間係数で、 $[a_j, \bar{a}_j] = \{a \in R \mid a_j \leq a \leq \bar{a}_j\}$ の意味である。

次に $RE(V^{(i)})$ を

$$RE(V^{(i)}) = \{v \in S_h^\perp \mid \|\nabla v\| \leq C_0 \sup_{u^{(i)} \in U^{(i)}} \|f(u^{(i)})\|\}$$

と定めれば、(2-3) により (2-4) が満たされることがわかる。そこで検証条件は、

$$R(V^{(i)}) \oplus RE(V^{(i)}) \subset U^{(i)}$$

となる。もしこの条件が満足されなければ、 δ を予め定めておいたある正の実定数として、

$$\begin{aligned} U_h^{(i+1)} &= \sum_{j=1}^n [a_j - \delta, \bar{a}_j + \delta] \psi_j \\ \alpha^{(i+1)} &= C_0 \sup_{u^{(i)} \in U^{(i)}} \|f(u^{(i)})\| + \delta \\ [\alpha^{(i+1)}] &= \{v \in S_h^\perp \mid \|\nabla v\| \leq \alpha^{(i+1)}\} \end{aligned}$$

と置き、 $U^{(i+1)}$ を

$$U^{(i+1)} = U_h^{(i+1)} \oplus [\alpha^{(i+1)}],$$

と定めて反復を続ける。 δ を用いる技法は δ -inflation と呼ばれる。詳細については 末尾に挙げた文献を参照されたい。

3 残差反復

$f(u)$ の値が大きい問題では、反復中の $\alpha^{(i+1)}$ が大きくなるため、区間の爆発的な拡大が起こり、検証が不可能になる場合がある。例えば次のような例を挙げよう。

$\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ とし、問題

$$\begin{cases} \Delta u = -\lambda u^2 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

を考える。 $\lambda = 1.0$ としよう。有限要素空間 S_h は矩形メッシュ上の双一次要素からなるものにとる。このとき誤差評価に現われる定数は、

$$C_0 = \frac{1}{\pi},$$

となる。有限要素法によって計算された近似解に対する右辺の値は、

$$\|\lambda \hat{u}_h^2\| \simeq 277,$$

したがって α の値は、 $h = 1/40$ にとったときですら 2.21 を越えるものとなり、以後の計算値を爆発的に大きくならしめ、計算不能に陥る。

そこで有限要素近似解 $\hat{u}_h \in S_h$ を用いて解を原点の近傍に引き戻すことを考える。 \hat{u}_h は

$$(\nabla \hat{u}_h, \nabla \psi) = (f(\hat{u}_h), \psi), \quad \forall \psi \in S_h.$$

を満たすことを注意しておく。(2-1) を弱形式で書くと、

$$(\nabla u, \nabla \phi) = (f(u), \phi), \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega).$$

\hat{u}_h を引けば、

$$(\nabla(u - \hat{u}_h), \nabla \phi) = (f(u) - f(\hat{u}_h), \phi) + (f(\hat{u}_h), \phi) - (\nabla \hat{u}_h, \nabla \phi), \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega).$$

となる。ここで $u = \hat{u}_h + v_0 + w$ とおく。ただし、 v_0, w はそれぞれ次式を満たす $H_0^1(\Omega)$ の元である。

$$(\nabla v_0, \nabla \phi) = (f(\hat{u}_h), \phi) - (\nabla \hat{u}_h, \nabla \phi), \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega), \quad (3-1)$$

$$(\nabla w, \nabla \phi) = (f(\hat{u}_h + v_0 + w) - f(\hat{u}_h), \phi), \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega). \quad (3-2)$$

以下、(3-2) の解の存在を検証すればよい。(3-2) の右辺は一般に値が小さく、従来の方法では検証できなかったものも検証可能となることが期待される。一方、そのためには(3-1) から $\|v_0\|_{H_0^1}$ を評価することが必要であるが、このことは $\|f(\hat{u}_h) + \Delta \hat{u}_h\|_{H^{-1}}$ を評価することに対応している。いったん $\|v_0\|_{H_0^1}$ の評価が得られれば、Aubin-Nitsche の技法を用いることで、 $\|v_0\|_{L^2}$ も評価できる。すなわち、 v_0 を右辺とするポアソン方程式

$$\begin{cases} \Delta \xi = -v_0 & \text{in } \Omega, \\ \xi = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

