数理解析研究所講究録
第 843 巻 1993 年 11-26

On arithmetic intersections and Green functions.

東大 数理 斎藤毅 (Takeshi SAITO)

H. Gillet - Ch. Soulé "Arithmetic Intersection Theory"
Publ Math IHES 72 (1990) p.93-174.

の紹介である. 数論的交点理論は height pairing として, 代数多様体の L 関数の関数等式の中心となる整数点での特殊値の予想 (一般化された Birch Swinnerton-Dyer 予想) に現れる.

§1. 特殊値の予想

この節では上記特殊値の予想を

A.A. Beilinson "Height pairing between algebraic cycles"
Contemporary Math. 67 (1987) p.1-24
(or. Spr. LNM

に従って定式化する. X を代数体 F 上の射影非特異多様体とし, $m \geq 1$ を整数とする. 考える L 関数は

$$L(H^{2m-1}(X), s) = \prod_v \det(1 - Fr_v \cdot q_v^{-s} ; H^{2m-1}(X_{\bar{F}}, \mathbb{Q}_\ell))^{-1}$$

である．ここで v は X が good reduction をもつ F の有限素点を走り，Fr_v は v の geometric Frobenius，q_v は v の剰余体の位数，$\bar{F}$ は F の代数閉包，コホモロジーは v の剰余体の標数と異なる ℓ に関する ℓ 進 etale コホモロジーである．この L 関数は $\mathrm{Re}\, s > m + \frac{1}{2}$ で収束し，さらに全平面に解析接続され，bad factor，F factor を適当に定義することにより，$s \leftrightarrow 2m - s$ の型の関数等式を満たすと予想される．ここでは $s = m$ での特殊値を考える．r を $s = m$ での $L(H^{2m-1}(X), s)$ の ~~零点~~ の位数とし，$L^*(H^{2m-1}(X), m) = \lim_{s \to m} L(H^{2m-1}(X), s)/(s-m)^r$ とおく．Weil 予想（Deligne の定理）から r および $L^*(H^{2m-1}(X), m) \bmod \mathbb{Q}^\times$ はぬいた素点によらず well-def'd となる．

はじめに本来の Birch, Swinnerton-Dyer 予想すなわち X が Abel 多様体で $m = 1$ の場合を復習する．

Birch, Swinnerton-Dyer 予想

1° $r = \mathrm{rank}\, A(F)$

2° $L^*(H^1(A), 1) = D_F^{-\frac{g}{2}} \times A$ の period $\times$ $A(F)$ の height pairing の判別式

右辺の記号の説明：$A(F)$ は A の F 有理点のなす群で Mordell-Weil の定理により有限生成 Abel 群．D_F は F の絶対判別式

で、gはAの次元、ωをAのF上有理的な正則g形式（mod $F^\times$で一意的）、Fの各無限素点vに対しμ_vをF_vのLebesgue測度とする。すると積分$\int_{A(F_v)}|\omega|\mu_v^g$が定まり、Aのperiodはこの積分の各無限素点についての積。最後にA'をAの双対Abel多様体とするとheight pairing $A(F)\times A'(F)\to\mathbb{R}$が定義されていてこれは非退化な双一次形式となる。判別式とはこの（自由部分の）$\mathbb{Z}$上の基底に関する行列式である。

この場合$L(H^1(A), s)$はいわゆるAのL関数、つまり$\det(1-Fr_v N_v^{-s} : H^1)$は$v$のFrobeniusのAbel多様体の自己準同型としての固有多項式である。

