数理解析研究所講究録
第 842 巻 1993 年 12-35

Bayes 信頼区間に基づく検定批判

筑波大 数学 佐藤道一 (Michikazu Sato)

§1 はじめに

$X_1, X_2, \cdots \sim N(\theta, 1)$ i.i.d. とし、$X_1, X_2, \cdots$ の順に観測するものとする。θ の事前分布を Lebesgue 測度（今の場合 improper）とすると、X_n まで観測したときの事後分布は $N(\overline{X}_n, \frac{1}{\sqrt{n}})$（但し $\overline{X}_n := \sum_{j=1}^{n} X_j / n$）となる。$0 < \alpha < 1$ とし、k を

$$Z \sim N(0, 1) \text{ のとき } P(|Z| > k) = \alpha$$

となるようにとると、θ の信頼度 $1-\alpha$ の Bayes 信頼区間は $\left[\overline{X}_n - \frac{k}{\sqrt{n}}, \overline{X}_n + \frac{k}{\sqrt{n}}\right]$ となる。帰無仮説 $H_0 : \theta = 0$ の検定を考えよう。$\theta = 0$ が今の区間に入っていれば H_0 を受容し、入っていなければ棄却するのが「有意水準 α の Bayes 検定」である。ここでの有意水準は Neyman-Pearson（以下、NP と書く）の意味ではないことに注意する。今の場合、棄却域は $\{|\overline{X}_n| > \frac{k}{\sqrt{n}}\}$ となり、n をあ

らかじめ指定した場合はNPの立場と結果は一致する。このことは応用上は通常は成り立つ。なお通常の Bayesian の立場では n をあらかじめ指定する必要はない。(このことに関しては、赤池 (1989) において批判的に述べられている。)

この方法による検定については、Lindley (1965, 1972), 繁桝 (1985) において記述されている。もっとも Lindley (1988, 1992) ではこの立場を捨てて Jeffreys (1961) の立場の Bayes 検定に改めていて、また繁桝 (1985) には今の立場と Jeffreys の立場の双方が記述されている。Jeffreys の立場の検定では以下に述べるような問題は起きない。

今、「$|\bar{X}_n| > \frac{k}{\sqrt{n}}$ となるまで実験を続ける」という停止規則を考えると、これは閉(定義後述)なので、α を十分小さくとって今の実験を行うことにより、この検定の支持者に対して、H_0 は正しくないと信じさせることに H_0 の真偽によらず確率1で成功するのである。このことは Lindley (1957), Berger & Wolpert (1984), Basu (1988) に記述されているが、実はかなり一般に、実験回数 n をあらかじめ指定した場合にNPの(解釈は認めないにせよ)結果を認め、また尤度原理を認めることにすると、こういったことが起こる(後述のWSC, 実はもっと強いことが成り立つ)。このことはNPの立場の検定の結果は尤度原理とは相容れな

いものである（単に「同じことの解釈の違い」ではない）ことを示している。

なお、Jeffreys の立場では、信頼区間を用いず、$P(H_0|data)$ を用いて検定するので、H_0 を検定しようという以上、事前分布を $P(H_0)=0$ となるようにとったのでは無意味である。今、この立場の支持者に H_0 は正しくないと信じさせるために、相手に proper な事前分布を決めてもらい、α を十分小さくとって、

$$P(H_0|data)<\alpha \qquad (1.1)$$

となるまで実験を続けることを考える。但し、$P(H_0)<\alpha$ であれば相手は始めから H_0 はありそうもないことと考えているのだから除外する。すると、この停止規則は閉でない（閉とすると (1.1) の辺々の期待値をとり $P(H_0)<\alpha$ となり矛盾）ので、これは確率1で成功するわけではない（後述の用語で (1.1) を棄却域とする検定はWSCではない）。

§2　主要概念について

$X_1, X_2, \cdots$ を確率変数の列とする．値は抽象的なものでよく、また i.i.d. でなくてもよい．母数 θ に対して $(X_1, X_2, \cdots)$ の分布が定まっているものとする。$X_1, X_2, \cdots$ の順に観測するものとする．$X_n^* := (X_1, X_2, \cdots, X_n)$

とする．実験の停止規則 σ が $\theta=\theta_0$ で閉（*closed*）であるとは，

$$P_{\theta_0}(\sigma\text{に基づく実験回数}<\infty)=1$$

となることを意味する．単に「σ は閉」というときは任意の θ で閉であることを意味し，「σ は閉でない」というときはある θ で閉でないことを意味する．このことは以下の WSC，SSC，ASC についても同様である．

以下，帰無仮説を H_0，対立仮説を H_1 で表す．今，H_0 を H_1 に対して検定することを考える．各 n に対して，X_n^* を観測したときの棄却域 R_n が与えられているとする．（なお，ランダム検定を考える場合は，乱数を導入して非ランダム検定に帰着させる．）このとき，

