数理解析研究所講究録
第 834 巻 1993 年 1-12

On the iterative and minimizing sequences for semilinear elliptic boundary value problems *

学習院大理　水谷　明 (Akira Mizutani)

§ 概要　具体例として、次の非線形楕円型境界値問題を考える。

$$-\Delta u = e^u - 1 - u, \quad u > 0 \quad \text{in } \Omega \qquad (1)$$

$$u = 0 \qquad \text{on } \partial\Omega \qquad (2)$$

但し、Ω は $\mathbb{R}^2$ 内の有界領域とする。

境界値問題(1)(2)は、安定な自明解 $u \equiv 0$ の他に、不安定な解 $\bar{u} > 0$ を持つことが知られている。不安定解を数値的に実現することは一般に困難であるが、本報告では、Nehari 変分原理に基づく方法により、不安定解を逆中法の反復列で効率良く構成できることを示す。

§ Nehari 変分原理

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ は滑らかな境界 $\partial\Omega$ をもつ有界領域として、次の非線形楕円型境界値問題を考える。

---

* 鈴木貴氏（愛媛大・理）との共同研究である。

$$-\Delta u = f(u), \quad u>0 \qquad \text{in } \Omega \tag{3}$$

$$u = 0 \qquad \text{on } \partial\Omega \tag{4}$$

ここで、$f(s)$は$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$のC^2関数で次の条件を満足するものとする。

(i) 劣臨界的。

$$\lim_{s\to\infty}\frac{f(s)}{s^p}=0, \qquad n\geq 3,\ {}^{\exists}p\in\left(0,\frac{n+2}{n-2}\right) \tag{5}$$

$$\lim_{s\to\infty}\frac{\log f(s)}{s^\alpha}=0, \qquad n=2,\ {}^{\exists}\alpha\in(0,2) \tag{6}$$

(ii) 正値。

$$f(s)>0 \qquad (s>0) \tag{7}$$

(iii) $f(0)=f'(0)=0, \quad f(+\infty)=f'(+\infty)=+\infty$ (8)

(iv) $\dfrac{f(s)}{s}$ は単調増加。 (9)

(v) 十分大なsに対して、

$$F(s)\equiv\int_0^s f(s)ds \leq \left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)f(s), \quad {}^{\exists}\varepsilon\in\left(0,\frac{1}{2}\right) \tag{10}$$

<u>例</u>. 境界値問題(1)(2)は上の仮定を満たす。

非線形楕円型境界値問題(3)(4)は、安定な自明解$u\equiv 0$の他に、不安定解$\bar{u}>0$が存在する。不安定解を数値的に実現することは一般に難しい。例えば、$v_{j+1}:=(-\Delta_0)^{-1}f(v_j)$ ($-\Delta_0$は境界条件(4)がついたもの)により定義される単純

反復では、出発値 v_0 が、$0 \leq v_0 \leq \bar{u}$, $v_0 \neq \bar{u}$ ならば、安定解に収束し：$\|v_j\|_{L^\infty(\Omega)} \to 0$, $v_0 \geq \bar{u}$, $v_0 \neq \bar{u}$ ならば、発散する：$\|v_j\|_{L^\infty(\Omega)} \to +\infty$。Newton法においても事情は殆んど同じである。

変分法に基づいて、不安定解を捕える研究には、Eydeland-Spruck (1988) がある。本報告では、Nehari (1960) に基づく方法で行う。

以下、$(\cdot, \cdot)$, $\|\cdot\|$ はそれぞれ、$L^2(\Omega)$ の内積、ノルムを表わす。$F(s) = \int_0^s f(s)\,ds$ とおき、エネルギー $J(v)$ を、

$$J(v) = \frac{1}{2}\|\nabla v\|^2 - \int_\Omega F(v)\,dx \qquad (v \in H_0^1(\Omega))$$

により定める。

u を境界値問題 (3)(4) の解とすると、

$$\|\nabla u\|^2 = (f(u), u) \tag{11}$$

が成り立つ。特に、u が不安定解 ($u \neq 0$) ならば、Poincaré の不等式より (11) の値は正である。従って、

$$\mathcal{N} = \{ v \in H_0^1(\Omega) \mid 0 < \|\nabla v\|^2 = (f(v), v), \ v \geq 0 \text{ a.e. in } \Omega \}$$