一般の場合に進む。

拡張されたBirch, Swinnerton-Dyer予想

1°　$r = \operatorname{rank} CH^m(X)_0$

2°　$L^*(H^{2m-1}(X), m) = D_F^{-\frac{g}{2}} \times H^{2m-1}(X)(m)$のperiod

$\times\, CH^m(X)_0$のheight pairingの判別式

右辺の説明：$CH^m(X)$はXの余次元mのChow群（定義は次節）で有限生成Abel群と予想される。$CH^m(X)_0$はそのhomologicalに0に同値な部分、すなわちcycle射$CH^m(X)\to H^{2m}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(m))$の核である。ここで$X(\mathbb{C})$はXを$\mathbb{Q}$上のスキームとみたときの$\mathbb{C}$値点の集合を複素多様体とみたも

のでコホモロジーは特異コホモロジー．D_F は前と同様 F の絶対判別式，F^m を de Rham コホモロジー $H_{dR}^{2m-1}(X/F)$ の m 番めの Hodge filtration とすると $\dim H_{dR}^{2m-1}(X/F)=2\cdot\dim F^m$ で g は F^m の次元である．period を定義する．$X(\mathbb{C})$ 上の複素共役は特異コホモロジー $H^{2m-1}(X(\mathbb{C}),\mathbb{Q})$ 上に involution F_∞ を定義する．$H_B^{2m-1}(X,\mathbb{Q}(m))^+$ で F_∞ が identity で作用する部分を表わす．特異コホモロジーと de Rham コホモロジーの標準同型 $H^{2m-1}(X(\mathbb{C}),\mathbb{Q})\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{C}\simeq H_{dR}^{2m-1}(X/F)\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{C}$ は同型 $H_B^{2m-1}(X,\mathbb{Q}(m))^+\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{C}\simeq H_{dR}^{2m-1}(X/F)/F^m\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{C}$ をひきおこす．period はこの同型の両辺の $\mathbb{Q}$ 上の基底に関する行列式である．

最後に height pairing を定義する．$m'=\dim X+1-m$ とおく．$\mathcal{X}$ を X の整数環 $\mathcal{O}_F$ 上射影的な正則モデルとする．$\mathcal{X}$ の数論的 Chow 群 $\widehat{CH}^m(\mathcal{X})$ が定義され（§3）交点積 $\widehat{CH}^m(\mathcal{X})\times\widehat{CH}^{m'}(\mathcal{X})\to\mathbb{R}$ が定義される（§4）．generic fiber をとる射 $\widehat{CH}^m(\mathcal{X})\to CH^m(X)$ は全射である．$\widehat{CH}^m(\mathcal{X})_0$ を任意の fiber への制限が 0 に homological に同値であるような元のなす部分群とする．$\widehat{CH}^m(\mathcal{X})_0\longrightarrow CH^m(X)_0$ は全射であると予想され，交点積の $\widehat{CH}^m(\mathcal{X})_0\times\widehat{CH}^{m'}(\mathcal{X})_0$ への制限は $CH^m(X)_0\times CH^{m'}(X)_0$ を経由する．これは $\mathcal{X}$ のとり方によらないと予想され height pairing $CH^m(X)_0\times CH^{m'}(X)_0$ が定義される．これは有限生成 Abel 群の modulo torsion で非退化な pair ringと予想される．判別式はこれの基底に関する行列式である．

height pairing の定義はより具体的には次のように与えられる．Y，ZをXの余次元 m，m' の cycle とし交わらないものとする．$\mathfrak{X}$を上と同様とし，$\mathfrak{Y}$，$\mathfrak{Z}$をそれぞれ$\mathfrak{X}$の cycle へのもちあげとする．g_Y をYに関する Green current (§3) すなわち $dd^c g_Y + \delta_Y = \omega_Y$ が smooth な実 $(m-1, m-1)$ current とする．g_Z もZに関し同様とする．積 $[Y].[Z]$ を

$$\sum_{i,j} (-1)^{i+j} \log \# H^i(\mathfrak{X}, \mathrm{Tor}_j^{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}, \mathcal{O}_{\mathfrak{Z}})) + \frac{1}{2}\left(\int_{Z(\mathbb{C})} g_Y + \int_{X(\mathbb{C})} \omega_Y \wedge g_Z\right)$$