<u>定義 2.1</u>　検定列 $\{R_n\}$ は $\theta=\theta_0$ で WSC（*weakly sophistically closed*，弱詭弁的閉）であるとは

$$P_{\theta_0}(X_n^*\in R_n\ \ \exists n)=1$$

となることである．

<u>定義 2.2</u>　検定列 $\{R_n\}$ は $\theta=\theta_0$ で SSC（*strongly sophistically closed*，強詭弁的閉）であるとは

$$P_{\theta_0}(X_n^*\in R_n\ \ i.o.)=1$$

となることである．ここで $i.o.$ は無限回（*infinitely often*）を意味する．

なお、「無限回実験することはできないからSSCの方は空論ではないか」と思われるかも知れないが、これには次のような詭弁術的意味がある。

今、私はH_0は正しくないということを主張したいのだが、実は先人の行った実験が既にある。先人の実験結果が私に都合が悪いからといって無かったことにするわけにはいかないが、しかし追試をすることはできる。そこで、先人の実験結果で棄却されるのであれば私は自らは実験せず、「先人の実験により棄却される」と主張する。先人の実験結果で受容されるのであれば私は追試をする。追試は棄却されるまで続けて、「先人の実験と私の実験を合わせると棄却される」と主張する。これは成功する（有限回で終わる）かというと、実は次の定理が成り立つ。

定理2.1　Σを$\theta=\theta_0$で閉なランダム停止規則の族で、$\{\sigma_j\}_{j=1}^{\infty}\subset\Sigma$があって、$\sigma_j$のときの実験回数を$M_j$（一般には確率変数）とすると、観測値を与えたときの$\sigma_1, \sigma_2, \cdots$での実験中止の条件付き同時分布を適当に定めると、

$$M_j \to \infty \quad (j\to\infty) \quad P_{\theta_0}\text{-a.e.} \tag{2.1}$$

が成り立つとする。このとき次の(1)(2)は同値である。

(1)　$\{R_n\}$は$\theta=\theta_0$でSSCである。

(2)　任意の先人のΣに属する停止規則に対して、上のこ

とは P_{θ_0} 確率 1 で成功する。

<u>証明</u> 容易なので省略する。 □

<u>注意</u> 特に $n_1 < n_2 < \cdots$, $n_j \in \mathbb{N}$ とし、σ_j を「ちょうど n_j 回実験」とすると、$\Sigma = \{\sigma_j\}_{j=1}^{\infty}$ として (2.1) が成り立つ。なおこの定理は SSC の詭弁術的意味を明らかにするだけではなく、SSC を判定するのにも用いられる。

$n_1 < n_2 < \cdots$ $n_j \in \mathbb{N}$ に対して、

$$R_n^* := \begin{cases} R_n & (n = n_j) \\ \phi & (n \neq n_j \ \forall j) \end{cases}$$

として得られる検定列 $\{R_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ を $\{R_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ と書き、$\{R_n\}$ の部分列という。これは、$Y_j = (X_{n_{j-1}+1}, X_{n_{j-1}+2}, \cdots, X_{n_j})$ (但し $n_0 = 0$) として $Y_1, Y_2, \cdots$ に基づく検定列と考えることもできる。

<u>定義 2.3</u> 検定列 $\{R_n\}$ は $\theta = \theta_0$ で ASC (all-subsequentially sophistically closed, 全部分列詭弁的閉) であるとは、$\{R_n\}$ の任意の部分列が $\theta = \theta_0$ で SSC となることである。

なお、これは $\{R_n\}$ の任意の部分列が $\theta = \theta_0$ で WSC であることと同値なことが定理 2.1 から容易に得られる。

定義から明らかに、

$$\mathrm{ASC} \Rightarrow \mathrm{SSC} \Rightarrow \mathrm{WSC}$$

が成り立つ.

以下、検定と検定列は誤解のおそれのない限り混同して用いる。

§3　正確な検定と漸近検定

以下、$0 < \alpha < 1$ とする.

定義3.1　nを固定する。次の仮定

(3a)　$T_n = g_n(X_1, \cdots, X_n)$, T_nは実数値で、T_nの分布はH_0のθには依存しない.

(3b)　t_n（境界値という）があって、

(ア) $T_n < t_n$なら棄却、$T_n > t_n$なら受容

(イ) $T_n = t_n$なら観測値によらず一定の条件付き確率で棄却

(ウ) H_0のθに対してP_θ(棄却) $= \alpha$

を満たす検定を、T_nに基づくNP有意水準αの正確な左側検定という.

定義3.2　nを固定し、(3a)と(3b)の(ア)(ウ)を満たす検定を、境界値以外でT_nに基づくNP有意水準αの正確な左側検定という.