の解 ξ を用いれば、

$$\begin{aligned} (v_0, v_0) &= (v_0, -\Delta \xi) \\ &= (\nabla v_0, \nabla \xi). \end{aligned}$$

ところが、 \hat{u}_h が有限要素近似解の時には、(3-1) により、 ξ の S_h への H_0^1 -projection は 0 であるから、 S_h の近似性から、

$$\|\nabla \xi\|_{L^2} \leq C_0 h \|v_0\|_{L^2},$$

となることが分かる。以上より、

$$\|v_0\|_{L^2} \leq C_0 h \|v_0\|_{H_0^1},$$

が得られる。

さて、 $\|v_0\|_{H_0^1}$ の評価を可能にする方法は、大きく分けて二通りある。

(i) a priori な方法 (文献 [12] を参照)

$f(\hat{u}_h)$ を右辺とするポアソン方程式

$$\begin{cases} \Delta \eta = -f(\hat{u}_h) & \text{in } \Omega, \\ \eta = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

の解 η を用いれば、

$$(\nabla v_0, \nabla \phi) = (\nabla \eta, \nabla \phi) - (\nabla \hat{u}_h, \nabla \phi).$$

ところが、

$$(\nabla \eta - \nabla \hat{u}_h, \nabla \psi) = 0, \quad \forall \psi \in S_h,$$

だから、 \hat{u}_h は η の S_h への H_0^1 -projection となっている。そこで、 S_h の近似性から、

$$\|\eta - \hat{u}_h\|_{H_0^1} \leq C_0 h \|f(\hat{u}_h)\|_{L^2}.$$

ゆえに

$$\|v_0\|_{H_0^1} \leq C_0 h \|f(\hat{u}_h)\|_{L^2}. \quad (3-3)$$

この方法は次の a posteriori な方法と比べて簡明ではあるが、 S_h として高次の要素を用いても精度が上がらないという限界がある。

(ii) a posteriori な方法

\hat{u}_h を Hermite 補間したものを (3-1) の右辺に用いるやり方もあるが ([9] 参照)、ここでは $\nabla \hat{u}_h$ 自体の regularity を上げることを考えよう。

今、 S_h^* を、 S_h の基底に境界上のノードに対応する基底をつけ加えたもので張られる空間とする (後で述べる例題を参照のこと)。二次元のベクトル値関数 $\overline{\nabla} \hat{u}_h$ を $\nabla \hat{u}_h \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ の $S_h^* \times S_h^*$ への L^2 -projection と定義し、 $\overline{\Delta} \hat{u}_h$ を $\overline{\Delta} \hat{u}_h = \nabla \cdot \overline{\nabla} \hat{u}_h$ と定義する。この時、 $\overline{\nabla}$ と $\overline{\Delta}$ に関する Green の公式

$$(\overline{\nabla} \hat{u}_h, \nabla \phi) + (\overline{\Delta} \hat{u}_h, \phi) = 0 \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega),$$

が成り立つ。これを用いれば、

$$(\nabla v_0, \nabla \phi) = (\overline{\nabla} \hat{u}_h - \nabla \hat{u}_h, \nabla \phi) + (\overline{\Delta} \hat{u}_h + f(\hat{u}_h), \phi) \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega),$$

となる。ここで $\phi = v_0$ とおき、さらに $\|v_0\|_{L^2} \leq C_0 h \|v_0\|_{H_0^1}$ を用いれば次の評価式が得られる。

$$\|v_0\|_{H_0^1} = \|f(\hat{u}_h) + \Delta \hat{u}_h\|_{H^{-1}} \leq \|\bar{\nabla} \hat{u}_h - \nabla \hat{u}_h\|_{L^2} + C_0 h \|\bar{\Delta} \hat{u}_h + f(\hat{u}_h)\|_{L^2}. \quad (3-4)$$