とおくとこれは一般には well-defined でないが，$[Y][Z] \in CH^m(X)_0$，$CH^{m'}(X)_0$ の場合．$\mathfrak{Y}$，$\mathfrak{Z}$をそれぞれ各 fiber が0に homological に同値であるようにとれば，これは $\mathfrak{Y}$，$\mathfrak{Z}$，g_Y，g_Z のとり方によらず well-defined となり height pairing $CH^m(X)_0 \times CH^{m'}(X)_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ が定義される．

§2. 幾何的な場合．

この節では体上の多様体についてその Chow 群と交点積の定義を復習する．Fを体としXをF上の多様体とする．一般のXと正整数 p に対し余次元 p の Chow 群 $CH^p(X)$ が余次元 p の cycle の群 $Z^p(X)$ を有理同値 $R^p(X)$ で割ることにより定

義される．Xが非特異かつ準射影的であればmoving lemmaを使うことにより積 $CH^p(X)\times CH^q(X)\to CH^{p+q}(X)$ が定義される．またproperな射 $f: X\to Y$ に対し，順像 $f_*: CH^{p+\dim X-\dim Y}(X)\to CH^p(Y)$ が定義される．Xが射影非特異，$q=\dim X-p$ のときは，この合成として交点積 $CH^p(X)\times CH^q(X)\to CH^{\dim X}(X)\to CH^0(\mathrm{Spec}\,F)=\mathbb{Z}$ が定義される．

$Z^p(X)$ はXの整な（既約かつ被約ということ）閉部分スキーム（これはXのスキーム論的な点と1対1に対応する）で余次元がpのもの（すなわち生成点 ξ での局所環 $\mathcal{O}_{X,\xi}$ のKrull次元がp）の集合を基底とする自由Abel群である．$R^p(X)$ は $\{\mathrm{div}\,f\in Z^p(X)$; YはXの余次元p−1の整な閉部分スキーム，fはY上の0でない有理関数$\}$ と定義される．xをXの余次元pの点でYに含まれるとし，$k(Y)$ をYの有理関数体とする．xはYの余次元1の点であるから $\mathrm{ord}_x: k(Y)^\times\to\mathbb{Z}$ がxで正則なYの有理函数fに対しては環 $\mathcal{O}_{Y,x}/f$ の長さを対応させるものとして一意的に定義される．これを使って

$$\mathrm{div}\,f=\sum_{\substack{x\in Y\\ \text{余次元}p}}\mathrm{ord}_x(f)[x]\in Z^p(X)$$

と定義される．

例 $X=\mathbb{P}^n$ のとき，$CH^p(X)\cong\mathbb{Z}$ $(0\leq p\leq n)$ である．生成元は余次元pの線型な部分空間の類である．

Xが非特異，準射影的であるとして交点積 $CH^p(X)\times CH^q(X)\to CH^{p+q}(X)$ を定義する．余次元pのcycle Yと余次元qの

cycle Z が proper に交わるとは共通部分 $Y \cap Z$ が余次元 $p+q$ であることをいう。このとき積 $[Y]\cdot[Z]$ は

$$\sum_{S\,\text{余次元}\,p+q} \sum_i (-1)^i \operatorname{length} \operatorname{Tor}_i^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_Z)_\sigma$$

で定義する。ここで σ は余次元 $p+q$ の X の整な閉部分スキーム S の生成点である。交点積 $CH^p(X) \times CH^q(X) \to CH^{p+q}(X)$ は proper に交わる cycle の積を上のようにおくことにより定まるものとして一意的に定義される。一意的であることは moving lemma すなわち 2つの cycle は有理同値で適当にずらすことにより proper に交わるようにできることから従う。また well-defined であることは容易に確かめられる。

例　$X = \mathbb{P}^n$ のとき $CH^*(X) = \bigoplus CH^p(X)$ は環として $\mathbb{Z}[h]/h^{n+1}$ と同型である。$h \in CH^1(X)$ は超平面の類を表わす。