定義3.3　各nに対して(3a)が成り立ち、更に、

(3c)　H_0の下でのT_nの分布はある確率分布λに弱収

束し、λの分布函数は連続である。

(3 d)　t_∞（境界値という）があって、

(エ) $T_n < t_\infty$ なら棄却, $T_n \geqq t_\infty$ なら受容

(オ) $\lambda((-\infty, t_\infty)) = \alpha$

を満たす検定を、T_n に基づくＮＰ有意水準αの開棄却域漸近左側検定という。

<u>定義3.4</u>　定義3.3で、(エ) のかわりに

(エ)′ $T_n \leqq t_\infty$ なら棄却, $T_n > t_\infty$ なら受容

とした場合は, T_n に基づくＮＰ有意水準αの閉棄却域漸近左側検定という。

通常は定義3.1～4の検定はＳＳＣ, ＡＳＣに関しては同じことであるが、これには微妙な問題がある。それを以下で述べる。

<u>定理3.1</u>　(3 a) の下で次の (1)(2) は同値である。

(1)　任意のαに対して、T_n に基づくＮＰ有意水準αの正確な左側検定をどのように定めても $\theta = \theta_0$ でＳＳＣである。

(2)　任意のαに対して、T_n に基づくＮＰ有意水準αの正確な左側検定を適当に定めると $\theta = \theta_0$ でＳＳＣである。

ＡＳＣ, ＷＳＣについても同様である。

証明　水準$\frac{\alpha}{2}$のときと比較すればよい。　□

定理3.2　(3a)(3c) の下で、定理3.1の (1)(2) と次の (3)〜(8) は互いに同値である。

(3)　任意のαに対して、境界値以外でT_nに基づくNP有意水準αの正確な左側検定をどのように定めても$\theta=\theta_0$でSSCである。

(4)　任意のαに対して、境界値以外でT_nに基づくNP有意水準αの正確な左側検定を適当に定めると$\theta=\theta_0$でSSCである。

(5)　任意のαに対して、T_nに基づくNP有意水準αの開棄却域漸近左側検定をどのように定めても$\theta=\theta_0$でSSCである。

(6)　任意のαに対して、T_nに基づくNP有意水準αの開棄却域漸近左側検定を適当に定めると$\theta=\theta_0$でSSCである。

(7)　(5) の開を閉に変えたものが成り立つ。

(8)　(6) の開を閉に変えたものが成り立つ。

ASCについても同様である。

証明　(5)$\Longleftrightarrow$(6), (7)$\Longleftrightarrow$(8) は定理3.1と同様。
(6)$\Longrightarrow$(8), (3)$\Longrightarrow$(1), (2)$\Longrightarrow$(4) は自明。
(4)$\Longrightarrow$(5) を示す。(4), (5) の境界値$t_n(\alpha)$, $t_\infty(\alpha)$

をとる．H_0 の θ に対し，

$$P_\theta\left(T_n < t_\infty\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) \to \frac{\alpha}{2} \quad (n\to\infty) \qquad (3.1)$$

だから，ν があって

$$\frac{\alpha}{3} < P_\theta\left(T_n < t_\infty\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) < \alpha \quad \forall n \geqq \nu$$

だから $t_n\left(\frac{\alpha}{3}\right) \leqq t_\infty\left(\frac{\alpha}{2}\right) < t_\infty(\alpha) \quad \forall n \geqq \nu \qquad (3.2)$

による．$(8) \Longrightarrow (3)$ は $t_\infty\left(\frac{\alpha}{3}\right) < t_\infty\left(\frac{\alpha}{2}\right) \leqq t_n(\alpha) \ \forall n \geqq \nu$

による．□

注意1　非WSCをいうには最初の有限個を無視できないので，定理3.2はWSCについては成り立たない。

注意2　(3a) だけで $(4) \Longrightarrow (3)$ はいえない．反例として，H_0 で $X_1, X_2, \cdots \sim U(0,1)$ i.i.d. $T_n \equiv 0$ とすると，境界値 $t_n(\alpha) = 0$ で，$R_n := \{X_n < \alpha\}$，$\hat{R}_n := \{X_1 < \alpha\}$ は共に境界値以外で T_n に基づくNP有意水準 α の正確な左側検定だが，$\{R_n\}$ は H_0 でASC，$\{\hat{R}_n\}$ は H_0 で非WSCである．

注意3　定義3.3で (3c) の「λ の分布函数は連続」と (エ) の等号を外して，(オ) を「T_n に基づく検定函数 φ が $\int \varphi(t)\lambda(dt) = \alpha$ を満たす」と変えたのでは不都合がある．§1の設定で Φ を $N(0,1)$ の分布函数とすると，H_0 で $\Phi(\sqrt{n}\,\bar{X}_n) \sim U(0,1)$ だから，

$$T_n := \frac{1}{n}\{1 + \Phi(\sqrt{n}\,\bar{X}_n)\} \sim U\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right)$$

となり、0に集中した分布に弱収束し、上の「定義3.3をゆるめた定義」によると、T_n に基づく漸近左側検定は常に受容され、一方、$-T_n$ に基づく漸近左側検定は常に棄却されることになる。なお、「λの分布函数は連続」は定理3.2の証明の(3.1)及び(3.2)(<の部分)で使っている。また、弱収束というときには一般には極限は確率分布とは限らないが、その場合も(3.1)が必ずしも成り立たず不都合がある。

注意4　定義3.3で T_n の分布函数は H_0 で連続とは限らないので、(I)の等号は一般には非本質的とはいえない。

H_0 で $X_1, X_2, \cdots \sim U(0,1)$ i.i.d. とし、

$$T_n := \begin{cases} X_1 & (X_1 < \frac{1}{2}) \\ \frac{1}{2} & (\frac{1}{2} \leqq X_1 \text{ かつ } X_n < \frac{1}{n}) \\ \dfrac{nX_n + n - 2}{2(n-1)} & (\frac{1}{2} \leqq X_1 \text{ かつ } \frac{1}{n} \leqq X_n) \end{cases}$$