とおくと、集合 $\mathcal{N}$ は境界値問題 (3)(4) の不安定解をすべて含み、安定解を含まない。

次の Nehari の定理は基本的である。

定理（Nehari）

$\mathcal{N}$ の中で $J(v)$ を最小にする不安定解 $u \in \mathcal{N}$ が存在する：

$$J(u) = \inf_{v \in \mathcal{N}} J(v) \quad (= d > 0)$$

この解 u を最小エネルギー解という。

上の定理は、エネルギー J を減少させる $\mathcal{N}$ の列があれば、不安定解を捕らえる可能性があることを示している。

§ 逆巾法による反復列

アルゴリズム　出発値 $v_0 \in \mathcal{N}$ を任意にとり、$T: v_j \in \mathcal{N} \mapsto v_{j+1} \in \mathcal{N}$ $(j = 0, 1, 2, \cdots)$ を次のように定める。

1. Poisson 方程式 $-\Delta w = f(v_j)$ in Ω, $w = 0$ on $\partial\Omega$ の解を w とする。
2. w の定数倍で，$\mathcal{N}$ の元が一意的に存在するので、それを $v_{j+1} \in \mathcal{N}$ とする。

この列 $\{v_j\} \subset \mathcal{N}$ は J を減少させる列で、次の結果が成り立つ。

定理　任意の部分列 $\{v_j'\} \subset \{v_j\}$ に対して、更に部分

列 $\{v_j''\} \subset \{v_j'\}$ をとることにより、ある不安定解 $\hat{u} \in \mathcal{N}$ に収束させることができる：

$$v_j'' \longrightarrow \hat{u} \quad \text{in} \quad H_0^1(\Omega).$$

注意　$\hat{u}$は必ずしも最小エネルギー解とは限らない。

§定理の証明概略

準備

空間次元は、$n \geqq 3$ の場合のみを考える。

$X = H_0^1(\Omega)$, $X_+ = \{v \in X \mid v(x) \geqq 0\}$ とおく。

$\mathcal{N}^i$ を、$\mathcal{N}^i = \{v \in X \mid \|\nabla v\|^2 > (f(v_+), v_+)\}$ により定める。但し、$v_+(x) = \max\{v(x), 0\}$.

負値の関数も考えるので、Jの定義を、

$$J(v) = \frac{1}{2}\|\nabla v\|^2 - \int_\Omega F(v_+)\,dx \quad (v \in X)$$

と改める。

命題 1　$\lim_{r \downarrow 0} \rho(r) = 0$ をみたす $\rho = \rho(r) > 0$ があって、

$$(f(v_+), v_+) \leq \rho(\|\nabla v\|)\|\nabla v\|^2 \quad (v \in X)$$

$$\int_\Omega F(v_+)\,dx \leq \rho(\|\nabla v\|)\|\nabla v\|^2 \quad (v \in X)$$

が成り立つ。

∵ 仮定(5)および Sobolev–Gagliardo–Nirenberg の不等式より成り立つ。 □

命題2　Xにおいて、0は$\mathcal{N}^i \cup \{0\}$の内点である。

∵　命題1より。 $\square$

命題3　任意の$w \in X_+ \setminus \{0\}$に対して、$tw \in \mathcal{N}$となる正の数$t$が一意的に存在する。$w$に$tw$を対応させる作用素を$Q$とする。

∵　$b(t) := \int_\Omega \frac{f(tw)}{tw} w^2 dx$は、仮定(9)より、$t \in (0, \infty)$の狭義単調増加関数である。仮定(8)より、$b(+0) = 0$, $b(+\infty) = +\infty$.
従って、$b(t) = \|\nabla w\|^2$を満たす$t > 0$が一意的に存在し$tw \in \mathcal{N}$となる。 $\square$

命題4　$d \equiv \inf_{v \in \mathcal{N}} J(v) > 0$.

