数理解析研究所講究録
第835巻 1993年 217-227

The Possibility Distribution of α–Optimal Value $\widetilde{Z}(\alpha)$ for the Fuzzy LP with LR Type Objective Function

金沢大学大学院自然科学研究科　桑野裕昭　(Hiroaki KUWANO)
金沢大学教育学部　久志本茂　(Shigeru KUSHIMOTO)

1 はじめに

近年、多くの研究者によりファジィ線形計画問題に関する解概念やその解法 [4] が提案されている。それらの多くは所謂 "最適解" に関するものである。しかしながら、問題の性質によっては "最適解" ともに "最適値" の性質にも興味がある場合が考えられよう。そこで、ここでは "最適値" の可能性分布 [16] という観点から、ファジィ線形計画問題の "最適値" の性質を議論する。すでに、制約式系及びその定数、目的関数の係数が全て三角型のファジィ数 (ここでは、可能性分布に制限されているという意味で可能性変数と呼ぶ。) であるような場合に関しては、その "最適値" の可能性分布に関しての結果 [3] を得ている。よって、ここでは三角型の可能性変数の族を包含する可能性変数の族である LR type の可能性変数の族をとりあげ、三角型と類似の結果が得られることを示す。

また、ファジィ多目的線形計画問題に関しても、ファジィ線形計画問題と同様に多くの研究がみられる。その中に、解法の一つの方向性として Zimmermann [17,18] の手法を基礎としているものが多数見受けられる。それらは、 aspiration level を用いて目的関数値のメンバーシップ関数を設定した上で、通常の線形計画問題へと変形するものがある。例えば、 Tiwari ら [13] の目標計画法的なアプローチによる手法や Chanas [7] のパラメトリックアプローチによる手法、 Yang ら [15] の非線形メンバーシップ関数を区分的線形関数により近似し解法を与える手法などである。一方、解法のみに注目するのではなく、通常のパレート最適性の拡張に対応する解概念の提起も、 Luhandjula [9] 、坂和ら [5,6,11] 、乾口ら [1] などにより行われている。更に、意思決定者との対話を含めた満足化の手法も Sakawa ら [12] や Rommelfanger [10] 、 Werners [14] などにより発表されている。
これら多くのファジイ多目的線形計画問題の解概念や解法は、目的関数系のメンバーシップ関数の Min 結合や通常のパレート最適性を様相的に扱うことにより規定されているが、ここでは、これらの手法と異なり、可能性変数としての目的関数系の値を用いた目的計画法的アプローチを提案する。

2 ファジィ線形計画問題の定式化

次のファジィ線形計画問題 (Fuzzy Linear Programming problem : FLP) を考える。

$$
(1) \qquad (FLP) \quad \begin{array}{ll} \text{maximize} & \widetilde{\boldsymbol{c}}^T \boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & \widetilde{A}\boldsymbol{x} \leq \widetilde{\boldsymbol{b}}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \mathbf{o} \end{array}
$$

ここで、

$$
\widetilde{A} = (\widetilde{a}_{ij}), \quad \widetilde{\boldsymbol{b}} = (\widetilde{b}_1, \widetilde{b}_2, \cdots, \widetilde{b}_m)^T, \quad \widetilde{\boldsymbol{c}} = (\widetilde{c}_1, \widetilde{c}_2, \cdots, \widetilde{c}_n)^T,
$$
$$
i \in I = \{1, 2, \cdots, m\}, j \in J = \{1, 2, \cdots, n\}
$$

であり、各係数 $\tilde{a}_{ij}, \tilde{b}_i, \tilde{c}_j$ $(i \in I, j \in J)$ は有界な相互作用のない可能性変数とする。さらに、$\tilde{c}_j$ $(j \in J)$ のみ LR type 、すなわち

$$\pi_{\tilde{c}_j}(r) = \begin{cases} L\left(\dfrac{c_j^1 - r}{\zeta_j}\right) & r \leq c_j^1, \zeta_j > 0 \\ R\left(\dfrac{r - c_j^1}{\eta_j}\right) & r > c_j^1, \eta_j > 0 \end{cases}$$

によって可能性分布を与え、$\tilde{c}_j = (c_j^1, \zeta_j, \eta_j)_{LR}$ と表す。Reference function L, R は

$$L, R : [0, \infty) \longrightarrow [0, 1]; \text{ cont., strictly decreasing,}$$

$L(0) = 1, R(0) = 1$ を満たすものとする。また、可能性変数 $\tilde{N}$ のα-レベル集合を閉区間 $[n_L^\alpha, n_U^\alpha]$ で表し、$\tilde{N}$ が実数 N の場合には $\pi_{\tilde{N}} = I_{\{N\}}$ なる可能性分布をもつと考える。(I_A は集合 A の定義関数を表す。) 特に、目的関数のある係数 $\tilde{c}_j$ が実数 c_j^1 の場合には、特殊な LR type の可能性変数と考え、$\tilde{c}_j = (c_j^1, 0, 0)_{LR}$ で表す。

しかし、明らかにこのような LR type の可能性変数の族には三角型の可能性変数の族は含まれない。そこで、以下で扱う Reference function L, R に関しては条件を以下のように弛めたものを扱うものとする。

