数理解析研究所講究録
第839巻 1993年 88-95

Chain Rule of Indicial Derivative

奈良教育大学　河上 哲　(Satoshi KAWAKAMI)

本稿では、指数やエントロピーが有限となる von Neumann 環の組 $M \supset N$の包含関係について考察した結果を報告する。とくに、これらの包含関係を記述する上で、何が基本的な役割を果しているのかを、一般的な状況において明確にする事を目的としている。前回（[Ka4]）は、部分環の「有限型包含関係」とその条件付き期待値の「指数型微分」という2つの概念について紹介した。今回は、「半有限型包含関係」と作用素値ウエイトの commutant のような役割を果す「standard 対応」について紹介しつつ、そのチェインルールの成立に焦点をあてて報告する。

1. 半有限型包含関係と作用素値ウエイトの standard 対応

以下、Mを可分ヒルベルト空間H上に作用する von Neumann 環、Nをその von Neumann 部分環とする。この時、M上の正規な半有限忠実な N-値ウエイト全体の集合を $P(M,N)$ と表し、更に次の集合を考える。

$$P_1(M,N) = \{E \in P(M,N);\ \sigma_t^E = id\}$$

$$E(M,N) \doteq \{E \in P(M,N); E(1) = 1\}$$

$$E_1(M,N) = \{E \in P_1(M,N); E(1) = 1\}$$

$$P(M) = P(M,C),\ P_1(M) = P_1(M,C),\ E(M) = E(M,C),\ E_1(M) = E_1(M,C)$$

A.Connes は Spatial 理論において、$\varphi \in P(M)$ と $\psi \in P(M')$ に対し、その Spatial 微分 $\Delta(\varphi/\psi)$ を定義し、$\sigma_t^\varphi = \mathrm{Ad}\Delta(\varphi/\psi)^{it}\,|_M$，$\sigma_t^\psi = \mathrm{Ad}\Delta(\varphi/\psi)^{-it}\,|_{M'}$ が成立する事等

を示している。U.Haagerup[Ha] は、ウエイトと期待値の両者を包括するものとして作用素値ウエイトを考え、$P(M,N)$ と $P(N',M')$ の間には、順序反転同型 $P(M,N) \ni E \longmapsto E^{-1} \in P(N',M')$ がある事を示した。この Haagerup 対応 E^{-1}は、Spatial 微分を用いて、$\Delta((\varphi \circ E)/\psi) = \Delta(\varphi/(\psi \circ E^{-1}))$ ($\varphi \in P(N)$, $\psi \in P(M')$) として特徴付けられる。この E^{-1}の 1 での値 $E^{-1}(1)$ を用いて、幸崎 [Ko] は、$E \in E(M,N)$ に対し、$\mathrm{index}E = E^{-1}(1)$ と定める事により、Jones の指数 [Jo] の一般化に成功した。我々は、一般に作用素値ウエイト $E \in P(M,N)$ に対しも、$\mathrm{index}E = E^{-1}(1)$ を Eの指数と呼ぶ事にする。他方、$E \in P(M,N)$ に対し、Eの $N' \cap M$への制限 E^cは、Eの $N' \cap M$上の忠実で正規な $Z(N)$-値ウエイトとなるが、残念ながら半有限とは限らない。U.Haagerup は、作用素値ウエイトに関する理論 [Ha] の中で、E^c が半有限となるケースの解析（同値条件とその性質）を行い、次の結果を示している。

命題 A. (U.Haagerup[Ha])

もし、ある $E \in P(M,N)$ に対し、E^cが半有限（つまり、$E^c \in P(N' \cap M, Z(N))$ となれば、すべての $E \in P(M,N)$ に対し、E^cは半有限であり、しかも対応 $P(M,N) \ni E \longmapsto E^c \in P(N' \cap M, Z(M))$ は順序同型である。

この命題Aは、$P(M,N)$ の情報が、$N' \cap M$上の作用素値ウエイト達で記述できる事を意味している。

$M \supset N$と $N' \supset M'$の両者が伴に、上の命題Aの条件を満たしている時、その包含関係 $R(M,N)$ を**半有限型** であると呼ぶ。この時、$\tau_M \in P(Z(M))$ と$\tau_N \in P(Z(N))$ を固定すると、$E \in P(M,N)$ に対し、$\tau_N \circ E = \tau_M \circ E'$ on $N' \cap M$を満たす $E' \in P(N',M')$ が唯一つ存在する。この対応：

$$P(M,N) \ni E \mapsto E' \in P(N',M')$$

を (τ_M, τ_N) に付随したEの **standard 対応**(correspondence) と呼ぶ。明らかに、

(1) $E_1 \leq E_2 \Leftrightarrow E_1' \leq E_2'$.