とすると、H_0 での T_n の漸近分布は $U(0,1)$ となり、NP有意水準 $\alpha = \frac{1}{2}$ とし、T_n に基づく漸近左側検定は、境界値 $t_\infty = \frac{1}{2}$ で、開棄却域の場合(正確な検定と一致し)、H_0 で非WSCだが、閉棄却域の場合

$$\begin{aligned} & P_{H_0}\left(T_n \leqq \frac{1}{2} \text{ i.o.}\right) \\ &= P_{H_0}\left(X_1 < \frac{1}{2}\right) + P_{H_0}\left(X_1 \geqq \frac{1}{2}\right) P_{H_0}\left(X_n < \frac{1}{n} \text{ i.o.}\right) \\ &= 1 \quad (\text{Borel-Cantelli の補題による}) \end{aligned}$$

だから H_0 でSSCである。

§4 SSC、ASCの判定法

本章ではSSC、ASCの判定法を述べる。なお、重複対数の法則はSSCの判定には有用であるが、ASCの判定には使えない。

定理4.1 検定列 $\{R_n\}$ について、次のことが成り立つ。

(1) $\varepsilon > 0$ と $m_0 \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ があって、任意の $m \geqq m_0$, $X_m^* = x_m^*$ に対して、ある $n > m$ があって

$$P_{\theta_0}(X_n^* \in R_n \mid X_m^* = x_m^*) \geqq \varepsilon$$

ならば、$\{R_n\}$ は $\theta = \theta_0$ でSSCである。

(2) $\varepsilon > 0$ と $m_0 \in \mathbb{N}_0$ があって、任意の $m \geqq m_0$, $X_m^* = x_m^*$ に対して、

$$\liminf_{n \to \infty} P_{\theta_0}(X_n^* \in R_n \mid X_m^* = x_m^*) \geqq \varepsilon$$

ならば、$\{R_n\}$ は $\theta = \theta_0$ でASCである。

注意 $m = 0$ のとき、条件付き確率は条件付きでない確率を意味する。

証明 $P = P_{\theta_0}$ とし、X_n の標本空間を $(\mathcal{X}_n, \mathcal{A}_n)$ とする。

(1) 第1段 まず、特に $m_0 = 0$ として $\theta = \theta_0$ でWSCをいう。$m \in \mathbb{N}_0$, x_m^* に対して仮定を満たす最小の n を $N_m(x_m^*)$ とする。N_m の可測性は容易に得られる。必要とあれば登録番号をつけて $\mathcal{X}_n$ は互いに素とみなし、更に X_n のとり得ない値 $*_n$ (という記号) を $\mathcal{X}_n$ に追加して、

有限列 $(x_i, x_{i+1}, \cdots, x_j) \in \prod_{k=i}^{j} \mathcal{X}_k$ と、無限列 $(*_1, *_2, \cdots, *_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \cdots, x_j, *_{j+1}, *_{j+2}, \cdots) \in \prod_{k=1}^{\infty} \mathcal{X}_k$ とを同一視する。以下、確率変数とその値を混同して用いる。

$$N_n = N_n(X_1, \cdots, X_n) \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

$$M_0 := 0,\ M_n := N_{M_{n-1}} \quad (n \in \mathbb{N})$$

とする。M_n の $\prod_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$ 可測性は容易に得られる。$\prod_{n=1}^{\infty} \mathcal{X}_n$ の値をとる確率変数 $Y_n = Y_n(X_1, X_2, \cdots)$ の列 $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$Y_n := (X_{M_{n-1}+1}, X_{M_{n-1}+2}, \cdots, X_{M_n})$$

で定める。(注意、M_{n-1} は $X_1, \cdots, X_{M_{n-1}}$ に依存する。)
Y_n の $\prod_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n \to \prod_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$ 可測性は容易に得られる。$Y_n^* := (Y_1, \cdots, Y_n)$ とすると、$Y_n^* = X_{M_n}^*$ だから、$\{R_{M_n}\}_{n=1}^{\infty}$ を Y_n^* に基づく検定列と考え、

$$P(X_n^* \in R_n\ {}^{\exists}n) \geqq P(Y_n^* \in R_{M_n}\ {}^{\exists}n)$$

だから、上の右辺 $=1$ をいえばよい。

一般に、$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して、

$$P(A_n \mid A_1^c \cap \cdots \cap A_{n-1}^c) \geqq \varepsilon > 0 \quad {}^{\forall}n \in \mathbb{N}$$

(但し、$n=1$ に対しては条件付きでない確率を意味し、$P(B)=0$ のとき $P(A|B)$ は任意に定めてよいものとする。)
ならば、$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = 1$ (これは余事象を考えれば容易に得られる) なので、$n \in \mathbb{N}$ を固定して、

$$B := \{Y_1^* \notin R_{M_1}, \cdots, Y_n^* \notin R_{M_{n-1}}\}$$

として、

$$P(Y_n^* \in R_{M_n} | B) \geqq \varepsilon \qquad (4.1)$$

をいえばよい。$P(B) \neq 0$ として示してよい。M_1 は定義より定数なので m_1 とし、

$$B_{m_2,\cdots,m_n} := \{M_2 = m_2, \cdots, M_n = m_n, \\ Y_1^* \notin R_{M_1}, \cdots, Y_n^* \notin R_{M_n}\}$$