$f: X \to Y$ を proper な射で $d = \dim X - \dim Y$ とおく。順像 $f_*: CH^{p+d}(X) \to CH^p(Y)$ を定義する。$Z \subset X$ を余次元 $p+q$ の整な閉部分スキームとする。$f(Z) \subset Y$ が余次元 p のときは $f_*([Z]) = \deg(Z/f(Z)) \cdot [f(Z)]$、そうでないときは $=0$ とおく。これが有理同値類を保つことは容易に確かめられて順像 f_* が定義される。Y が基礎体 F の Spec のときは順像 $CH^d(X) \to CH^0(Y) = \mathbb{Z}$ は通常の degree である。

X が射影非特異で $p+q = d = \dim X$ のときは交点積 $CH^p(X) \times CH^q(X) \to \mathbb{Z}$ が積 $CH^p(X) \times CH^q(X) \to CH^d(X)$ と degree

$CH^d(X)\to\mathbb{Z}$の合成として定義される．YとZの類の積は

$$\sum_{i,j}(-1)^{i+j}\dim_F H^i(X,\mathrm{Tor}_j^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_Y,\mathcal{O}_Z))$$

で与えられる．

数論的多様体との類似のためにはXから射影非特異曲線Yへの全射$f:X\to Y$を1つ固定する．このとき$\deg:CH^1(Y)\to\mathbb{Z}$を用いて交点積$CH^p(X)\times CH^q(X)\to\mathbb{Z}$は積$CH^p(X)\times CH^q(X)\to CH^d(X)$と順像$CH^d(X)\to CH^1(Y)$とdegree $CH^1(Y)\to\mathbb{Z}$の合成として表わされる．

§3. 数論的Chow群

代数体Fの整数環$\mathcal{O}_F$上有限型な正則スキームXのことを数論的多様体とよぶ．この節では数論的多様体Xの数論的Chow群$\widehat{CH}^p(X)$を定義する．これはGreen currentを使って定義される通常のChow群$CH^p(X)$の拡大である．

$\widehat{CH}^p(X)$は前節と同様にcycleの群$\hat{Z}^p(X)$を有理同値$\hat{R}^p(X)$でわることにより定義される．

$$\hat{Z}^p(X)=\{(Z,g)\in Z^p(X)\oplus\tilde{D}^{p-1,p-1}(X_{\mathbb{R}});$$
$$g\text{はZに関するGreen current}\}$$
$$\hat{R}^p(X)=\{\widehat{\mathrm{div}}\,f\in\hat{Z}^p(X);\ f\text{は}X\text{の余次元}p-1\text{の整な閉部分スキーム}Y\text{上の有理関数}\neq 0\}$$

である．右辺の定義をする．$Z^p(X)$は前節と同様にXの余次

元 p の整な閉部分スキームの集合を基底とする自由Abel群である. $\mathcal{D}$ はcurrentの空間を表わす.