定義 1 *Reference function* f が標準であるとは、以下の条件を満たすときをいう。

1. $f(x_0) = 0$ なる $x_0 \in (0, +\infty]$ が存在する。
2. 任意の $x \geq x_0$ に対し、 $f(x) = 0$ である。
3. 区間 $[0, x_0)$ 上で f は狭義単調減少関数である。
4. f は連続関数である。

注意 1 以下で扱う *Reference function* は全て標準であるとする。また、特に断らない限りは、標準を省略し単に *Reference function* とよぶ。

定義 2 与えられた可能性 α に対する *FLP* の実行可能領域とは、

$$X(\alpha) = \{\boldsymbol{x} \geq \mathbf{o} | A^\alpha \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}^\alpha\}$$

によって定義される $\mathbf{R}^n$ の部分集合である。ここで A^α と $\boldsymbol{b}^\alpha$ は、

$$A^\alpha = (a_{ijL}^\alpha) \in \mathbf{R}^{m \times n}, \qquad \boldsymbol{b}^\alpha = (b_{1U}^\alpha, \cdots, b_{mU}^\alpha)^T$$

である。

注意 2 この制約領域の定義は、坂和ら [4,5,6,11] の提起している制約領域 $X_{VWF}(\alpha)$ と同義である。つまり、 Prade, Dobois により示されたファジィ数の大小関係の指標の 1 つを用いて制約式系の不等号を解釈したものである。

定義 3 与えられた可能性 β に対する *FLP* の L-目的関数、U-目的関数とは、それぞれ

$$\boldsymbol{c}_L^{\beta T} \boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{c}_U^{\beta T} \boldsymbol{x}$$

によって定義される。ここで、$\boldsymbol{c}_L^\beta = (c_{1L}^\beta, \cdots, c_{nL}^\beta)^T$, $\boldsymbol{c}_U^\beta = (c_{1U}^\beta, \cdots, c_{nU}^\beta)^T$ である。特に、 $\beta = 1$ のときには、$\boldsymbol{c}_L^\beta = \boldsymbol{c}_U^\beta = \boldsymbol{c}^1$ で表す。

これらを用いて、可能性を加味した線形計画問題(ここでは、これを可能性線形計画問題(Possibilistic Linear Programming problem) とよび、 PLP と表す。) を次のように定義し、それぞれ、PLP-α, PLP$_L$-(α,β), PLP$_U$-(α,β) とよぶ。

(2) $\quad(\mathrm{PLP}-\alpha)\quad$ $\begin{array}{ll}\text{maximize} & \boldsymbol{c}^{1T}\boldsymbol{x}\\ \text{subject to} & \boldsymbol{x}\in X(\alpha)\end{array}$

(3) $\quad(\mathrm{PLP}_L-(\alpha,\beta))\quad$ $\begin{array}{ll}\text{maximize} & \boldsymbol{c}_L^{\beta T}\boldsymbol{x}\\ \text{subject to} & \boldsymbol{x}\in X(\alpha)\end{array}$

(4) $\quad(\mathrm{PLP}_U-(\alpha,\beta))\quad$ $\begin{array}{ll}\text{maximize} & \boldsymbol{c}_U^{\beta T}\boldsymbol{x}\\ \text{subject to} & \boldsymbol{x}\in X(\alpha)\end{array}$

$\beta=1$ の場合には、上の3つの PLP は同一の問題を表す。特に、 $\alpha=\beta=1$ のときの同一の問題を、最も可能性が高い係数による線形計画問題という意味で、最可能線形計画問題(Most possible Linear Programming problem : MLP) とよぶ。

仮定 1 $X(1)\neq\emptyset$ あるとする。

α を固定した場合の最適解 $\boldsymbol{x}^*(\alpha)$ の一意性に関しては $\boldsymbol{c}^1$ と活性な制約式の法線ベクトルの比較によりチェックが可能であるので、以降では、(2) の最適解 $\boldsymbol{x}^*(\alpha)$ が唯一つであった場合について議論を進める。

定義 4 任意の $\alpha\in(0,1]$ に対して、

(5) $$\mathcal{B}(\alpha)=\{\beta\in(0,1]|(3),(4)\text{ の最適解が }\boldsymbol{x}^*(\alpha)\text{ である。}\}$$

とおく。

定義 4 より、任意の $\alpha\in(0,1]$ に対して、$\mathcal{B}(\alpha)\ni 1$ である。よって、$\alpha\in(0,1]$ を固定したとき、$\mathcal{B}(\alpha)\neq\emptyset$ である。また、このとき $\beta\in\mathcal{B}(\alpha)$ に対しては、(2),(3),(4) の最適解は同一のベクトル $\boldsymbol{x}^*(\alpha)$ によって得られる。この意味で次の定義をおく。

定義 5 $\boldsymbol{x}^*(\alpha)$ を *FLP* の α-最適解という。

定義 6 集合 $Z(\alpha,\beta)$ を次のように定義する。

(6) $$Z(\alpha,\beta)=\begin{cases}\{z|\boldsymbol{c}_L^{\beta T}\boldsymbol{x}^*(\alpha)\le z\le\boldsymbol{c}_U^{\beta T}\boldsymbol{x}^*(\alpha)\}, & \beta\in\mathcal{B}(\alpha)\\ \{z|\boldsymbol{c}_L^{\beta_0(\alpha)T}\boldsymbol{x}^*(\alpha)\le z\le\boldsymbol{c}_U^{\beta_0(\alpha)T}\boldsymbol{x}^*(\alpha)\}, & \beta\in(0,1]\setminus\mathcal{B}(\alpha)\end{cases}$$