とすると、$B = \sum_{\substack{m_2,\cdots,m_n \\ \text{とり得る値}}} B_{m_2,\cdots,m_n}$ となる。$\sum$は直和の意味である。ここで一般に

$$P(A | \sum_k B_k) = \frac{\sum_k P(A|B_k) P(B_k)}{\sum_k P(B_k)}$$

(但し、分母 > 0 のとき) なので、(4.1) をいうには

$$P(Y_n^* \in R_{M_n} | B_{m_2,\cdots,m_n}) \geqq \varepsilon \qquad (4.2)$$

をいえばよい。

$$(4.2)\text{ の左辺} = P(X_{m_n}^* \in R_{m_n} | B_{m_2,\cdots,m_n})$$
$$= E[P(X_{m_n}^* \in R_{m_n} | X_{m_{n-1}}^*) | B_{m_2,\cdots,m_n}] \qquad (4.3)$$

ここで$E[\ |\ ]$は古典的、$P(\ |\ )$は抽象的な意味であり、$B_{m_2,\cdots,m_n}$ が $X_{m_{n-1}}^*$ だけで決まる集合であることにより最後の等号が成り立つ（これは抽象的な条件付き確率の定義の言いかえである）。更に、仮定とM_n の定義から、

$$(4.3)\text{の右辺} \geqq E[\varepsilon \mid B_{m_2,\cdots,m_n}] = \varepsilon$$

となる。以上より、$\theta=\theta_0$ でWSCである。

第2段　一般の m_0 で、$\theta=\theta_0$ でSSCを示す。定理2.1より、$\ell\ (>m_0)$ を任意に固定し、先人が ℓ 回実験したとき、私の追試で棄却できる（P_{θ_0}－a.e.）ことをいえばよい。それには $\tilde{m}_0>\ell$ があって、$\{R_{\tilde{m}_0+n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ が $\theta=\theta_0$ でWSCを示せばよい。第1段の記号で、N_ℓ のとり得る値は $\ell+1,\ \ell+2,\ \cdots$ だから、$\tilde{m}_0>\ell\ (>m_0)$ を

$$P(N_\ell=\tilde{m}_0) =: \delta > 0$$

となるようにとれる。そこで、$\tilde{\varepsilon}=\varepsilon\delta\ (>0)$ とし、$\{R_n\}$ の部分列 $\{\tilde{R}_n\}=\{R_{\tilde{m}_0+n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ を考えると、これは $Z_1:=X^*_{\tilde{m}_0},\ Z_2:=X_{\tilde{m}_0+1},\ Z_3:=X_{\tilde{m}_0+2},\ \cdots$ に基づく検定列と考えられ、I_A を定義函数(indicator)とし、

$$\begin{aligned}
&P(Z_1\in\tilde{R}_1) = P(X^*_{\tilde{m}_0}\in R_{\tilde{m}_0})\\
&= E[P(X^*_{\tilde{m}_0}\in R_{\tilde{m}_0} \mid X^*_\ell)]\\
&\geqq E[I_{\{N_\ell=\tilde{m}_0\}}\, P(X^*_{\tilde{m}_0}\in R_{\tilde{m}_0} \mid X^*_\ell)]\\
&\geqq E[I_{\{N_\ell=\tilde{m}_0\}}\,\varepsilon]\\
&= \varepsilon P(N_\ell=\tilde{m}_0) = \varepsilon\delta = \tilde{\varepsilon}
\end{aligned}$$

ここで2番目の不等号は仮定と N_ℓ の定義による。従って、$m=0$ に対し、$n=1$ とすると $P(Z_1\in\tilde{R}_1)\geqq\tilde{\varepsilon}$ となる。$m=1,2,\cdots,\ Z^*_m:=(Z_1,\cdots,Z_m)=X^*_{\tilde{m}_0+m-1}$ に対

しては、$n = N_{\tilde{m}_0+m-1} - m_0 + 1$ として、

$$P(Z_n^* \in \tilde{R}_n \mid Z_m^*)$$

$$= P(X_{N_{\tilde{m}_0+m-1}}^* \in R_{N_{\tilde{m}_0+m-1}} \mid X_{\tilde{m}_0+m-1}^*) \geqq \varepsilon \geqq \tilde{\varepsilon}$$

だから $\{Z_n\}$ に基づく検定列 $\{\tilde{R}_n\}$ について、ε のかわりに $\tilde{\varepsilon}$ として、$m_0 = 0$ で仮定が成り立つので、第1段より $\{\tilde{R}_n\}$ は $\theta = \theta_0$ でWSCである。以上より示された。

(2) $\{R_n\}$ の任意の部分列に対して ε のかわりに $\frac{\varepsilon}{2}$ として(1)の仮定が満たされることによる。 □

<u>定理4.2</u> $X_1, X_2, \cdots$ は互いに独立とし、$T_n = g_n(X_n^*)$ は実数値で、$R_n \supset \{T_n < t_0\}$ (t_0 は n によらない)とし、次の(4a)(4b)が成り立つと仮定する。