以下しばらく X は複素多様体としてcurrentの復習をする. 応用上は X は O_F 上の X を $\mathbb{Z}$ 上のスキームとみたときの $\mathbb{C}$ 値点のなす複素多様体である. $A^n(X)$ で X 上の $\mathbb{C}$ 係数のsmoothな n-形式の空間を表わす. 実係数の形式はこの空間の $\mathbb{R}$ 構造を定める. $A^{p,q}(X)$ でsmooth (p,q)-形式の空間を表わす. $A^n(X)=\bigoplus_{p+q=n}A^{p,q}(X)$ である. $A^n_c(X)\subset A^n(X)$ をコンパクトな台をもつもののなす部分空間とする. $A^n_c(X)$ に相対コンパクトな各座標近傍での係数の各高階導関数のsup ノルム全体をセミノルムの族とすることにより局所凸空間の構造を与える. n-currentの空間 $\mathcal{D}_n(X)$ はこの空間 $A^n_c(X)$ の双対空間として定義される. X の次元が d であるとき $\mathcal{D}^n(X)=\mathcal{D}_{d-n}(X)$ とおく. $\mathcal{D}^{p,q}(X)$ も同様に定義され $\mathcal{D}^n(X)=\bigoplus_{p+q=n}\mathcal{D}^{p,q}(X)$ がなりたつ. $\mathbb{C}$ の向きをいつものように体積形式 $\frac{i}{2}dz\wedge d\bar{z}=dx\wedge dy$ で与えることにより $A^n(X)$ を $\alpha\longmapsto(\beta\in A^{d-n}_c(X)\mapsto\int_X\alpha\wedge\beta)$ により $\mathcal{D}^n(X)$ の部分空間とみなす. これにより $\mathcal{D}^n(X)$ はdistribution係数の n-形式とみなすことができる. また $\mathcal{D}^n(X)$ の元が $A^n(X)$ に属するときsmoothであるという. 外微分 d: $\mathcal{D}^n(X)\to\mathcal{D}^{n+1}(X)$ を形式の外微分 $A_c^{d-n-1}(X)\to A_c^{d-n}(X)$ の双対の $(-1)^{n+1}$ 倍と定める. この符号は $A^n(X)\subset\mathcal{D}^n(X)$ への制限がもと

のものと一致するためのものである．外微分 d は直和分解 $\mathcal{D}^n(X)=\bigoplus\mathcal{D}^{p,q}(X)$ に従って $\partial=d':\mathcal{D}^{p,q}(X)\to\mathcal{D}^{p+1,q}(X)$ と $\bar\partial=d'':\mathcal{D}^{p,q}(X)\to\mathcal{D}^{p,q+1}(X)$ の和 $d=d'+d''$ に分解される．$d^c=\frac{i}{4\pi}(d''-d')$ と定義する．$\tilde{\mathcal{D}}(X)=\mathcal{D}(X)/\mathrm{Im}\,d'+\mathrm{Im}\,d''$ とおく．

$Z\subset X$ を余次元 p の閉部分解析空間とする．実 (p,p)-current $\delta_Z\in\mathcal{D}^{p,p}(X)$ を $A_c^{d-p}(X)\to\mathbb{C}:\alpha\mapsto\int_Z\alpha|_Z$ で定める．ここで $\int_Z\alpha|_Z$ は Z の特異点解消 $\tilde{Z}$ への α のひきもどしの積分として定義する．これは Z の非特異部分 Z^{ns} への α の制限の積分といっても同じである．実 $(p-1,p-1)$-current $g\in\mathcal{D}^{p-1,p-1}(X)$ が Z に関する Green current であるとは $\omega=dd^cg+\delta_Z$ が smooth であることと定義する．

例．$\mathcal{L}$ を X 上の可逆層，$\|\ \|$ を $\mathcal{L}$ 上の smooth な Hermite 計量とし，l を $\mathcal{L}$ の有理切断とする．$D=\mathrm{div}(l)$ を l の因子とし，D の台の外で定義された関数 $g=-\log\|l\|^2$ を X 上の実 $(0,0)$-current とみなす．このとき δ_D+dd^cg は $(\mathcal{L},\|\ \|)$ の 1st chern 形式とよばれる smooth な閉 1-形式であり，g は D に関する Green current である．

もとにもどって X を O_F 上の数論的多様体とし，$\hat{Z}^p(X)$ の定義に現れる current の空間 $\tilde{\mathcal{D}}^{p-1,p-1}(X_{\mathbb{R}})$ を定義する．$X_{\mathbb{C}}$ を X を $\mathbb{Z}$ 上のスキームとみたときの $\mathbb{C}$ 値点全体のなす複素多

