数理解析研究所講究録
第834巻 1993年 64-69

非有界領域における p-Laplace 方程式

広大理 草野 尚 (Kusano Takaŝi)

所謂 p-Laplace 方程式

(A) $$\sum_{i=1}^{N} D_i\left(|Du|^{p-2} D_i u\right) + c(|x|)|u|^{q-2}u = 0, \qquad x \in \mathcal{E}_a$$

を考える．ここで $p>1$, $q>1$, $\mathcal{E}_a = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| \geqq a\}$, $a>0$, $N \geqq 2$ で，$c(t)$ は $[a,\infty)$ において連続な実数値関数とする。

考察をこの方程式の球対称解に限定する．球対称な関数 $u = y(|x|)$ が (A) の解であるための必要十分条件は，$y(t)$ が常微分方程式

(B) $$\left(t^{N-1}|y'|^{p-2}y'\right)' + t^{N-1}c(t)|y|^{q-2}y = 0, \qquad t \geqq a$$

の解であることであるから，全ては (B) の解析に帰する．

先ず，解の存在については，北野元彦[2]によって，

定理 1. $c(t)$ が $[a,\infty)$ において局所有界変動ならば，任意の $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^2$ に対して，(B) は $y(a) = y_0$, $y'(a) = y_1$ を満たす一意解を $[a,\infty)$ 上で持つ．

ことが示されているから，特に問題はない．

(A)の球対称解 $u=y(|x|)$ の振動的性質を調べてみよう。$y(t_k)=0$，$a\leqq t_1<t_2<\cdots<t_n<\cdots$，$\lim\limits_{n\to\infty}t_n=\infty$，なる $\{t_n\}$ が存在するとき，u は $\mathcal{E}_a$ において振動であると言い，そうでないとき u は $\mathcal{E}_a$ において非振動であると言うことにする。非振動解は，従って，無限遠の近傍で零点を持たない。

非振動解の漸近行動と存在については，以下の事実が知られている。

定理2.（Elbert＋草野［1］） $N\leqq p$，$c(t)\geqq 0$，$t\in[a,\infty)$ とする。$u(|x|)$ が(A)の非振動解ならば，

$$c_1\leqq |u(|x|)|\leqq c_2\begin{cases}|x|^{\frac{p-N}{p-1}} & (N<p\text{のとき})\\ \log|x| & (N=p\text{のとき})\end{cases}\qquad |x|\geqq R$$

となる正定数 c_1, c_2, R が存在する。

(A)が $\lim\limits_{|x|\to\infty}u(|x|)=\mathrm{const}\neq 0$ なる非振動解を持つための必要十分条件は

$$\int_a^\infty\left(t^{1-N}\int_t^\infty s^{N-1}c(s)\,ds\right)^{\frac{1}{p-1}}dt<\infty.$$

$N<p$ のとき，(A)が $\lim\limits_{|x|\to\infty}\left[u(|x|)/|x|^{\frac{p-N}{p-1}}\right]=\mathrm{const}\neq 0$ なる非振動解を持つための必要十分条件は

$$\int_a^\infty t^{N-1+\frac{q-1}{p-1}(p-N)}c(t)\,dt<\infty.$$

$N=p$ のとき，(A)が $\lim\limits_{|x|\to\infty}\left[u(|x|)/\log|x|\right]=\mathrm{const}\neq 0$ なる

非振動解を持つための必要十分条件は

$$\int_a^\infty t^{N-1}(\log t)^{q-1}c(t)\,dt < \infty.$$

定理3.（草野＋緒方＋宇佐美［3］）$N>p$, $c(t)\geqq 0$, $t\in[a,\infty)$ とする．$u=u(|x|)$ が (A) の非振動解ならば

$$c_1|x|^{-\frac{N-p}{p-1}} \leqq |u(|x|)| \leqq c_2, \qquad |x|\geqq R$$

となる正定数 c_1, c_2, R が存在する．

(A) が $\lim_{|x|\to\infty} u(|x|) = \mathrm{const} \neq 0$ なる非振動解を持つための必要十分条件は

$$\int_a^\infty \left(t^{1-N}\int_a^t s^{N-1}c(s)\,ds\right)^{\frac{1}{p-1}} dt < \infty.$$