$\bar{\nabla} \hat{u}_h$ が $\nabla \hat{u}_h$ を近似し、さらに u にある程度の滑らかさがあれば、 $\bar{\Delta} \hat{u}_h$ は Δu を近似するので、 $h \rightarrow 0$ とするとき、式 (3-4) の右辺は h に関してあるオーダーで 0 に近づくことが期待される。なお、(ii) の方法は Ω が非凸多角領域の場合にも拡張できるという特徴を持つ。

4 例題と結果

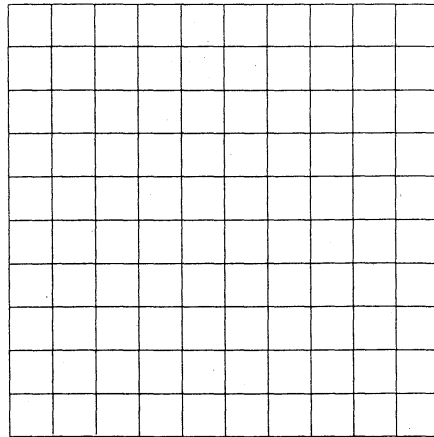
以下、(i) の方法、(ii) で S_h^* として双一次要素を用いた場合、同じく双二次要素を用いた場合を比較検討し、さらに (3-2) の扱いについても具体的な例に即して述べることにしよう。

これ以後用いる例題は、以前にも挙げた次のものとする。すなわち $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ とし、問題

$$\begin{cases} \Delta u = -\lambda u^2 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

を考える。ただし簡単のため $\lambda = 1.0$ としておく。有限要素空間 S_h は矩形メッシュ上の双一次要素、あるいは後の例では双二次要素からなるものにとる (図 1)。

Fig. 1

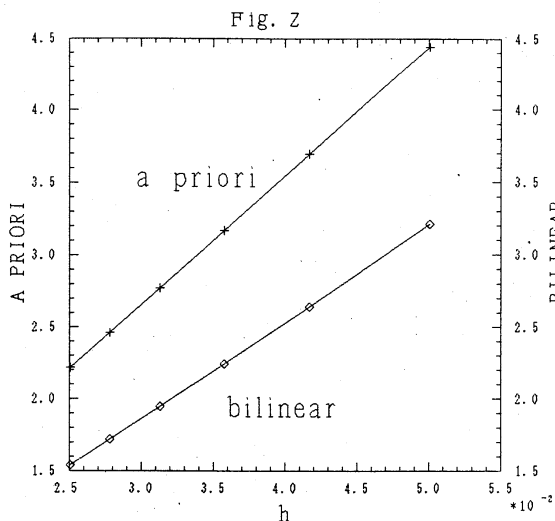


ノードの取り方は、例えば双一次要素に対しては、 S_h については内部の格子点上にとり、 S_h^* については境界も含めた格子点上にとる。誤差評価の式 (2-3) に現われる定数は、

$$C_0 = \frac{1}{\pi} \quad (\text{双一次要素の場合}), \quad C_0 = \frac{1}{2\pi} \quad (\text{双二次要素の場合}),$$

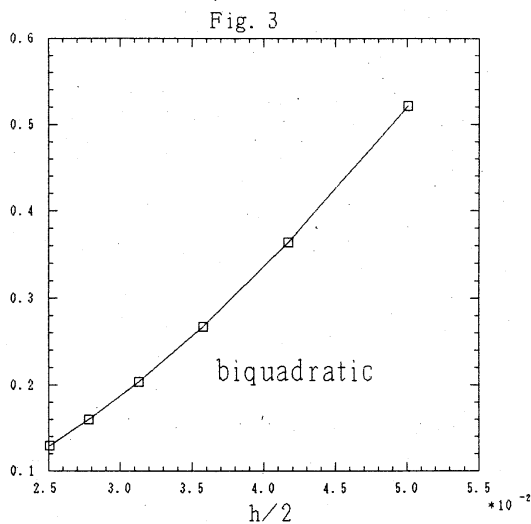
となる。双二次要素を用いるときにはもっと有利な値を採ることが出来ると思われるが、とりあえず、この値で済ますことにする。