様体とする．複素共役 F_∞ が $X_{\mathbb{C}}$ に作用する．$\mathcal{D}^{p-1,p-1}(X_{\mathbb{R}}) = \{\alpha \in \mathcal{D}^{p-1,p-1}(X_{\mathbb{C}})\,;\, F_\infty^*(\alpha) = (-1)^{p-1}\alpha\}$ とおき $\tilde{\mathcal{D}}^{p-1,p-1}(X_{\mathbb{R}})$ はこれの $\tilde{\mathcal{D}}^{p-1,p-1}(X_{\mathbb{C}}) = \mathcal{D}^{p-1,p-1}(X_{\mathbb{C}})/\mathrm{Im}\, d' + \mathrm{Im}\, d''$ での像と定義する．$g \in \tilde{\mathcal{D}}^{p-1,p-1}(X_{\mathbb{R}})$ が Z に関する Green current であるとは上にあるとおり $dd^c g + \delta_{Z(\mathbb{C})}$ が smooth (p,p)-形式となることである．

最後に X の余次元 $p-1$ の整な閉部分スキーム Y 上の有理関数 $f \neq 0$ に対し $\widehat{\mathrm{div}}\, f = (\mathrm{div}\, f, -i_* \log|f|^2) \in \hat{Z}^p(X)$ を定義する．$\mathrm{div}\, f \in Z^p(X)$ の定義は前節と同様である．$i_* \log|f|^2$ を定義する．i は閉 immersion $Y \to X$ である．$\tilde{Y}$ を Y の特異点解消とする．$\tilde{Y}$ 上の局所可積分関数 $\log|f|^2$ が定める $\tilde{Y}$ 上の実 $(0,0)$-current の X への順像*が $i_* \log|f|^2 \in \tilde{\mathcal{D}}^{p-1,p-1}(X_{\mathbb{R}})$ である．$-dd^c_* \log|f|^2 + \delta_{\mathrm{div} f} = 0$ であるので $\widehat{\mathrm{div}}\, f \in \hat{Z}^p(X)$ となる．

例　$X = \mathrm{Spec}\, O_F$ のとき $\hat{Z}^1(X) = \bigoplus_{v:\text{有限素点}} \mathbb{Z} \oplus \bigoplus_{v:\text{無限素点}} \mathbb{R}$ で $\widehat{CH}^1(X) = F^\times \backslash F$ の idele 群/極大コンパクト部分群．特に $O_F = \mathbb{Z}$ のときは $\hat{Z}^1(X) \ni (Z, g) \longmapsto \log \# Z + \frac{1}{2} g \in \mathbb{R}$ により $\widehat{CH}^1(X) \cong \mathbb{R}$.

*current の順像の定義は次のとおりである．写像 $\tilde{Y} \to X$ は proper なので台がコンパクトな形式のひきもどしはやはり台がコンパクトになる．したがってその双対として順像が定義

される.

§4 数論的交点積.

この積では数論的Chow群の積 $\widehat{CH}^p(X)\times\widehat{CH}^q(X)\to\widehat{CH}^{p+q}(X)$ を定義する. Xが$\mathbb{Z}$上properかつ$p+q=\dim X$のときにはさらに $\widehat{CH}^{p+q}(X)\to\widehat{CH}^1(\operatorname{Spec}\mathbb{Z})=\mathbb{R}$を合成することにより§2と同様に交点積 $\widehat{CH}^p(X)\times\widehat{CH}^q(X)\to\mathbb{R}$ が定義される