∵　命題1、2より、$\|\nabla w\| = r$が十分小のとき、

$$B_r = \{w \in X \mid \|\nabla w\| = r\} \subset \mathcal{N}^i \cup \{0\}.$$

$$J(w) = \frac{1}{2}\|\nabla w\|^2 - \int_\Omega F(w_+) dx \geq \delta \|\nabla w\|^2, \quad \exists \delta > 0.$$

$v \in \mathcal{N}$を任意に固定する。
$\frac{d}{dt} J(tv) = t \int_\Omega \left\{ \frac{f(v)}{v} - \frac{f(tv)}{tv} \right\} v^2 dx$と仮定(9)より、
$J(tv)$は$0 \leq t \leq 1$で単調増加である。
ある$t \in (0, 1)$に対して、$\|\nabla(tv)\| = r$より、

$$J(v) \geq J(tv) \geq \delta r^2 > 0. \quad \square$$

<u>命題5</u>　命題3の作用素 $Q : X_+ \setminus \{0\} \to \mathcal{N}$ は連続である。

∵　任意の $w \in X_+ \setminus \{0\}$ に対して、$tw \in \mathcal{N}$ となる $t = t(w) > 0$ が一意に存在するので、

$$w \in X_+ \setminus \{0\} \longmapsto t(w) \in \mathbb{R}$$

が連続であることを示せば良い。

$w_j, w_0 \in X_+ \setminus \{0\}$ で、$w_j \to w_0$ in X とし、

$t_j = t(w_j)$ とおく。

(a) $\displaystyle\varliminf_{j\to\infty} t_j > 0$.　(b) $\displaystyle\varlimsup_{j\to\infty} t_j < +\infty$、を示せば良い。

<u>(a)の証</u>

命題2より十分小の $r > 0$ が存在して、$\|\nabla v\| \geq r > 0$ $(v \in \mathcal{N})$.

従って、$t_j \|\nabla w_j\| \geq r$。

一方 $\|\nabla w_j\|$ は有界：$\|\nabla w_j\| \leq C$、より、$t_j \geq \dfrac{r}{C}$.

<u>(b)の証</u>

不成立とすると、ある $w_j, w \in X_+ \setminus \{0\}$ が存在して、

$$w_j \to w \text{ in } X \text{ かつ } t_j \to +\infty.$$

部分列をとることにより、$w_j'(x) \to w(x)$ a.e. in Ω とできる。$w(x) \not\equiv 0$ より、$\varepsilon > 0$ が存在して、$B = \{x \in \Omega \mid v(x) \geq 2\varepsilon\}$ の測度が正。

Egoroffの定理より、測度正の $A \subset B$ があって、

$$w_j'(x) \rightrightarrows w(x)\text{.}\quad (A\text{上一様収束})$$

従って，j 十分大に対して，$w_j'(x) \geqq \varepsilon$ on A.

一方，

$$+\infty > \|\nabla w_j'\|^2 = \int_\Omega \frac{f(t_j' w_j')}{t_j' w_j'} w_j'^2 dx \geqq$$

$$\geqq \int_A \frac{f(t_j' w_j')}{t_j' w_j'} w_j'^2 dx \geqq \varepsilon^2 \inf_{s \geqq t_j' \varepsilon} \frac{f(s)}{s} \longrightarrow +\infty \quad (j \to \infty).$$

これは矛盾である。 □

<u>命題6</u> 作用素 S を $S = (-\Delta_0)^{-1} f(\cdot)$ とし，

$$\tilde{T} = Q \circ S : X_+ \setminus \{0\} \longrightarrow N$$

とおく。このとき，$\tilde{T}$ は完全連続で，$\tilde{T}|_N = T$ である。

∵ 命題5より明らか。 □

<u>定理の略証</u>

1°. 任意の $v \in N$ に対して，$J(Tv) \leqq J(v)$ が成り立つ。

従って，$\{J(v_j)\}_{j=0}^\infty$ は単調減少列となる。

∵ $v \in N$ に対して，$w = Sv = (-\Delta_0)^{-1} f(v)$ とおくと，

$$\int_\Omega v^2 \frac{f(v)}{v} dx \leqq \int_\Omega vw \frac{f(v)}{v} dx \leqq \int_\Omega w^2 \frac{f(v)}{v} dx$$

が成り立つ。Tv は w のある定数倍であるので，任意の $t>0$ に対して，$J(v) - J(tw) \geqq 0$ を示せば良い。

$$J(v)-J(tw)=\frac{1}{2}\|\nabla v\|^2-\frac{t^2}{2}\|\nabla w\|^2+\int_\Omega \{F(tw)-F(v)\}dx$$

$$\geqq \frac{1}{2}\|\nabla v\|^2-\frac{t^2}{2}\|\nabla w\|^2+\frac{1}{2}\int_\Omega (t^2w^2-v^2)\frac{f(v)}{v}dx$$

$$=\frac{t^2}{2}\left\{\int_\Omega w^2\frac{f(v)}{v}dx-\int_\Omega vw\cdot\frac{f(v)}{v}dx\right\}$$