(4a) $t_1 < t_0$ があって

$$\liminf_{n\to\infty} P_{\theta_0}(T_n < t_1) > 0$$

(4b) $m_0 \in \mathbb{N}_0$ があって、任意の $m \geqq m_0$, $x_1, x_2, \cdots, x_m$ (x_j は X_j のとり得る値)に対して、

$$g_n(x_1, \cdots, x_m, X_{m+1}, \cdots, X_n) - T_n \to 0 \ (P_{\theta_0}) \ (n \to \infty)$$

(上式は確率収束の意味)

このとき、$\{R_n\}$ は $\theta = \theta_0$ でASCである。

<u>証明</u> $P_{\theta_0}(T_n < t_0 \mid X_1 = x_1, \cdots, X_m = x_m)$

$$= P_{\theta_0}(g_n(x_1, \cdots, x_m, X_{m+1}, \cdots, X_n) < t_0)$$

$$\geqq P_{\theta_0}(T_n < t_1) - P_{\theta_0}(g_n(x_1, \cdots, x_m, X_{m+1}, \cdots, X_n) \geqq t_0 - t_1)$$

だから辺々の$\liminf_{n\to\infty}$をとり、定理4.1に帰着される。 □

注意　(4a)のかわりに

(4a)′　$\liminf_{n\to\infty} P_{\theta_0}(T_n < t_0) > 0$

としてはならない．反例として，$X_1, X_2, \cdots$ は互いに独立で、$P_{\theta_0}(X_1 \in A) = \alpha$ とし，$(0 < \alpha < 1)$

$$T_n := \begin{cases} -\frac{1}{n} & (X_1 \in A) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}, \quad t_0 = 0, \quad R_n = \{T_n < 0\}$$

とすると (4a)′(4b) は成立するが、$P_{\theta_0}(T_n < 0 \ {}^{\exists}n) = \alpha$ だから $\theta = \theta_0$ で非WSCである．

例4.1　(1) $T_n = a_n \sum_{j=1}^{n} X_j$，$a_n \to 0$ は仮定 (4b) を満たす．

(2) $X_1, X_2, \cdots$ が i.i.d. で、$R_n \supset \{\sqrt{n}\,\overline{X}_n < t_0\}$ は，$\theta = \theta_0$ で

(4c)　$E_{\theta_0} X_1 \leqq 0 < Var_{\theta_0} X_1 < \infty$

(4d)　$-\infty \leqq E_{\theta_0} X_1 < 0$

(4e)　$X_1 \sim$ Cauchy分布

のいずれかが満たされれば $\theta = \theta_0$ でASCである．

(3) §1の例はASCである．

(4) $X_1, X_2, \cdots$ が i.i.d. で、$R_n = \{\sqrt{n}\,\overline{X}_n < t_0\}$ は $0 < E_{\theta_0} X_1 \leqq \infty$ となる $\theta = \theta_0$ では非SSC、詳しくは

$P_{\theta_0}(\sqrt{n}\,\overline{X}_n < t_0 \ \ i.o.) = 0$ が成り立つ．

(5)　(4) で、更に $\theta=\theta_0$ で X_1 が正規分布に従い、

$E_{\theta_0}X_1 > t_0$ ならば、$\theta=\theta_0$ で非WSCである。

証明　(1)〜(4) は容易（中心極限定理、大数の強法則、再生性を用いる）。(5) を示す。$\theta=\theta_0$ で $X_1 \sim N(\xi_0, \sigma^2)$ とする。$\sigma=1$ としてよい。$t_0>0$ としてよい。$Z_j := X_j - \xi_0$, $\xi_1 := \xi_0 - t_0 (>0)$, $Y_j := Z_j - \xi_1$ として、

$$R_n = \{\sqrt{n}\,\overline{Z}_n < t_0 - \sqrt{n}\,\xi_0\} \subset \{\sqrt{n}\,\overline{Y}_n < 0\}$$

ここで $Y_j \sim N(\xi_1, 1)$ i.i.d. だから、

$X_j \sim N(\theta, 1)$ i.i.d. $\theta_0 > 0$ とし、

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad , \quad H_1 : \theta = -\theta_0$$

とすると、$\tilde{R}_n = \{\sqrt{n}\,\overline{X}_n < 0\}$ が H_0 で非WSCを示せばよい。事前分布を等確率とすると、

$$\tilde{R}_n = \{P(\theta=\theta_0 \mid \overline{X}_n) < \tfrac{1}{2}\}$$

となるので§1 より H_0, H_1 の少なくとも一方で非WSCで、(2) より H_1 ではWSCだから H_0 では非WSCである。□

例4.2　多重試行で通常の χ^2 検定はASCである。

証明　定理4.2を用いる。もしくは Koike (1992) を用いてもよい。□

定理4.3　$X_1, X_2, \cdots$ は i.i.d. で、

$$H_0 : X_1 \sim \nu_0 \quad , \quad H_1 : X_1 \sim \nu_1$$

とする．$\nu_0 \neq \nu_1$，ν_0，ν_1 は互いに絶対連続で

(4 f) $$\int d\nu_0 \left(\log \frac{d\nu_0}{d\nu_1}\right)^2 < \infty$$

と仮定する．このとき，NP有意水準αをあらかじめ指定すると，最強力検定はASCである．

<u>証明</u>　$Y_n := \log \frac{d\nu_0}{d\nu_1}(X_n)$ とする．最強力検定は尤度比検定，よって境界値以外で $\overline{Y}_n$ に基づく正確な左側検定で定理2.2を用いて，例4.1 (2) に容易に帰着される．　□