ここで $\beta_0(\alpha)=\inf\ \mathcal{B}(\alpha)$ である。また $Z(\alpha,0)=\mathbf{R}$ とする。

定義 6 と定義 4 の直後に述べたことより、任意の$\alpha\in(0,1]$ に対し、 $Z(\alpha,\beta)\neq\emptyset$ となる$\beta\in(0,1]$ が存在する。また、$\beta,\beta'\in\mathcal{B}(\alpha)$, $\beta'<\beta$ に対して $Z(\alpha,\beta)\subset Z(\alpha,\beta')$ が成立する。

定義 7 *FLP* の α-最適解 $\boldsymbol{x}^*(\alpha)$ によって制限されたα-最適値 $\widetilde{Z}(\alpha)$ とは、 β-レベル集合を $Z(\alpha,\beta)$ とするような可能性変数である。すなわち、

(7) $$\pi_{\widetilde{Z}(\alpha)}(z)=\sup_{\beta\in(0,1]}\beta I_{Z(\alpha,\beta)}(z)\quad \textit{for all } z\in\mathbf{R}$$

によって、その可能性分布が与えられる可能性変数である。

この $\widetilde{Z}(\alpha)$ が可能性変数であることは、定義 7 における $\pi_{\widetilde{Z}(\alpha)}$ が正規性をもち上半連続な準凹関数であることより導かれる。

また、定義 7 における定義式は次のようにも表記できる。

補題 1 *FLP* の α-最適解 $\boldsymbol{x}^*(\alpha)$ によって制限されたα-最適値 $\widetilde{Z}(\alpha)$ の可能性分布について次式が成立。

(8) $$\pi_{\widetilde{Z}(\alpha)}(z) = \sup_{\beta \in \mathcal{B}(\alpha)} \beta I_{Z(\alpha,\beta)}(z) \quad \textit{for all } z \in \mathbf{R}$$

(証明)

$z \in \mathbf{R}$ を固定する。$\beta_0(\alpha) \neq 0$ の場合には

$$\begin{aligned}
\pi_{\widetilde{Z}(\alpha)}(z) &= \sup_{\beta \in (0,1]} \beta I_{Z(\alpha,\beta)}(z) \\
&= \max\left\{ \sup_{\beta \in \mathcal{B}(\alpha)} \beta I_{Z(\alpha,\beta)}(z), \sup_{\beta \in (0,1] \setminus \mathcal{B}(\alpha)} \beta I_{Z(\alpha,\beta)}(z) \right\} \\
&= \max\left\{ \sup_{\beta \in \mathcal{B}(\alpha)} \beta I_{Z(\alpha,\beta)}(z), \beta_0(\alpha) \right\} \\
&= \sup_{\beta \in \mathcal{B}(\alpha)} \beta I_{Z(\alpha,\beta)}(z)
\end{aligned}$$

となる。また、$\beta_0(\alpha) = 0$ のときには、$\mathcal{B}(\alpha) = (0,1]$ であるから $\pi_{\widetilde{Z}(\alpha)}$ の定義により明らか。□

3 Comformability

本節では、前節で定義した MLP と PLP-α に関して、それらの最適解などの関係を考察していく。さらに次の仮定をおく。

仮定 2 各 $\alpha \in (0,1]$ に関して B^α により最適解 $\boldsymbol{x}^*(\alpha)$ の基底行列を表す。この基底行列 B^α の階数は m と仮定する。すなわち $\textit{rank } B^\alpha = m$ と仮定する。

しばらくの間、制約式系の添え字集合を $I' = I \cup \{m+1, \cdots, m+n\}$ とし、第 j 番目の非負条件を改めて次のようにおく。

$$x_j \geq 0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{a}^\alpha_{m+j,L} \boldsymbol{x} \leq b^\alpha_{m+j,U}, \qquad j \in J,\ \alpha \in (0,1]$$

ここで、

$$\boldsymbol{a}^\alpha_{m+j,L} = (0, \cdots, 0, \underbrace{-1}_{j\text{-th}}, 0, \cdots, 0), \quad b^\alpha_{m+j,U} =$$

である。

まず、準備として次の補題を示す。

補題 2 $\boldsymbol{x}^*(\alpha)$ が *PLP*-α の最適解であることと、

$$\boldsymbol{c}^1 \in \mathcal{C}\{\boldsymbol{a}^{\alpha T}_{iL} | i \in I(\boldsymbol{x}^*(\alpha))\}$$

が成立することは同値である。ここで、

$$I(\boldsymbol{x}^*(\alpha)) = \{i \in I' | \boldsymbol{a}^\alpha_{iL} \boldsymbol{x}^*(\alpha) = b^\alpha_{iU}\}, \qquad \boldsymbol{a}^\alpha_{iL} = (a^\alpha_{i1L}, \cdots, a^\alpha_{inL})$$