$$\geqq 0 \qquad \square$$

2°. 定理の主張が成り立つ。

∵ 仮定(10)より、$\{v_j\}$ は X で有界である。

$\{v_j'\}=\{v_{\ell(j)}\}$ とする。添字の番号が1少ない部分列 $\{v_{\ell(j)-1}\}$ も X で有界より、部分列 $\{\tilde{v}_j\}\subset\{v_{\ell(j)-1}\}$ と $w\in X$ が存在して、$\tilde{v}_j \longrightarrow w$ weakly in X. 従って、

$$J(\tilde{v}_j)=\int_\Omega\left\{\frac{1}{2}f(\tilde{v}_j)\tilde{v}_j-F(\tilde{v}_j)\right\}dx$$

$$\longrightarrow \int_\Omega\left\{\frac{1}{2}f(w)w-F(w)\right\}dx=d'$$

となる。命題4より $d'\geqq d>0$ であるので，$w\in X_+\setminus\{0\}$.

命題7より，$v_j'':=T\tilde{v}_j \longrightarrow v:=\tilde{T}w$ in X.

番号のつけ方から $\{v_j''\}\subset\{v_j'\}$ で、N が閉集合であることから，$v_j''\longrightarrow v$ in X, $v\in N$ となる。

$v\in N$ は、$J(Tv)=J(v)=d'$ を満たすので，1°の証明と同様な議論により，v が (3)(4) の解であることがわかる。 $\square$

§数値実験結果

境界値問題(1)(2)に対して数値実験を行った。

Ωは正方形$(0,1)\times(0,1)$から斜線部分を除いた領域で、図1は中心に関して点対称、図2は非対称、図3は直線に関して対称な領域である。x, y方向ともに128等分割した通常の有限要素法で計算を行った。左側の図は途中経過($j=0,3,6,9$)で、右側の図は数値的に収束した状態を示してある。

図はすべて解の等高線(高さ$=1,2,3,\cdots$)である。8, 16, 32, 64, 128等分割にして行ったが、どの場合でも、反復列そのものが数値的に収束していた。64, 128等分割の最終状態は、殆んど完全に一致していた。図1の領域の場合、点対称な初期関数から出発しているので、誤差無しの計算であれば、点対称な解がでるはずであるが、丸め誤差の影響でバランスが崩れ、エネルギーの低い第一モードの解に収束している。実際の計算では、丸め誤差が避けられないので、どのような場合でも、最小エネルギー解(の近似解)に収束するように思われる。