<u>注意</u>　(4 f) は不要かも知れないが，「ν_0，ν_1 は互いに絶対連続」を省いてはならない．$X_1, X_2, \cdots \sim U(0, \theta)$ i.i.d. $(\theta > 0)$ とし，$H_0 : \theta = 1$，$H_1 : \theta \neq 1$ とする．NP有意水準αの最強力検定は本質的に一意で，$T_n := \max_{1 \le j \le n} X_j$ として，$R_n = \{T_n < \sqrt[n]{\alpha}$ または $1 < T_n\}$ となる。（但し，H_1 を1点とすると本質的に一意ではなくなる。）これは $\frac{d\theta}{\theta}$ を事前分布とし，Bayes 信頼区間を最短になるようにとったときの，それに基づく検定と一致する．

$$P_{\theta=1}(X_n^* \in R_n \ \exists n)$$
$$= \alpha\left\{1 + \sum_{n=2}^{\infty}\left(1 - \alpha^{\frac{1}{n(n-1)}}\right)^{n-1}\right\} < \alpha \sum_{n=1}^{\infty}(1-\alpha)^{n-1} = 1$$

だから H_0 で非WSCとなる．（H_1 でASCは容易に得られる。）

次の定理は，攪乱母数を含む場合のSSC，ASCの判定

は、適当な条件の下で攪乱母数が既知の場合に帰着されることを保証するものである。

<u>定理4.4</u>　母数空間を $\Omega = \Omega^1 \times \Omega^2$，母数を $\theta = (\xi, \eta)$ で表すことにする。η を攪乱母数と考え、ξ に関する検定

$$H_0 : \xi \in \Omega_0^1 \quad , \quad H_1 : \xi \in \Omega_1^1$$

を考える。ξ_0，η_0 を固定する。

(I)　次の (4g)(4h) を仮定する。

(4g)　$\Omega^2 \subset \mathbb{R}^k$ であり、$\hat{\eta}_n = \hat{\eta}_n(X_n^*)$ は $\eta = \eta_0$ での η の一致推定量である。$\hat{\eta}_n \in \Omega^{2*}$，$\Omega^2 \subset \Omega^{2*} \subset \mathbb{R}^k$ とする。

(4h)　$T_n = g_n(X_n^*)$ は ξ，η によらず、実数値であり、η を固定すると T_n の分布は $\xi \in \Omega_0^1$ にはよらず、その漸近分布 λ_η（確率分布）は分布函数が連続で、$t_\infty : (0, 1) \times \Omega^{2*} \to \mathbb{R}$ を、

$$\lambda_\eta((-\infty, t_\infty(\alpha, \eta))) = \alpha \quad (\eta \in \Omega^{2*})$$

で、$\eta \mapsto t_\infty(\alpha, \eta)$ が Ω^{2*} で連続となるようにとれる。

このとき、次の (1)(2) は同値である。

(1)　任意の α に対して $\eta = \eta_0$ が既知のときの T_n に基づくNP有意水準 α の左側検定 $R_n^{(\alpha, \eta_0)}$ は $\xi = \xi_0$ でSSCである。

(2)　任意のαに対して検定$R_n^{(\alpha)}=\{T_n<t_\infty(\alpha,\hat{\eta}_n)\}$は$\xi=\xi_0$, $\eta=\eta_0$でSSCである。

(II)　(I)で「強一致推定量」「SSC」のかわりに「(弱)一致推定量」「ASC」としたものも成り立つ。

証明　(I)　(1)$\Longrightarrow$(2)を示す。αを固定し、

$$t_\infty(\alpha,\hat{\eta}_n)\to t_\infty(\alpha,\eta)\qquad P_{\xi_0,\eta_0}-a.e.$$

$$t_\infty\left(\frac{\alpha}{2},\eta_0\right)<t_\infty(\alpha,\eta_0)$$

だから、

$$\lim_{\nu\to\infty}P_{\xi_0,\eta_0}\left(\forall n\geqq\nu,\ t_\infty\left(\frac{\alpha}{2},\eta_0\right)<t_\infty(\alpha,\hat{\eta}_n)\right)=1$$

$$\begin{aligned}
&P_{\xi_0,\eta_0}\left(T_n<t_\infty(\alpha,\hat{\eta}_n)\ i.o.\right)\\
\geqq&P_{\xi_0,\eta_0}\left(T_n<t_\infty\left(\frac{\alpha}{2},\eta_0\right)\ i.o.\right)\\
&\quad-P_{\xi_0,\eta_0}\left(「\forall n\geqq\nu,\ t_\infty\left(\frac{\alpha}{2},\eta_0\right)<t_\infty(\alpha,\hat{\eta}_n)」\text{でない}\right)\\
=&P_{\xi_0,\eta_0}\left(\forall n\geqq\nu,\ t_\infty\left(\frac{\alpha}{2},\eta_0\right)<t_\infty(\alpha,\hat{\eta}_n)\right)\\
\to&1\quad(\nu\to\infty)
\end{aligned}$$

