数理解析研究所講究録
第830巻 1993年 104-114

パラ超関数

—シュヴァルツ超関数の枠をふくむ新しい超関数概念について—

金沢大学教養部　半沢英一 (Ei-Ichi Hanzawa)

P. Dirac が量子力学の定式化のために彼のいわゆるデルタ関数を考え出したのは1926年の事である。ここに人類は古典的関数概念の枠を越えた関数概念の存在と有効性を、またその不可避性を感知したといえるだろう。そしてその様な存在を数学的に把握する最初の試みはL. Schwartzによってなされた。彼のいわゆる超関数(distribution) $\mathcal{D}'$ とは

(1)古典的関数をふくむ線型空間であり、

(2)微分が自由にでき、

(3)局所決定性とつなぎ合わせの原理をみたす。

という点でまさに"超"関数の名に値するものであった。なお(1)と(2)よりデルタ関数が一超関数となる事や、シュヴァルルの超関数 $\mathcal{D}'$ が(1)〜(3)をみたす最小のクラスである事はよく

知られている。

さて(1)〜(3)をみたす体系をわれわれは"超関数"と呼んでさしつかえないであろう。そして$\mathcal{D}'$は最小の超関数クラスではあるが決して唯一のものではなかった。その事は高名な佐藤の超関数(hyperfunction) $\mathcal{B}$ を想起するだけでわかる。

ところで物理を記述する事を契機として生まれた超関数論ではあったが$\mathcal{D}'$や$\mathcal{B}$にはその点に関して一つの不満があった。それは場の量子論にはしばしば超関数同士の積があらわれ(例えばデルタ関数の二乗)超関数内での乗法がひろく行われる事が期待されるのにかかわらず$\mathcal{D}'$ではその中のC^∞関数との積,$\mathcal{B}$ではC^ω関数との積しか一般には定義されない事である。デルタ関数の二乗などについては$\mathcal{D}'$や$\mathcal{B}$では全くとりあつかえない。

こうした状況の中,1983年に興味深い仕事が発表された。J.F. Colombeau が$\mathcal{D}'$をふくみ,それ自身 Commutative algebra をなす新しい超関数概念を発表したのである。Colombeau の超関数(new generalized function)は$\mathcal{G}$と書かれる。

当然$\mathcal{G}$はδ関数の二乗などをふくみ非常に都合のよい体系の様に思われる。しかし$\mathcal{D}'$の乗法ではよく知られているように,

$$x\delta(x)=0\ ,\quad x(\mathrm{v.p.}\tfrac{1}{x})=1$$

をみたし

$$\left((\mathrm{v.p.}\tfrac{1}{x})x\right)\delta(x)=\delta(x)\neq 0=(\mathrm{v.p.}\tfrac{1}{x})(x\delta(x))$$

で結合律はみたされない。したがってColombeauの超関数における乗法とは$\mathcal{D}'$での乗法とは大幅にずれるものである事が予想され，実際に積の二つの因子がC^∞である時とか一方の因子が0である時以外は$\mathcal{D}'$の，あるいは古典的な積とは一致しないのである。例えばxと$|x|$の積は（通常の）$x|x|$ではなく，xと$\delta(x)$の積は0にならない。特に後者などはデルタ関数がxのかけ算の固有関数にならない事を意味し，Diracのもとの意図とはかけはなれてしまう。

このように見てくるとColombeauの超関数が物理に有効であるかについては懐疑的にならざるをえない。有効であるためには数値や他の関数との具体的な結びつきが必要なのにColombeauの理論ではそれが欠けている様に思える。だからここで定義されているデルタ関数の二乗についても，数理の世界にデルタ関数の二乗が自然に存在するとして，それをとらえているか疑問である。