であり、$\mathcal{C}S$ は S の生成する凸錐を表す。

(証明)
$\alpha \in (0,1]$ を固定し、

$$c^1 \in \mathcal{C}\{a_{iL}^{\alpha T} | i \in I(x^*(\alpha))\}$$

が成立していると仮定する。このとき、

$$c^1 = \sum_{i \in I(x^*(\alpha))} r_i a_{iL}^{\alpha T}, \qquad r_i \geq 0 \text{ for all } i \in I(x^*(\alpha))$$

なる $\{r_i\}_{i \in I(x^*(\alpha))}$ が存在する。ここで、$i \notin I(x^*(\alpha))$ に対して $r_i = 0$ とおくと、

$$\begin{aligned}
&-c^1 + \sum_{i=1}^{m} r_i a_{iL}^{\alpha T} = \mathbf{o}, \\
&r_i(a_{iL}^{\alpha} x^*(\alpha) - b_i) = 0 \text{ for all } i = 1, 2, \cdots, n \\
&r_i \geq 0 \text{ for all } i = 1, 2, \cdots, n \\
&a_{iL}^{\alpha} x^*(\alpha) \leq b_i \text{ for all } i = 1, 2, \cdots, n
\end{aligned}$$

が成立する。これは、Kuhn-Tucker の条件を $x^*(\alpha)$ が満たしていることを示している。よって、$x^*(\alpha)$ は PLP–α の最適解である。

次に、$x^*(\alpha)$ を PLP–α の最適解であるとする。いま仮定より、a_{iL}^{α} $(i \in I(x^*(\alpha)))$ が一次独立であるので、Kuhn-Tucker の条件が満たされる。よって、

$$-c^1 + \sum_{i=1}^{m} r_i a_{iL}^{\alpha T} = \mathbf{o}$$

なる $\{r_i\}_{i \in I(x^*(\alpha))}$ が存在する。よって示された。□

定義 8 α $(0 < \alpha \leq 1)$ を任意に固定し、*MLP* と *PLP*- α の最適解をそれぞれ $x_0, x^*(\alpha)$ で表す。このとき、α が *MLP* に適合するとは、

(9) $$c^1 \in \mathcal{C}\{a_{iL}^{\alpha T} | i \in I(x_0)\}$$

が成立することである。ここで、

$$I(x_0) = \{i \in I' | a_i^1 x_0 = b_i^1\}, \qquad a_i^1 = (a_{i1}^1, \cdots, a_{in}^1)$$

である。

定義 9 *MLP* に適合している α に対する *PLP*-α の最適解 $x^*(\alpha)$ を *MLP* の最適解 x_0 に対応する最適解であるという。

つぎに、任意に固定された α $(0 < \alpha \leq 1)$ が MLP に適合するための必要十分条件を次に与える。

定理 1 *MLP* の最適解を $x_0, I(x_0) = \{1, \cdots, p\}$ とし、$0 < \alpha \leq 1$ を固定し、

(10) $$D^{\alpha} = (a_{1L}^{\alpha T}, a_{2L}^{\alpha T}, \cdots, a_{pL}^{\alpha T}) \in \mathbf{R}^{n \times p}$$

とおく。また、

(11) $$(JLP) \quad \begin{array}{ll} \text{minimize} & (u - v)^T c^1 \\ \text{subject to} & (u - v)^T D^{\alpha} \geq \mathbf{o}, \quad u \geq \mathbf{o}, \quad v \geq \mathbf{o} \end{array}$$

なる判別線形計画問題 (Judgement Linear Programming problem : JLP) を考える。
このとき α が MLP に適合するための必要十分条件は、対応する JLP の最適値が非負であることである。

(証明)
[十分性] JLP の最適値が非負であることから、$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$ とおけば、

$$\boldsymbol{y}^T \boldsymbol{c}^1 < 0, \qquad \boldsymbol{y}^T D^\alpha \geq \mathbf{o}$$

を同時に成立させる $\boldsymbol{y}$ は存在しない。したがって、Farkas' lemma [2] より、

$$D^\alpha \boldsymbol{r} = \boldsymbol{c}^1, \qquad \boldsymbol{r} \geq \mathbf{o}$$

なるベクトル $\boldsymbol{r}$ が存在する。ゆえに、

$$\boldsymbol{c}^1 \in \mathcal{C}\{\boldsymbol{a}_{1L}^{\alpha T}, \cdots, \boldsymbol{a}_{pL}^{\alpha T}\}$$

[必要性] 上の証明を逆からたどればよい。□

この定理により、意思決定者によって適当に選ばれた $\alpha \in (0,1]$ が MLP に適合しているか否かを判断する基準が得られた。つぎに MLP に適合した α に関する PLP-α を考える。すなわち、$\boldsymbol{c}^1 \in \mathcal{C}\{\boldsymbol{a}_{iL}^{\alpha T} | i \in I(\boldsymbol{x}_0)\}$ が成立しているような PLP-α

$$\text{(12)} \qquad \begin{array}{ll} \text{maximize} & \boldsymbol{c}^{1T}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & \boldsymbol{x} \in X(\alpha) = \{\boldsymbol{x} \geq \mathbf{o} | A^\alpha \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}^\alpha\} \end{array}$$