(A) が $\lim_{|x|\to\infty}\left[|x|^{\frac{N-p}{p-1}}u(|x|)\right] = \mathrm{const} \neq 0$ なる非振動解を持つための必要十分条件は

$$\int_a^\infty t^{N-1-\frac{q-1}{p-1}(N-p)} c(t)\,dt < \infty.$$

(A) のすべての球対称解が振動である状況の特徴付けが，$p\neq q$ の場合に可能である．

定理4.（［2］）$N\leqq p$, $c(t)\geqq 0$, $t\in[a,\infty)$ とする．

$p<q$ の場合，(A) のすべての球対称解が振動であるための必要十分条件は

$$\int_a^\infty \left(t^{1-N}\int_t^\infty s^{N-1}c(s)\,ds \right)^{\frac{1}{p-1}} dt = \infty .$$

$p>q$ の場合，(A) の すべての 球対称解 が振動であるための必要十分条件は以下の通り：

$$\int_a^\infty t^{N-1+\frac{q-1}{p-1}(p-N)}c(t)\,dt = \infty \qquad (N<p\ のとき)$$

$$\int_a^\infty t^{N-1}(\log t)^{q-1}c(t)\,dt = \infty \qquad (N=p\ のとき).$$

定理5.([3]) $N>p$, $c(t)\geqq 0$, $t\in[a,\infty)$ とする.

$p<q$ の場合，(A) のすべての 球対称解が振動であるための必要十分条件は

$$\int_a^\infty t^{N-1-\frac{q-1}{p-1}(N-p)}c(t)\,dt = \infty .$$

$p>q$ の場合，(A) の すべての球対称解が振動であるための必要十分条件は

$$\int_a^\infty \left(t^{1-N}\int_a^t s^{N-1}c(s)\,ds \right)^{\frac{1}{p-1}} dt = \infty .$$

(A)の 非自明な球対称解がすべて非振動であるという状況の分析も意義がある. この件については，最近 草野＋吉田 [4] によって 次の結果が得られた.

定理6. $N \leqq p$, $c \in C^1[a,\infty)$, $c(t) > 0$, $t \in [a,\infty)$ とする．$p \neq q$ とし，$\gamma = \max\{p-1, q-1\}$ とおく．

$$\int_a^\infty \frac{(t^\lambda c(t))'_+}{t^\lambda c(t)}\,dt < \infty, \qquad \lambda = \frac{p(N-1)}{p-1}$$

を仮定し（ここで $f'_+ = \max\{f', 0\}$），さらに

$$\int_a^\infty t^{N-1}(\log t)^\gamma c(t)\,dt < \infty \qquad (N = p \text{ のとき})$$

$$\int_a^\infty t^\mu c(t)\,dt < \infty,\ \mu = N-1+\frac{\gamma(p-N)}{p-1} \qquad (N < p \text{ のとき})$$

を仮定する。このとき (A) の非自明な球対称解はすべて非振動である．

（注1） $N > p$ の場合の非振動定理については，未だ何も結果は得られていないように思われる．

（注2） (A) において $p = q$ とした特別の場合の振動定理は，定理4，定理5とは異なった性格のものになることが予想される．この問題については，目下緒方明夫氏，内藤雄基氏との共同研究が進行中で，遠くない将来にその結果を公表する心算である．

（注3） $c(t)$ が正の値も負の値もとる場合に (A) の振動性を論じることは，困難であるが重要な問題である．北野元彦氏の研究 [2] は，この方向への貴重な貢献である．

参考文献

[1] Elbert, A. and Kusano, T.; Oscillation and non-oscillation theorems for a class of second order quasilinear differential equations, Acta Math. Hungarica 56 (1990), 325 — 336.

[2] 北野元彦；2階準線形常微分方程式の振動性について（修士論文：1993年2月：広島大学大学院理学研究科）

[3] Kusano, T., Ogata, A. and Usami, H.; Oscillation theory for a class of second order quasilinear ordinary differential equations with application to partial differential equations（近刊）

[4] Kusano, T. and Yoshida, N.; Nonoscillation theorems for a class of quasilinear differential equations of second order（近刊）