この様に筆者はColombeau超関数の物理数学上の有効性にはかなりの疑問をいだいているが，それがシュヴルツ超関数を拡大する仕方は佐藤超関数の方向以外にもある事を示した事は大きいと思う。それを契機に筆者はシュヴァルツ超関数を，その積を自然にふくむ形で拡大するにはどうすればよいかと考えはじめ，パラ超関数（paradistribution）と名づけた体系 $\mathcal{P}$ をえた。ここに $\mathcal{P}$ は(1)〜(3)の性質をみたし，$\mathcal{D}'$を部分空間としてふくみ，$\mathcal{D}'$の乗法

$$C^\infty \times \mathcal{D}' \longrightarrow \mathcal{D}'$$

は

$$\mathcal{D}' \times \mathcal{P} \to \mathcal{P}$$

の乗法へと自然に拡大されるのである。こうして $\mathcal{P}$ 体の乗法はえられないが少くとも$\mathcal{D}'$をかけていく事はいくらでもでき，乗法の範囲は大分拡がった事になる。のみならず

$$(\mathrm{v.p.}\frac{1}{x})\,\delta(x) = -\frac{1}{2}\delta'(x),$$

$$\delta(x)^2 - \frac{1}{\pi^2}\left(\mathrm{v.p.}\frac{1}{x}\right)^2 = -\frac{1}{\pi^2}\,\mathrm{Pf.}\frac{1}{x^2}$$

といった式も成立し，ここではデルタ関数の二乗なども具体的数式を伴う数学世界の中にある形でとらえられているのである。

本稿では$\mathcal{P}$の構成と$\mathcal{D}'$とのかけ算がいかに可能かという事を略述しよう。

まず$\mathcal{P}$の構成であるが基本となるのは"type"という概念と"reduction"という概念である事を断っておく。

Ωを$\mathbb{R}^n$の領域とする。νがΩ上のtype indicatorであるとは，νがΩから$\mathbb{N}$への上半連続関数である事をいう。今，

$$\mathcal{D} = C_0^\infty(\mathbb{R}^n),\quad \mathcal{D}^\infty = \{(\varphi_1, \varphi_2, \cdots\ );\ \varphi_i \in \mathcal{D}\}$$

とする。fがΩ上のパラ汎関数（parafunctional）であるとは

$$f : \Omega \times \mathcal{D}^\infty \longrightarrow \mathbb{C}$$

で，xを$a \in \Omega$の近傍を動くとし，supp φ_iが一様にある原点中心の小さい球にあるとする時，

(1) $x \longmapsto f(x \mid \varphi_1, \varphi_2, \cdots\ )$ は C^∞ である。

(2) $f(x \mid \varphi_1, \varphi_2, \cdots\ ) = f(x \mid \varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_{\nu(x)})$ である。

をみたす事である。なおここに $(x, \varphi_1, \varphi_2, \cdots\ )$ 等を $(x \mid \varphi_1, \varphi_2, \cdots\ )$ という，た書き方をしている。

上記パラ汎関数に次のような reduction による同値関係をいれてパラ超関数はつくられる。今，

$$f(x \mid \varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_N) \downarrow g(x \mid \varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_{N-1})$$

であるとは，

$$\int \varphi_N(\xi)\, d\xi = 1$$

なる $(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_N)$ を fix し，$\varepsilon \in (0,1)$ に対し

$$\varphi_{N,\varepsilon}(\xi) = \frac{1}{\varepsilon^n} \varphi_N\left(\frac{\xi}{\varepsilon}\right)$$

とした時，

$$f(x|\varphi_1,\cdots,\varphi_{N-1},\varphi_N,\varepsilon)\to g(x|\varphi_1,\cdots,\varphi_{N-1})$$
$$\text{in } C^\infty(\Omega),\quad \text{as } \varepsilon\to 0$$

である事とする。また $M<N$ で

$$f(x|\varphi_1,\cdots,\varphi_N)\downarrow\downarrow g(x|\varphi_1,\cdots,\varphi_M)$$

であるとは，パラ沢関数の有限列 $h_1, h_2, \cdots, h_\ell$ が存在して

$$f\downarrow h_1,\ h_1\downarrow h_2,\ \cdots,\ h_{\ell-1}\downarrow h_\ell,\ h_\ell\downarrow g$$