を考え、その標準形を次のように表現する。

$$\text{(13)} \qquad \begin{array}{ll} \text{maximize} & \bar{\boldsymbol{c}}^{1T}\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{c}^{1T}\boldsymbol{x} + \mathbf{o}^T\boldsymbol{\lambda} \\ \text{subject to} & \bar{A}^\alpha \bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}^\alpha, \bar{A}^\alpha = (A^\alpha | E^m) \in \mathbf{R}^{m \times (n+m)} \\ & \bar{\boldsymbol{x}}^T = (\boldsymbol{x}^T | \boldsymbol{\lambda}^T) \geq \mathbf{o} \end{array}$$

この係数行列 $\bar{A}^\alpha$ を $\boldsymbol{x}^*(\alpha)$ に関しての基底行列 B^α と非基底行列 N^α とに分解し、始めの m 本の列ベクトルが基底行列になるように添え字をつけかえる。同様に、目的関数の係数ベクトル $\bar{c}^1$ も、$\bar{c}_B^1$ と $\bar{c}_N^1$ とに分解する。つまり、

$$\bar{A}^\alpha = (B^\alpha | N^\alpha), \qquad \bar{c}^{1T} = (\bar{c}_B^{1T} | \bar{c}_N^{1T})$$

とする。仮定とシンプレックス法の最適性の判定規準より、

$$\bar{c}_N^{1T} - \bar{c}_B^{1T}(B^\alpha)^{-1}N^\alpha \leq \mathbf{o}$$

が成立している。ここで、

$$G = (\mathbf{o}|E^n) \in \mathbf{R}^{n \times (m+n)}, \qquad H = (E^m|\mathbf{o}) \in \mathbf{R}^{m \times (m+n)}$$

を導入する。これらを用いて、上式を変形すると

$$\begin{aligned} \{\bar{c}_N^{1T} - \bar{c}_B^{1T}(B^\alpha)^{-1}N^\alpha\}^T &= \{(G\boldsymbol{c}^1)^T - (H\boldsymbol{c}^1)^T(B^\alpha)^{-1}N^\alpha\}^T \\ &= [G - (N^\alpha)^T\{(B^\alpha)^T\}^{-1}H]\bar{c}^1 \end{aligned}$$

であるから、

$$[G - (N^\alpha)^T\{(B^\alpha)^T\}^{-1}H]\bar{c}^1 \leq \mathbf{o}$$

を得る。

同様にして、次の結果が得られる。

補題 3 $\Gamma(\alpha) = G - (N^\alpha)^T\{(B^\alpha)^T\}^{-1}H \in \mathbf{R}^{n\times(m+n)}$ とおき $\bar{c}_L^\beta, \bar{c}_U^\beta$ を上の $\bar{c}^1$ のように並べ変えられた拡張された目的関数の係数ベクトルであるとする。このとき、次の事柄が成立する。

$$\Gamma(\alpha)\bar{c}_L^\beta \leq \mathbf{o} \Longleftrightarrow \boldsymbol{x}^*(\alpha) \text{ が } PLP_L\text{-}(\alpha,\beta) \text{ の最適解}$$
$$\Gamma(\alpha)\bar{c}_U^\beta \leq \mathbf{o} \Longleftrightarrow \boldsymbol{x}^*(\alpha) \text{ が } PLP_U\text{-}(\alpha,\beta) \text{ の最適解}$$

更に、この補題により、

$$\mathcal{B}(\alpha) = \{\beta \in (0,1] \mid \Gamma(\alpha)\bar{c}_L^\beta \leq \mathbf{o},\ \Gamma(\alpha)\bar{c}_U^\beta \leq \mathbf{o}\}$$

であることがわかる。

4 制限された最適値

補題 4 $\beta \in \mathcal{B}(\alpha)$ のとき、任意の β' $(\beta < \beta' \leq 1)$ に対し、$\beta' \in \mathcal{B}(\alpha)$ が成立する。

(証明)
$\Gamma(\alpha)\bar{c}_L^{\beta'} \leq 0$ のみ示せば十分である。いま、

$$\bar{c}_L^\beta = (\bar{c}_{1L}^\beta, \cdots, \bar{c}_{m+n,L}^\beta)^T = \bar{c}^1 - \bar{\boldsymbol{\zeta}}L^{-1}(\beta), \quad \bar{\boldsymbol{\zeta}} = (\bar{\zeta}_1, \cdots, \bar{\zeta}_{m+n})^T$$

であるので、$\Gamma(\alpha) = (\gamma(\alpha)_{ij})$ とすると、$\Gamma(\alpha)\bar{c}_L^\beta$ の i 行目 $\sum_{j=1}^{m+n}\gamma(\alpha)_{ij}\bar{c}_{jL}^\beta$ は次のように変形される。

$$\sum_{j=1}^{m+n}\gamma(\alpha)_{ij}\bar{c}_{jL}^\beta = \sum_{j=1}^{m+n}\gamma(\alpha)_{ij}\bar{c}_j^1 - L^{-1}(\beta)\sum_{j=1}^{m+n}\bar{\zeta}_j\gamma(\alpha)_{ij}$$