(2) $(E')' = E$.

(3) $\sigma_t^E = \sigma_t^{E'}$ on $N' \cap M$.

等は成立している。更に、次の補題も容易に示される。

補題 1.1

$M \supset N$の包含関係 $R(M, N)$ が半有限型であるとする。このとき、

(1) E'と E^{-1}は互いに commute する。

(2) $W^{-1} = W'$を満たす $W \in P_1(M, N)$ が唯一つ存在する。

(3) $E \in P(M, N)$ に対し、$dE^{-1}/dE' = (dW/dE)^2$ が成立する。

この補題を用いると、半有限型包含関係の特徴付けが次の形で与えられる。これは、山上氏の助言に負っている。

定理 1.2

可分ヒルベルト空間 H上の von Neumann 環の組 $M \supset N$ に対し、次は同値である。

(1)$M \supset N$の包含関係 $R(M, N)$ は半有限型である。

(2) 包含関係 $R(M, N)$ が半有限型でかつ $P_1(M, N) \neq \phi$,$P_1(N', M') \neq \phi$ 。

(3)$E(M, N) \neq \phi$ かつ $E(N', M') \neq \phi$ 。

前回 ([Ka4]) は、有限型包含関係、つまり $E_1(M, N) \neq \phi$ かつ $E_1(N', M') \neq \phi$ を満たす von Neumann 環の組 $M \supset N$について報告した。上の定理より、明らかに、有限型包含関係であれば、半有限型包含関係であるが、一般に、その逆は成立しない。無限次元ヒルベルト空間 Hに対し、$B(H) \supset C$の包含関係がその反例を与える。また、一般に、包含関係 $R(M, N)$ が半有限型 [resp. 有限型] の時、$N' \cap M$は半有限型 [resp. 有限型] である。他方、包含関係 $R(M, N)$ が半有限型の時は、$N' \cap M$が有限型であれば、包含関係 $R(M, N)$ も有限型となる。

2. 最小指数型条件付き期待値

日合氏による因子環の組 $M \supset N$に対する最小指数型条件付き期待値の存在と一意性に関する定理 ([Hi1]) は、指数理論において、重要な役割を果している。ここでは、我々の観点に立って、その定理を一般的な状況において再考してみる。

von Neumann 環の組 $M \supset N$の包含関係 $R(M,N)$ が半有限型であるとし$\tau_M \in P(Z(M))$ と $\tau_N \in P(Z(N))$ を固定する。ここで、(τ_M, τ_N) に付随した $E \in P(M,N)$ の standard 対応を E' で表す。この時、次が成立する。

定理 2.1

indexE' が半有限となる $E \in E(M,N)$ が存在する時、任意の $E \in E(M,N)$ に対し、

$$\mathrm{index}E_0' \le \mathrm{index}E'$$

を満たす $E_0 \in E(M,N)$ が唯一つ存在する。

証明のポイント

補題 1.1 を適用する。$E_0 = W_{W(1)^{-1}}$と置く。$E \in E(M,N)$ に対し、$A = dW/dE$ とおくと、

$$\mathrm{index}E_0' = E(A)^2, \qquad \mathrm{index}E' = E(A^2)$$

であるから Schwartz の不等式：

$$E(A)^2 \le E(A^2)$$

により、結論を得る。また、E_0の一意性は Wの一意性により従う。

上の定理における $E_0 \in E(M,N)$ を (τ_M, τ_N) に関する $M \supset N$の最小指数型条件付き期待値と呼ぶ。因子環の組 $M \supset N$に対しては、indexE' = index$E$ が成立しているので、系として日合氏の定理を得る。

3. チェインルール

von Neumann 環の三つ組 $M \supset L \supset N$に対する各種のチェインルールについて考察する。中でも、次に述べる作用素値ウエイトの standard 対応に関するチェインルールの成立が本質的である。