となる事をいう。$f\equiv g$ とは，任意の $\Omega'\subset\subset\Omega$ に対して

$$(f-g)|_{\Omega'}\downarrow\downarrow 0$$

である事をいう。この $\equiv$ は，微分や線型演算と整合性のある事が確認できる。先にいった様に

$$\mathcal{F}(\Omega)=\Omega\text{上のパラ沢関数}/\equiv$$

として Ω 上のパラ超関数が定義されるわけである。パラ汎関数 f を代表元とするパラ超関数を $[f]$ と書く。

今，$T \in \mathcal{D}'$ に対し

$$f_T(x \mid \varphi_1) = T_\xi(\varphi_1(\xi - x))$$

とおく。T_ξ とは T を ξ 変数の関数の汎関数とみなす事を示すとする。この時，

$$T \longmapsto [f_T(x \mid \varphi_1)]$$

は $\mathcal{D}'$ の $\mathfrak{p}$ への微分を保存する線型単射となる。パラ超関数の理論では，このように $[f_T]$ を T とみなすのである。デルタ関数は

$$[f_\delta(x \mid \varphi_1)] = [\varphi_1(-x)]$$

と表現されている。

さて問題の乗法を論じよう。パラ汎関数

$$f_1(x \mid \varphi_1, \varphi_2, \cdots \quad) \quad と \quad f_2(x_2 \mid \varphi_1, \varphi_2, \cdots \quad)$$

の積を

$$f_1 f_2(x \mid \varphi_1, \varphi_2, \cdots \qquad)$$

$$= \int f_1(\xi \mid \varphi_2, \varphi_3, \cdots) f_2(\xi \mid \varphi_2, \varphi_3, \cdots) \varphi_1(\xi - x)\, d\xi$$

で定義する。f_1, f_2 の $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$ の *index* が *shift* されている事に注意されたい。

さて上記の積と同値関係 $\equiv$ は一般には整合性はない。しかし一方が $\mathcal{D}'$ の元である時は整合性をもつ。つまり

$$f_{T_1} \equiv f_{T_2},\ f_1 \equiv f_2 \quad \text{ならば} \quad f_{T_1} f_1 \equiv f_{T_2}$$

が成立する。この事を示そう。

$$f_{T_1} \equiv f_{T_2} \Longleftrightarrow T_1 = T_2$$

であるから

$$f \equiv 0 \quad \text{ならば} \quad f_T f \equiv 0$$

をみたせばよい。パラ超関数の局所決定性と超関数の局所構造定理から，ある $g \in C^0(\Omega)$ がとれて

$$f_T(\xi \mid \varphi_1) = \int_{\eta \in \Omega} g(\eta)(-1)^{|\alpha|} \partial_\eta^\alpha (\varphi_1(\eta - \xi)) d\eta$$

$$= \int_{\eta \in \Omega} g(\eta) \partial_\xi^\alpha (\varphi_1(\eta - \xi)) d\eta$$

とできる。したがい

$$f_T f(x \mid \varphi_1, \varphi_2, \cdots \qquad)$$

$$= \int \left(\int g(\eta) \partial_\xi^\alpha (\varphi_2(\eta - \xi)) d\eta \right) f(\xi \mid \varphi_2, \cdots) \varphi_1(\xi - x) d\xi$$

$$= \int \left(\int g(\eta) \varphi_2(\eta - \xi) d\eta \right) (-1)^{|\alpha|} \partial_\xi^\alpha (f(\xi \mid \varphi_2, \cdots) \varphi_1(\xi - x)) d\xi$$

とかける。今 $f \equiv 0$ とパラ超関数の局所決定性より，

$$f = f_0 \downarrow f_1, \quad f_1 \downarrow f_2, \quad \cdots \qquad , \quad \downarrow f_\ell = 0$$

となるパラ汎関数の列がとれるとしてよい。$f_k \downarrow f_{k+1}$ で f_k の type が1以上（積分の中で shift された時は2以上となる）の時

$$f_T f_k \downarrow f_T f_{k+1}$$

は問題なくいえる。type が1の時 $\int \varphi_2 = 1$ として

$$\int g(\eta)\,\varphi_{2,\varepsilon}(\eta-\xi)\,d\eta \longrightarrow g(\xi)$$

in C^0 as $\varepsilon \to 0$

だからこの場合も同様の事がいえて，乗法と同値関係の整合性がいえる。こうしてみるとこの理論での reduction という概念が Schwartz の超関数の実体と不思議にうまく組み合っている様子がわかるだろう。また自然な性質や等式が成立する事は前述のとおりである。

なお本稿の内容を詳しく知りたい方は次の論文を見られたい。

E. Hanzawa「A generalization of the idea of distributions」
JJIAM, Vol. 9, pp. 471-485, October 1992