(2)$\Longrightarrow$(1)も同様である。

(II)　$\{n_j\}\subset\mathbb{N}$, $n_1<n_2<\cdots$を固定すると、部分列$\{n_{j_k}\}$があって、$\hat{\eta}_{n_{j_k}}\to\eta_0$　$P_{\xi_0,\eta_0}-a.e.$となる。あとは(I)に帰着させる。　□

注意　(I)では「強一致推定量」を「一致推定量」に変えてはならない。反例として、$X_1,X_2,\cdots\sim N(\xi,\sigma^2)$ i.i.d. $\xi\leqq0$, $\sigma\geqq1$とし、$H_0:\xi=0$, $H_1:\xi<0$

Φを$N(0,1)$の分布函数とし，

$$T_n := \begin{cases} \Phi(X_n) & (\Phi(X_n) < \frac{1}{n}) \\ \Phi(X_1) & (\text{その他}) \end{cases}$$

とすると，定理4.4の記号で（但し$\eta = \sigma$）

$$\lambda_\eta((-\infty, t)) = \Phi\left(\frac{1}{\sigma}\Phi^{-1}(t)\right) \quad (0 < t < 1)$$

$$t_\infty(\alpha, \sigma) = \Phi(\sigma\Phi^{-1}(\alpha))$$

であり，ξ，σを固定すると，nが十分大きいとき

$$R_n^{(\alpha,\sigma)} \supset \left\{\frac{X_n - \xi}{\sigma} < \Phi^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)\right\}$$

だから，Borel－Cantelliの補題より$\{R_n^{(\alpha,\sigma)}\}$はS.S Cである。一方，$\hat{\sigma}_n$を$\sigma$の強一致推定量とし，

$$\hat{\sigma}_n^* = \begin{cases} n & (\Phi(X_n) < \frac{1}{n}) \\ \hat{\sigma}_n & (\text{その他}) \end{cases}$$

とすると，$\hat{\sigma}_n^*$はσの一致推定量で，$R_n^{(\alpha)} = \{T_n < t_\infty(\alpha, \hat{\sigma}_n^*)\}$は，$0 < \alpha < \frac{1}{2}$のとき，$\xi = 0$のとき，すべての$\sigma$で非S.S Cとなる［Chebyshevの不等式とBorel－Cantelliの補題より$\Phi(X_n) \geqq \frac{1}{n}$の場合だけを考えればよいことを使う］。

例4.3　$X_1, X_2, \cdots \sim N(\xi, \sigma^2)$ i.i.d. のとき，次のStudentの検定

(1)　$H_0 : \xi = 0$，　$H_1 : \xi \neq 0$　（両側検定）

(2)　$H_0 : \xi = 0$，　$H_1 : \xi < 0$　（左側検定）

はA.S Cである．なお，左側検定の解釈としては，(2)よ

りもむしろ

(3)　$H_0 : \xi \geqq 0, \quad H_1 : \xi < 0$

とした方が現実的であるが、これは$\xi \leqq 0$でASC、すべての$\xi > 0$, $\sigma > 0$で非SSCである。

<u>証明</u>　定理2.2と定理4.4によりσが既知の場合(例4.1)に帰着させればよい。 □

<u>参考文献</u>

赤池弘次(1989) 事前分布の選択とその応用. 鈴木雪夫、国友直人編. ベイズ統計学とその応用. 東大出版会. 81−98.

Basu, D. (1988) *Statistical Information and Likelihood*, J. K. Ghosh (ed.), Springer-Verlag.

Berger, J. O. & Wolpert, R. L. (1984) *The Likelihood Principle*, Institute of Math. Statistics Hayward, California

Jeffreys, H. (1961) *Theory of Probability*, Oxford: Clarendon Press.

Koike, K. (1992) Unbiased estimation for sequential multinomial sampling plans, Math. Research Note, Inst. Math. Univ. Tsukuba.

Lindley, D. V. (1957) A statistical paradox, *Biometrika* 44. 187−192.

(この論文には誤りがある. Bartlett, M. S. (1957) A comment on D. V. Lindley's statistical paradox, Biometrika 44. 533−534.)

Lindley, D. V. (1965) Introduction to Probability and Statistics Part 2 Inference, Cambridge Univ. Press.
(邦訳 竹内啓 新家健精訳 (1969) 確率統計入門2 統計的推測, 培風館)

Lindley, D. V. (1972) Bayesian Statistics, A Review, Society for Industrial and Applied Math.

Lindley, D. V. (1988) Statistical inference concerning Hardy-Weinberg equibrium. M. Bernardo et al (eds.) Bayesian Statistics 3, Oxford Science Publications.

Lindley, D. V. (1992) Is our View of Bayesian Statistics too Narrow? M. Bernardo et al (eds.) Bayesian Statistics 4, Oxford Science Publications.

繁桝算男 (1985) ベイズ統計入門. 東大出版会.