$(Y,g_Y)\in\widehat{CH}^p(X)$, $(Z,g_Z)\in\widehat{CH}^q(X)$ とくにその積 $(Y.Z, g_Y * g_Z)\in\widehat{CH}^{p+q}(X)$を定義する. 実はX全体の上ではmoving lemmaが知られていないため積は $\widehat{CH}^{p+q}(X)$ ではなく $\widehat{CH}^{p+q}(X)\otimes\mathbb{Q}$でないと定義されない. ここでは簡単のためmoving lemmaはなりたつものとして話を進める. moving lemmaを使ってYとZがproperに交わると仮定する. すると§2と同じく積 $Y.Z\in Z^{p+q}(X)$ が定義される. 次にGreen currentの積 $g_Y * g_Z\in\mathcal{D}^{p+q-1,p+q-1}(X_{\mathbb{R}})$を定義する. これは形式的には

$$g_Y * g_Z = g_Y\wedge\delta_Z + \omega_Y\wedge g_Z$$

と定義される. ここで$\omega_Y = dd^c g_Y+\delta_Y$ はGreen currentの定義によりsmoothであるので, 第2項 $\omega_Y\wedge g_Z$は形式とcurrentの積として定義される. すなわちコンパクト台をもつαに対して $\omega_Y\wedge g_Z(\alpha)=g_Z(\omega_Y\wedge\alpha)$で定義されるcurr rentである．第1項 $g_Y \wedge \delta_Z$ の定義には一般には対数型Green形式の概念を導入する必要がある．しかしYとZがgeneric fiber上は交わらないとき，例えば $p+q=\dim X$ かつYとZがproperに交わるときには g_Y はZでsmoothとしてよく，この場合は問題なく定義される．一般の場合の $g_Y * g_Z$ の定義はこの節の最後にまわして以下 $g_Y * g_Z$ が定義されたものとする．$*$積については $dd^c(g_Y * g_Z) + \delta_{Y.Z} = \omega_Y \wedge \omega_Z$ がなりたつ([G-S] Th 2.1.4)ことより，$g_Y * g_Z$ は $Y.Z$ に関するGreen currentであり $(Y.Z,\ g_Y * g_Z) \in \hat{Z}^{p+q}(X)$ となる．YおよびZを有理同値で動かしてもこの積の有理同値類は変わらないことが確かめられて積 $\widehat{CH}^p(X) \times \widehat{CH}^q(X) \to \widehat{CH}^{p+q}(X)$ が定義される．

数論的多様体の射 $f: X \to Y$ がproperとしかつそのgeneric fiber $f_F: X_F \to Y_F$ がsmoothとする．$p' = p + \dim X - \dim Y$ とおく．このとき順像 $f_*: \widehat{CH}^{p'}(X) \to \widehat{CH}^p(Y)$ を次のように定義する．cycleの順像 $f_*: Z^{p'}(X) \to Z^p(Y)$ は§2と同様に定義する．さらにfはproperとしているからcurrentの順像も前節と同様にコンパクト台の形式のひきもどしの双対としてcurrentの順像 f_* も定義される．$(Z, g) \in Z^{p'}(X)$ とする．するとfはさらにsmoothとしているからcurrentの順像は形式を形式にうつすことがわかる．これは実際fiberご

との積分で与えられる．このことから f_*g は f_*Z に関する Green current であること．すなわち $(f_*Z, f_*g) \in \hat{Z}^p(Y)$ であることがわかる．これの商をとることにより順像 $\widehat{CH}^p(Y)$ が定義される．

$Y = \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$ かつ $p=1$ とすると前節の最後でみたように $\widehat{CH}^1(Y) = \mathbb{R}$ であるから．X が射影的で $d = \dim X$ とすると上のことより $\widehat{CH}^d(X) \to \mathbb{R}$ が定義される．$p+q=d$ であれば積 $\widehat{CH}^p(X) \times \widehat{CH}^q(X) \to \widehat{CH}^d(X)$ と合成することにより交点積 $\widehat{CH}^p(X) \times \widehat{CH}^q(X) \to \mathbb{R}$ が定義される．$(Y, g_Y) \in \hat{Z}^p(X)$, $(Z, g_Z) \in \hat{Z}^q(X)$ で Y と Z は generic fiber X_F 上では交わらないとすると積 $(Y, g_Y) \cdot (Z, g_Z)$ は具体的には，

$$\sum_{i,j} (-1)^{i+j} \quad \# H^i(X, \mathrm{Tor}_j^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_Z))$$
$$+\frac{1}{2}\left(\int_{Z(\mathbb{C})} g_Y \qquad \int_{X(\mathbb{C})} \omega_Y \wedge g_Z\right)$$