まず、a priori な方法 (式 (3-3)) を用いたとき、および (3-4) に双一次要素を用いたときの $\|v_0\|_{H_0^1}$ の値を図に示そう (図 2)。横軸は h の値、縦軸は $\|v_0\|_{H_0^1}$ である。



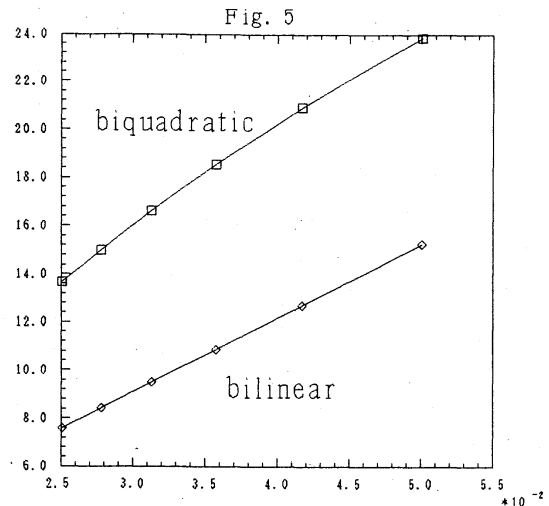
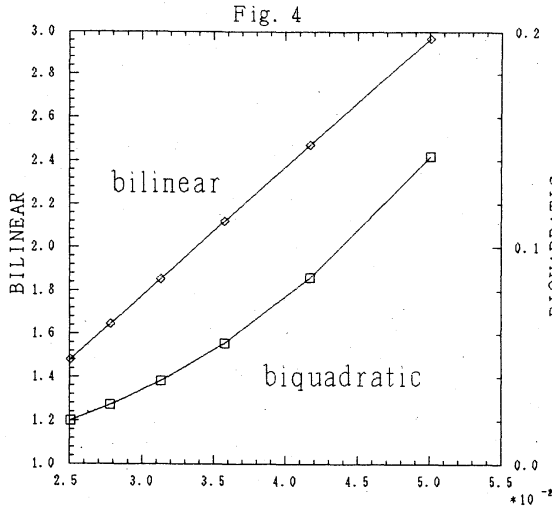
双一次要素を用いる方が多少良い結果を得られるが、a priori な方法の結果を用いた場合でも、 $h = 1/30$ から (3-2) に対する検証が可能になった。

つぎに、もっと高い精度を得るために双二次要素を用いた場合の結果を図 3 に示す。ただし横軸は $h/2$ としている (これは双一次要素の場合と同じノード数で比較するため)。



結果は非常に良くなっている (縦軸のスケールの違いに注意)。

(3-4) の第一項および第二項 (係数 C_0h を除く) と h との相関を図4 と図5 に示そう。縦軸は、図4では $\|\nabla\hat{u}_h - \nabla\hat{u}_h\|_{L^2}$, 図5では $\|\Delta\hat{u}_h + f(\hat{u}_h)\|_{L^2}$ である。両図とも横軸は双一次については h , 双二次については $h/2$ にとってある。図4の縦軸のスケールが、二つのグラフで異なっていることに注意されたい。双一次については、両方ともほぼ h のオーダーであることが分かる。第二項について予想されたものより良い結果が出ているのは、メッシュが一樣であるためだろうと思われる。双二次については、第一項についてはほぼ h^2 のオーダー、第二項については h について1次よりも低いオーダーとなっている。