ここで、$\sum_{j=1}^{m+n}\gamma(\alpha)_{ij}\bar{c}_j^1$ 、$\sum_{j=1}^{m+n}\bar{\zeta}_j\gamma(\alpha)_{ij}$ は定数であるので、それぞれ、K_{i1}, K_{i2} とおくと、

$$\sum_{j=1}^{m+n}\gamma(\alpha)_{ij}\bar{c}_{jL}^\beta = K_{i1} - L^{-1}(\beta)K_{i2}$$

とできる。
L の定義により、L^{-1} は $[0,1]$ 上で狭義単調減少関数であるため、$\beta'(\beta < \beta' \leq 1)$ に対し

i) $K_{i2} \geq 0$ **のとき** $K_{i1} - L^{-1}(\beta')K_{i2} \leq K_{i1} - L^{-1}(1)K_{i2} \leq 0$

ii) $K_{i2} < 0$ **のとき** $K_{i1} - L^{-1}(\beta')K_{i2} \leq K_{i1} - L^{-1}(\beta)K_{i2} \leq 0$

となり示された。□

定理 2 α を MLP に適合しているとする。このとき FLP の α-最適解 $\boldsymbol{x}^*(\alpha)$ によって制限された α-最適値 $\widetilde{Z}(\alpha)$ の可能性分布は、$\boldsymbol{x}^*(\alpha) = \mathbf{o}$ のとき $I_{\{0\}}$ となり、$\boldsymbol{x}^*(\alpha) \neq \mathbf{o}$ のとき

$$\pi_{\widetilde{Z}(\alpha)}(z) = \begin{cases} L\left(\dfrac{\mathbf{c}^{1T}\boldsymbol{x}^*(\alpha) - z}{\boldsymbol{\zeta}^T\boldsymbol{x}^*(\alpha)}\right), & z \in Z_L \\ R\left(\dfrac{z - \mathbf{c}^{1T}\boldsymbol{x}^*(\alpha)}{\boldsymbol{\eta}^T\boldsymbol{x}^*(\alpha)}\right), & z \in Z_U \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

によって得られる。ここで、

$$
\begin{aligned}
Z_L &= (-\infty, \boldsymbol{c}^{1T}\boldsymbol{x}^*(\alpha)] \cap Z(\alpha, \beta_0(\alpha)),\\
Z_U &= Z(\alpha, \beta_0(\alpha)) \cap [\boldsymbol{c}^{1T}\boldsymbol{x}^*(\alpha), +\infty),\\
\boldsymbol{\zeta} &= (\zeta_1, \cdots, \zeta_n)^T, \quad \boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \cdots, \eta_n)^T
\end{aligned}
$$

である。

(証明)
$\boldsymbol{x}^*(\alpha) = \mathbf{o}$ のときは、$z = 0$ でのみ可能性 1 をとる可能性分布となることは明らか。$\boldsymbol{x}^*(\alpha) = (x_1^*(\alpha), \cdots, x_n^*(\alpha))^T \geq \mathbf{o}, \boldsymbol{x}^*(\alpha) \neq \mathbf{o}$ とする。

$z \in Z_L$ ついてのみ示す。

任意の $z \in Z_L \subset Z(\alpha, \beta_0(\alpha))$ に対して、$\boldsymbol{c}_L^{\beta T}\boldsymbol{x}^*(\alpha)$ の β に関する狭義単調性から

$$
z = \boldsymbol{c}_L^{\beta T}\boldsymbol{x}^*(\alpha) = \sum_{j=1}^{n} c_j^1 x_j^*(\alpha) - L^{-1}(\beta)\sum_{j=1}^{n} \zeta_j x_j^*(\alpha)
$$

すなわち

$$
L\left(\frac{\boldsymbol{c}^1\boldsymbol{x}^*(\alpha) - z}{\boldsymbol{\zeta}^T\boldsymbol{x}^*(\alpha)}\right) = \beta
$$

なる $\beta = \bar{\beta}$ がただ 1 つ存在する。また、$\bar{\beta} < \beta \leq 1$ に対して、

$$
z \notin Z(\alpha, \beta), \quad \text{よって} \quad \beta I_{Z(\alpha,\beta)}(z) = 0
$$

であり、$\bar{\beta} \geq \beta \geq \beta_0(\alpha)$ に対して、

$$
z \in Z(\alpha, \beta), \quad \text{よって} \quad \beta I_{Z(\alpha,\beta)}(z) = \beta
$$

である。つまり、任意に固定された $z \in Z_L$に対して、

$$
\beta I_{Z(\alpha,\beta)}(z) = \begin{cases} 0, & \bar{\beta} < \beta \leq 1 \text{ のとき} \\ \beta, & \beta_0(\alpha) \leq \beta \leq \bar{\beta} \text{のとき} \end{cases}
$$

が成立し、

$$
\sup_{\beta \in \mathcal{B}(\alpha)} \beta I_{Z(\alpha,\beta)}(z) = \bar{\beta}
$$

となる。□

5 多目的線形計画問題へ応用

α-最適解 $\boldsymbol{x}^*(\alpha)$ によって制限された α -最適値 $\widetilde{Z}(\alpha)$ の可能性分布をファジィ多目的線形計画問題(Fuzzy Multi-Objectove Linear Programming problem : FMOLP) の解法へ応用する。