で与えられる．

最後に対数型 Green 形式の定義をしてそれを使って☆積の定義をする．X を複素多様体とし $Y \subset X$ を閉部分解析空間とすることのとき $X-Y$ 上の smooth 実 $p-1, p-1$ 形式 $g \in A^{p-1,p-1}(X-Y)$ が Y に関する対数型 Green 形式であるとは次の 1, 2 をみたすこととする．

1. g の定める X 上の current $[g] \in D^{p-1,p-1}(X)$ が Y に関する Green current である．すなわち，$dd^c[g] + \delta_Y$ は smooth．

2. X上射影的な複素多様体で $\pi: Z \to X$ と $Z - \pi^{-1}(Y)$ 上 smooth な形式 φ で次の i)–iii) をみたすものが存在する.

i) $\pi^{-1}(Y)$ は smooth な多様体 Z の正規交叉因子で π の $Z - \pi^{-1}(Y)$ への制限は $X - Y$ 上 smooth. 正規交叉因子とは Z 上局所的に座標系 $(z_1, \ldots, z_n)$ をとると $\pi^{-1}(Y)$ が $z_1 \cdots z_d = 0$ で定義されることである

ii) φ の順像 $\pi_* \varphi$ は $X - Y$ 上 g に等しい. ここで順像は i) より fiber ごとの積分で定義される.

iii) φ は Z 上局所的に $\varphi = \sum \log |z_i|^2 \cdot \alpha_i + \beta$ の形にかかれる. ここで z は i) のような座標系であり. α_i, β は smooth な形式. α_i はさらに d' および d'' に関して閉形式である.

Y について. つねに対数型 Green 形式は存在する (Th. 1.3.5) さらにこれから任意の Y に関する Green current $[g] \in \tilde{D}^{p-1,p-1}(X)$ に対し対数型 Green 形式 $g \in A^{p-1,p-1}(X-Y)$ で g の $\tilde{D}^{p-1,p-1}(X)$ での類が $[g]$ と一致するものが存在することがわかる.

対数型 Green 形式を使って $*$-積 $g_Y * g_Z = g_Y \wedge \delta_Z + \omega_Y \wedge g_Z$ を定義する. 上でみたように第1項 $g_Y \wedge \delta_Z$ を定義すればよい g_Y を対数型 Green 形式であるとしてよい. $\tilde{Z} \to Z$ を特異点解消とし. $\psi: \tilde{Z} \to X$ を合成射とする. すると $\tilde{Z} - \psi^{-1}(Y)$ 上の smooth な形式 $\psi^* g_Y$ が定まる. これが定める $\tilde{Z}$ 上の current

$[\phi^* g_Y]$ の順像 $\phi_* [\phi^* g_Y]$ を $g_Y \wedge \delta_Z$ と定義する. 順像は ϕ が proper だから定義される. $g_Y \wedge \delta_Z$ は $\tilde{Z}$ のとり方によらずこうして $g_Y * g_Z$ が定義される.

参考文献. 本文中であげたものの他に交点理論については最近出た Soulé の本

Lectures on Arakelov geometry. Cambridge Univ. Press 1992

がある. 特殊値の予想については Birch, Swinnerton-Dyer 予想については

Tate: "On the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer and ---", Séminaire. Bourbaki 306.

周期の定義など

Deligne "Valeurs de fonctions L et périodes d'intégrales" Proc. Symp. Pure Math. 33 part 2 313–346

一般に Beilinson 予想については 本

"Beilinson's conjectures ---" ed by M. Rapoport et al. Academic Press 1988

がある.