双二次要素を用いた場合に対して、(3-2) の検証を行なった。実際の計算は、Newton 法に準じた技法を用い、区間係数を右辺に持つ連立一次方程式を解くことになる。結果は以下のようになった。

w を含む集合を W , $H_0^1(\Omega)$ から S_h への H_0^1 -projection を P_h とし、 $W_h = \{w_h \in S_h \mid w_h = P_h w, w \in W\}$ としよう。真の解は近似解を中心とする集合 $\hat{u}_h + v_0 + W$ の中に含まれている。次の表に、 h の値各々に対して、集合 W を特徴づける値を示した。すなわち、 W_h のノード上の区間巾/2 の最大値を $\max |W_h|$, W_h の W に対する誤差の上限を $\sup_{w \in W} \|w - w_h\|_{H_0^1}$ として示し、さらに $\|v_0\|_{H_0^1}$ の値も掲げておいた。

h	$\max W_h $	$\sup_{w \in W} \ w - w_h\ _{H_0^1}$	$\ v_0\ _{H_0^1}$
$\frac{1}{10}$	0.97733	1.0483×10^{-2}	0.52078
$\frac{1}{12}$	0.60900	4.9105×10^{-3}	0.36265
$\frac{1}{14}$	0.41976	2.6046×10^{-3}	0.26593
$\frac{1}{16}$	0.30456	1.5111×10^{-3}	0.20278
$\frac{1}{18}$	0.23189	9.3714×10^{-4}	0.15943
$\frac{1}{20}$	0.18216	6.1232×10^{-4}	0.12847

以上の結果をまとめると、

1. 従来検証が出来なかった問題が、残差反復による引き戻しを行なうことで検証可能となった。
2. さらに高次要素を用いた a posteriori な手法によって、検証効率と精度の飛躍的な向上を見ることが出来た。

したがって今後検証を行なう際に、特に高精度のものが望まれる場合には、今回提唱した方法を併せて用いることが必要となるだろうと思われる。

References

- [1] Nakao, M.T., A numerical approach to the proof of existence of solutions for elliptic problems, *Japan Journal of Applied Mathematics*, 5, (1988) 313 - 332.
- [2] —, A computational verification method of existence of solutions for nonlinear elliptic equations, *Lecture Notes in Num. Appl. Anal.*, 10, (1989) 101 - 120. In *proc. Recent Topics in Nonlinear PDE 4*, Kyoto, 1988, *North - Holland/Kinokuniya*, 1989.
- [3] —, A numerical approach to the proof of existence of solutions for elliptic problems II, *Japan Journal of Applied Mathematics* 7 (1990), 477-488.
- [4] —, A numerical verification method for the existence of weak solutions for nonlinear boundary value problems, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 164 (1992), 489-507.
- [5] —, Solving nonlinear parabolic problems with result verification: Part I, in *Journal of Computational and Applied Mathematics* 38 (1991) 323-334.
- [6] Nakao, M.T. & Watanabe, Y., ———: Part II, Several space dimensional case, *Research Report of Mathematics of Computation*, Kyushu University, RMC 67-05 (1992), 10 pages.
- [7] Nakao, M.T. & Yamamoto, N., Numerical verifications of solutions for elliptic equations with strong nonlinearity, *Numerical Functional Analysis and Optimization* 12 (1991), 535-543.
- [8] —, Numerical verifications of solutions for nonlinear hyperbolic equations, *Research Report of Mathematics of Computation*, Kyushu University, RMC 66-07 (1991), 13 pages.
- [9] Watanabe, Y. & Nakao, M.T., Numerical verifications of solutions for nonlinear elliptic equations, to appear in *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*.
- [10] Yamamoto, N. & Nakao, M.T., Numerical verifications of solutions for elliptic equations in nonconvex polygonal domains, *Research Report of Mathematics of Computation*, Kyushu University, RMC 67-06 (1992), 28 pages.
- [11] Tsuchiya, T. & Nakao, M.T., Numerical verification of solutions of parametrized nonlinear boundary value problems with turning points, *Research Report of Mathematics of Computation*, Kyushu University, RMC 67-02 (1992), 17 pages.
- [12] Nakao, M.T., Solving nonlinear elliptic problems with result verification using an H^{-1} type residual iteration, *Research Report of Mathematics of Computation*, Kyushu University, RMC 67-07 (1992).