ここで考える計画問題は式 (1) において目的関数が l 個になったものである。

$$
\text{(14)} \qquad \text{(FMOLP)} \quad
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & \widetilde{\boldsymbol{c}}_1^T\boldsymbol{x} \\
\vdots & \vdots \\
\text{maximize} & \widetilde{\boldsymbol{c}}_l^T\boldsymbol{x} \\
\text{subject to} & \widetilde{A}\boldsymbol{x} \leq \widetilde{\boldsymbol{b}}, \\
& \boldsymbol{x} \geq \mathbf{o}
\end{array}
$$

ここで、

$$\widetilde{A}=(\widetilde{a}_{ij}),\quad \widetilde{\boldsymbol{b}}=(\widetilde{b}_1,\widetilde{b}_2,\cdots,\widetilde{b}_m)^T,\quad \widetilde{\boldsymbol{c}}_k=(\widetilde{c}_{k1},\widetilde{c}_{k2},\cdots,\widetilde{c}_{kn})^T,$$
$$i\in I=\{1,2,\cdots,m\},j\in J=\{1,2,\cdots,n\},$$
$$k\in K=\{1,2,\cdots,l\}$$

であり、各係数 $\widetilde{a}_{ij},\widetilde{b}_i,\widetilde{c}_{kj}$ $(i\in I,j\in J,k\in K)$ は有界な相互作用のない可能性変数とする。さらに、$\widetilde{c}_{kj}$ $(j\in J,k\in K)$ のみ LR type 、すなわち

$$\pi_{\widetilde{c}_{kj}}(r)=\begin{cases} L_k\left(\dfrac{c^1_{kj}-r}{\zeta_{kj}}\right) & r\le c^1_{kj},\zeta_{kj}>0 \\ R_k\left(\dfrac{r-c^1_{kj}}{\eta_{kj}}\right) & r>c^1_{kj},\eta_{kj}>0 \end{cases}$$

によって可能性分布を与え、$\widetilde{c}_{kj}=(c^1_{kj},\zeta_{kj},\eta_{kj})_{L_kR_k}$ と表す。Reference function L_k,R_k は標準であるとする。

5.1 単一目的線形計画問題の α–最適値

意思決定者の希望により可能性の水準 $\alpha\in(0,1]$ を固定して、各目的関数に関して次のような計画問題を考える。

$$(\mathrm{FMOLP}_k)\quad \begin{array}{ll} \text{maximize} & \widetilde{\boldsymbol{c}}_k^T\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & \widetilde{A}\boldsymbol{x}\le\widetilde{\boldsymbol{b}}, \\ & \boldsymbol{x}\ge\mathbf{o} \end{array}$$

各 FMOLP_k, $k\in K$ に関して JLP_k

$$(\mathrm{JLP}_k)\quad \begin{array}{ll} \text{minimize} & (\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})^T\boldsymbol{c}^1 \\ \text{subject to} & (\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})^TD^\alpha\ge\mathbf{o},\quad \boldsymbol{u}\ge\mathbf{o},\quad \boldsymbol{v}\ge\mathbf{o} \end{array}$$

を解き、選択された α が MLP_k

$$(\mathrm{MLP}_k)\quad \begin{array}{ll} \text{maximize} & \boldsymbol{c}^{1T}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & \boldsymbol{x}\in X(1) \end{array}$$

に適合しているか調べ、全て k について適合する共通の α を求める。少なくとも $\alpha=1$ に関しては成立している。

5.2 目標計画法的アプローチ

各 FMOLP_k に関しての α–最適解 $\boldsymbol{x}_k^*(\alpha)$ 及び α –最適解 $\boldsymbol{x}_k^*(\alpha)$ に制限された α–最適値$\widetilde{Z}_k(\alpha)$ を求める。これらの組 $(\widetilde{Z}_1(\alpha),\widetilde{Z}_2(\alpha),\cdots,\widetilde{Z}_l(\alpha))$ を理想点と考え、式 (14) の α に関する代替問題

$$(15)\qquad (\mathrm{FMOLP}-\alpha)\quad \begin{array}{ll} \text{minimize} & \lambda \\ \text{subject to} & w_k\cdot\rho_k(\widetilde{Z}_k(\alpha),\widetilde{\boldsymbol{c}}_k^T\boldsymbol{x})\le\lambda,\quad k=1,2,\cdots,l \\ & \boldsymbol{x}\in X(\alpha) \end{array}$$

へ変換する。ここで、 $\rho_k(\widetilde{Z}_k(\alpha),\cdot)$ は k 番目の目的関数に対応するリグレットを表し、 w_k は第 k 番目の目的関数に関しての重要度 (重み) を表す定数で、意思決定者によって与えられるものとする。

FMOLP$-\alpha$ を通常の線形計画問題へと変換を可能にするために、$\rho_k(\cdot,\cdot)$ として、次の関数を採用する。$\widetilde{a}=(a^1,a_L,a_U)_{L_kR_k},\widetilde{b}=(b^1,b_L,b_U)_{L_kR_k}$ とする。

$$\rho_k(\widetilde{a},\widetilde{b}) = d_1^k|a^1 - b^1| + d_2^k|a_L - b_L| + d_3^k|a_U - b_U| \tag{16}$$