定理 3.1

von Neumann 環の三つ組 $M \supset L \supset N$に対し、$R(M,L)$ と $R(L,N)$ が半有限型であるとする。この時、$R(M,N)$ も半有限型であり、任意の$\tau_M \in P(Z(M)), \tau_L \in P(Z(L)), \tau_N \in$

$P(Z(N))$ と任意の $E_1 \in P(M, L), E_2 \in P(L, N)$ に対し、

$$(E_2 \circ E_1)' = E_1' \circ E_2'$$

が成立する。

証明のポイント

半有限型包含関係と作用素値ウエイトの standard 対応に関する還元 ([IK1], [IK2], [Ka5]) を実行し、最終的に、綿谷氏の意味での指数有限型の定義 ([Wa]) と定理を活用する。

補題 1.1 の (2) を満たす Wを $M \supset N$のに関する (τ_M, τ_N) に付随した canonical 作用素値ウエイトと呼ぶ。この時、上記と同じ状況の元で、定理 3.1 より、直ちに次が従う。

系 3.2 (canonical 作用素値ウエイトのチェインルール)

canonical 作用素値ウエイトと canonical 作用素値ウエイトの合成はまた canonical 作用素値ウエイトである。

von Neumann 環の組 $M \supset N$の包含関係が半有限型であるとする。ここで、$\varphi \in E(N' \cap M)$ と $E \in E(M, N)$ が $\varphi \circ E = \varphi$ on $N' \cap M$ を満たすとする。この時、補題 1.1 により、E^{-1} と E'は可換となるから、Eのφ に付随した **indicial derivative** $I_\varphi^E(M \mid N) = dE^{-1}/dE'$が $(N' \cap M)^E$に affiliate した正定値自己共役作用素として定義される ([Ka5])。

von Neumann 環の三つ組 $M \supset L \supset N$に対し、$R(M, L)$ と $R(L, N)$ が半有限型とする。ここで、$\varphi \in E(N' \cap M)$ を固定し、$E_1 \in E(M, N)$, $E_2 \in E(L, N)$ と $E = E_2 \circ E_1 \in E(M, N)$ がそれぞれの relative commutant の上で、$\varphi \circ E_i = \varphi \quad (i = 1, 2), \quad \varphi \circ E = \varphi$ を満たすとする。この時、次が成立する。

系 3.3 (indicial deririvative のチェインルール)

$$I_\varphi^{E_2 \circ E_1}(M \mid N) = I_\varphi^{E_1}(M \mid L) I_\varphi^{E_2}(L \mid N)$$

証明のポイント

$$I_\varphi^{E_2 \circ E_1}(M \mid N) = d(E_2 \circ E_1)^{-1}/d(E_2 \circ E_1)' = d(E_1^{-1} \circ dE_2^{-1})/d(E_1' \circ E_2')$$

$$= (dE_1^{-1}/dE_1')(dE_2^{-1}/dE_2') = I_\varphi^{E_1}(M \mid L) I_\varphi^{E_2}(L \mid N)$$

$I_\varphi^E(M \mid N)$ がスカラー作用素となる時、$E \in E(M,N)$ を（φ に付随するが）一様有限型と呼ぶ。この時、上の系 3.3 より、次が直ちに従う。

系 3.4 (一様有限型条件付き期待値のチェインルール)

一様有限型条件付き期待値と一様有限型条件付き期待値の合成は、また一様有限型条件付き期待値となる。

因子環の組 $M \supset N$ に対しては、条件付き期待値 $E \in E(M,N)$ について、E が最小指数型である事と一様有限型である事は同値となる。したがって、因子環の三つ組 $M \supset L \supset N$ に対し、最小指数型条件付き期待値と最小指数型条件付き期待値の合成は、また最小指数型条件付き期待値となる事 (幸崎-Longo[KoL], Longo[L]) は、上の系 3.4 により明らかである。この性質は、もう少し、一般的な状況でも成立する。