図 1

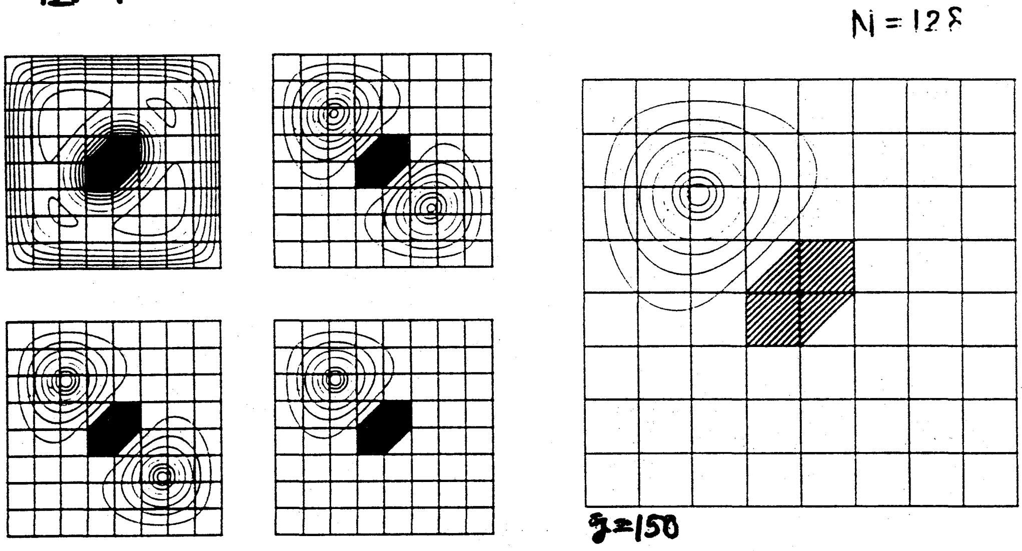


図 2

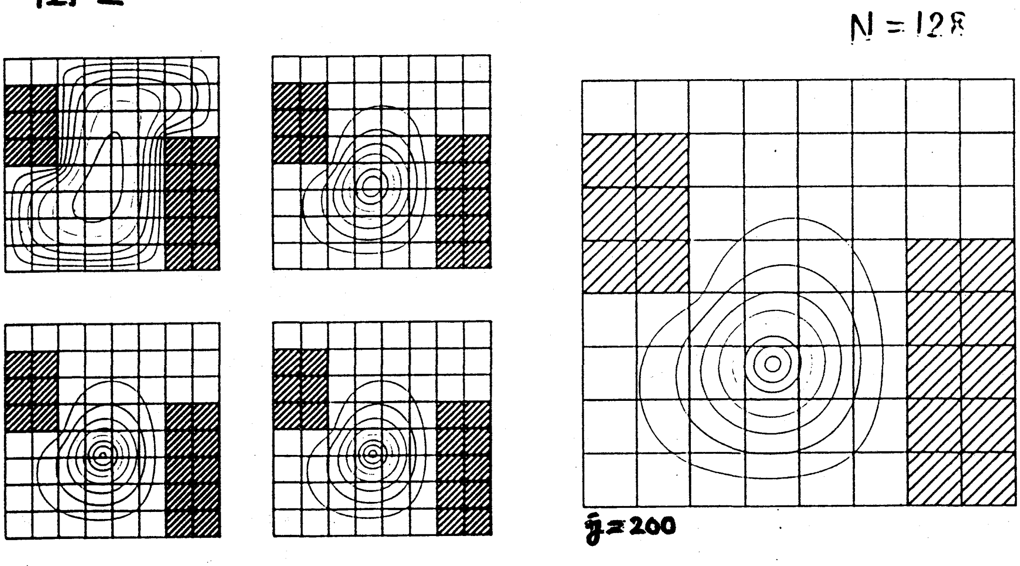
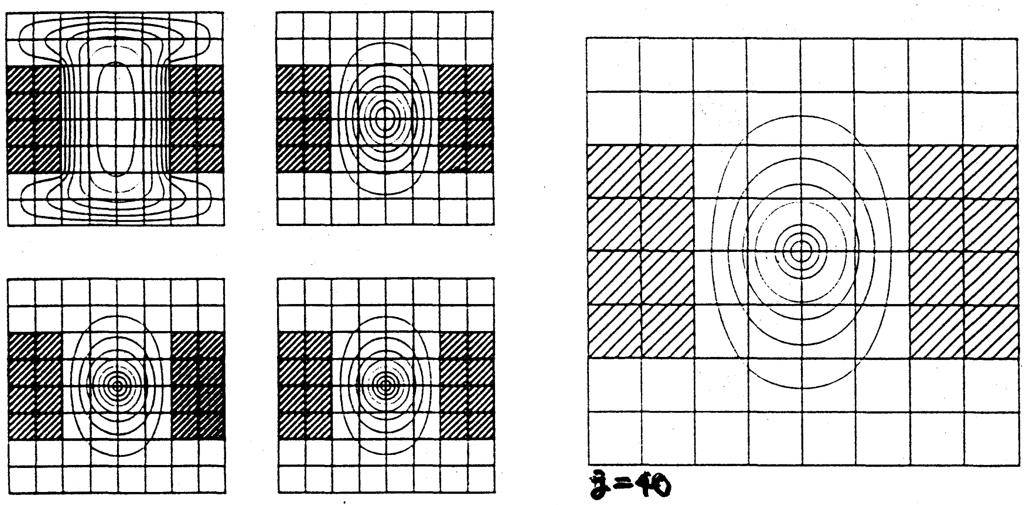


図 3

N = 128



$\lambda=40$

§参考文献

[1] Eydeland, A., and Spruck, J., The inverse power method for semilinear elliptic equations, in "Nonlinear Diffusion Equations and Their Equilibrium States I," (W. M. Ni, L. A. Peletier and J. Serrin, eds.), Springer, New York, 1988, 273-286.

[2] Nehari, Z., On a class of nonlinear second-order differential equations, Trans. Amer. Math. Soc. 95 (1960), 101-123.

[3] Mizutani, A., and Suzuki, T., About the iterative and minimizing sequences for semilinear elliptic equations (in preparation)