ここで $d_1^k, d_2^k, d_3^k \geq 0$ であり、それぞれ mean, 左 spread, 右 spread の一致度の重要度を表す重みで意思決定者により与えられるものである。これを用いれば、 FMOLP$-\alpha$ は次のような通常の線形計画問題に変換できる。

$$(\mathrm{FMOLP}' - \alpha) \quad \begin{array}{ll} \text{minimize} & \lambda, \\ \text{subject to} & w_k d_1^k(\boldsymbol{c}_k^{1T}\boldsymbol{x}_k^*(\alpha) - \boldsymbol{c}_k^{1T}\boldsymbol{x}) \leq \lambda_{k1}, \\ & -w_k d_1^k(\boldsymbol{c}_k^{1T}\boldsymbol{x}_k^*(\alpha) - \boldsymbol{c}_k^{1T}\boldsymbol{x}) \leq \lambda_{k1}, \\ & w_k d_2^k(\boldsymbol{\zeta}_k^T\boldsymbol{x}_k^*(\alpha) - \boldsymbol{\zeta}_k^T\boldsymbol{x}) \leq \lambda_{k2}, \\ & -w_k d_2^k(\boldsymbol{\zeta}_k^T\boldsymbol{x}_k^*(\alpha) - \boldsymbol{\zeta}_k^T\boldsymbol{x}) \leq \lambda_{k2}, \\ & w_k d_3^k(\boldsymbol{\eta}_k^T\boldsymbol{x}_k^*(\alpha) - \boldsymbol{\eta}_k^T\boldsymbol{x}) \leq \lambda_{k3}, \\ & -w_k d_3^k(\boldsymbol{\eta}_k^T\boldsymbol{x}_k^*(\alpha) - \boldsymbol{\eta}_k^T\boldsymbol{x}) \leq \lambda_{k3}, \\ & \lambda_{k1} + \lambda_{k2} + \lambda_{k3} \leq \lambda, \\ & k \in K,\ \boldsymbol{x} \in X(\alpha). \end{array} \tag{17}$$

これにより、得られた最適解 $\boldsymbol{x}^*(\alpha)$ が意思決定者の満足解と考えられる。

参 考 文 献

[1] 乾口雅弘、久米靖文, “ファジィ多目的計画問題の解に対する概念”, 日本ファジィ学会誌 2(1990), 65–78.

[2] 久志本茂, “最適化問題の基礎”, 森北出版, 1979

[3] 桑野裕昭、久志本茂, “Fuzzy Linear Programming”, 京都大学数理解析研究所講究録 798 数理計画モデルにおける最適化理論 (1992), 140–150.

[4] 坂和正敏, “ファジィ理論の基礎と応用”, 森北出版, 1989.

[5] 坂和正敏、矢野均, “ファジーパラメータを含む多目的線形計画問題に対する統一的アプローチ”, 電子情報通信学会論文集 J71-A(1988), 1569–1575.

[6] 坂和正敏、矢野均、高橋淳也, “ファジーパラメータを含む多目的線形計画問題に対する拡張パレート最適性の概念とその性質”, 電子情報通信学会論文集 J72-A(1989), 678–684.

[7] S.Chanas, “Fuzzy Programming in Multiobjective Linear Programming – A Parametric Approach”, Fuzzy Sets and Systems 29(1989), 303–313.

[8] Y.-J.Lai, C.-L.Hwang, “Interactive Fuzzy Linear Programming”, Fuzzy Sets and Systems 45(1992), 169–183.

[9] M.K.Luhandjula, “Multiple Objective Programming Problems with Possibilistic Coefficients”, Fuzzy Sets and Systems 21(1987), 135–145.

[10] H.Rommelfanger, “Interactive Decision Making in Fuzzy Linaer Optimization Problems”, Euro. J. of Ope. Res. 41(1989), 210–217.

[11] M.Sakawa, H.Yano, “Feasibility and Pareto Optimality for Multiobjective Nonlinear Programming Prolems with Fuzzy Parameters”, Fuzzy Sets and Systems 43(1991) 1–15.

[12] M.Sakawa, H.Yano, "An Interactive Fuzzy Satisficing Method for Generalized Multiobjective Linear Programming Problems with Fuzzy Parameters", Fuzzy Sets and Systems 35(1990), 125–142.

[13] R.N.Tiwari, S.Dharamar, J.R.Rao, "Fuzzy Goal Programming - An Additive Model", Fuzzy Sets and Systems 24(1987), 27–34.

[14] B.Werners, "An Interactive Fuzzy Programming System", Fuzzy Sets and Systems 23(1987), 131–147.

[15] T.Yang, J.P.Ignizio, H.-J. Kim, "Fuzzy Programming with Nonlinear Membership Functions: Piecewise Linear Approximation", Fuzzy Sets and Systems 41(1991), 39–53.

[16] L.A.Zadeh, "The Concept of a Linguistic Variable and Its Application to Approximate Reasoning - I", Information Sciences. 8(1975), 199–249.

[17] H.-J.Zimmermann, "Fuzzy Programming and Linear Programming with Several Objective Functions", Fuzzy Sets and Systems 1(1978), 45–55.

[18] H.-J.Zimmermann, "Fuzzy Mathematical Programming", Comput. & Ops. Res. 10(1983), 291–298.