系 3.5 (最小指数型条件付き期待値のチェインルール, 幸崎-Longo[KoL], Longo[L])

von Neumann 環の三つ組 $M \supset L \supset N$ に対し、$Z(L) \subset Z(N)$ の時、最小指数型条件付き期待値と最小指数型条件付き期待値の合成は、また最小指数型条件付き期待値となる。

von Neumann 環の組 $M \supset N$ に対し、$\varphi \in E(N' \cap M)$ と $E \in E(M,N)$ が $\varphi \circ E = \varphi$ on $N' \cap M$ を満たすとする。この時、E の φ に関するエントロピー $K_\varphi^E(M \mid N)$ が $K_\varphi^E(M \mid N) = d(\varphi \circ E^{-1})/d\varphi$ により定義される。このエントロピー $K_\varphi^E(M \mid N)$ が有限となる時、包含関係 $R(M,N)$ は半有限型となる。また、包含関係 $R(M,N)$ が半有限型の時、このエントロピーは $K_\varphi^E(M \mid N) = \varphi(\log I_\varphi^E(M \mid N))$ ([Ka3], [Ka5], [Hi2]) により、与えられる。この時、系 3.3 と同じ状況の元で、系 3.3 より、直ちに次が従う。

系 3.6 (エントロピーの加法性)

$$K_\varphi^{E_2 \circ E_1}(M \mid N) = K_\varphi^{E_1}(M \mid L) + K_\varphi^{E_2}(L \mid N)$$

M が有限型の von Neumann 環の時、τ を M 上の忠実、正規なトレースで $\tau(1) = 1$ とする。この時、M の von Neumann 部分環 N に対し、Pimsner-Popa のエントロピー $H_\tau(M \mid N)$

が定義されている ([PP])。 Mが II_1型の von Neumann 環の時は

$$H_\tau(M \mid N) = K_\tau(M \mid N)$$

が成立している事を前回 ([Ka3],[Ka4]) 報告している。従って、上の系より、次が成立する。

系 3.7 (Pimsner-Popa のエントロピーの加法性)

Mが II_1型の von Neumann 環の時、$L \supset N$を Mの von Neumann 部分環とする。この時、Pimsner-Popa のエントロピーに関して、

$$H_\tau(M \mid N) = H_\tau(M \mid L) + H_\tau(L \mid N)$$

が常に成立する。

Pimsner-Popa のエントロピーの加法性については、１９８７年の我々の論文以来 ([KaY1], [KaY2], [Ka1],[Ka2])、ずっと問題としてきたが、ここにきてやっと、長年の懸案が解決した。

参 考 文 献

[Ha] Haagerup, U. ; Operator valued weights in von Neumann algebras, I, II, J.Funct. Anal., 32(1979), 175-206; 33(1979), 339-361.

[Hi1] Hiai, F. ; Minimizing indices of conditional expectations onto a subfactor, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 24(1988), 673-678.

[Hi2] Hiai, F.; Minimum index for subfactors and entropy, Preprint.

[IK1] Ichihara, R. and Kawakami, S.; Radon-Nikodym derivative for operator valued weights, Bull. Nara Univ. Educ., 40(1991), 1-7.

[IK2] Ichihara, R. and Kawakami, S. ; Disintegration of operator valued weights, Preprint.

[Jo] Jones, V. ; Index for subfactors, Invent.Math., 72(1983), 1-25.

[KaY1] Kawakami,S. and Yoshida, H. ; Actions of finite groups on finite von Neumann algebras, J. Math. Soc. Japan, 39(1987), 609-626.

[KaY2] Kawakami, S. and Yoshida H.; Reduction theory on the relative entropy, Math. Japon., 33(1988), 975-990.

[Ka1] Kawakami, S. ; Reduction theory on the relative entropy II, Bull. Nara Univ. Educ., 38(1989), 1-5.

[Ka2] Kawakami, S. ; Relative entropy of a fixed point algebra, Preprint.

[Ka3] Kawakami, S. ; Some remarks on index and entropy for von Neumann subalgebras, Proc. Japan Acad., 65(1989), 323-325.

[Ka4] Kawakami, S. ; フォンノイマン部分環の指数に関する還元論, RIMS 講究録 715.

[Ka5] Kawakami, S. ; Indicial derivative for von Neumann subalgebras, Preprint.

[Ko] Kosaki, H. ; Extensions of Jones' theory on index to arbitrary factors, J.Funct. Anal., 66(1986), 123-140.

[KoL] Kosaki, H. amd Longo, R. ; A Remark on the minimal index of subfactors,Preprint.

[L] Longo,R. ; Minimal index and Braided subfactors,Preprint.

[PP] Pimsner, M. and Popa, S. ; Entropy and index for subfactors, Ann.Sci. École Norm.Sup., Sér.4, 19(1986), 57-106.

[Wa] Watatani, Y. ; Index for C*-subalgebras, Mem, AMS, 424(1990).