数理解析研究所講究録
第 843 巻 1993 年 91-101

多項式の局所ゼータ関数について

立教大・理学部 佐藤 文広 (Fumihiro Sato)

K を標数 0 の非アルキメデス的局所体, $\mathfrak{O} = \mathfrak{O}_K$ をその整数環, $\mathfrak{P}$ を極大イデアル, $q = N(\mathfrak{P}) = \sharp(\mathfrak{O}/\mathfrak{P})$ とする. $\mathcal{S}(K^n)$ で K^n 上のコンパクト台をもつ局所定数関数 (Schwartz-Bruhat 関数) の空間を表わす. K-係数 n 変数多項式 $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) \in K[x_1, \ldots, x_n]$ に対し

$$Z_f(\Phi; s) = \int_{K^n \setminus \{f(x)=0\}} |f(x)|^s \, \Phi(x) \, |dx| \quad (\Phi \in \mathcal{S}(K^n))$$

とおく. ただし, $|dx|$ は K^n 上の $\mathfrak{O}^n$ の体積を 1 として正規化された Haar 測度である. $\mathrm{Re}\, s > 0$ で絶対収束するこの積分を, 多項式 $f(x)$ の p 進局所ゼータ関数という. とくに Φ が $\mathfrak{O}^n$ の特性関数のとき

$$Z(s) = Z_f(s) = \int_{\mathfrak{O}^n \setminus \{f(x)=0\}} |f(x)|^s \, |dx|$$

と略記し, しばしば Igusa の局所ゼータ関数と呼ばれる.

本稿の目的は多項式の局所ゼータ関数についての最近の結果の survey を行なうことであるが, すでに, この分野の有力な研究者である J.Denef によって, 完備した文献表を含むすぐれた報告 ([D1]) が Séminaire Bourbaki に発表されているので, 本稿は簡潔なものに止める. また, 力不足で紹介できなかった話題も多い. 関心を持たれた方は [D1] に, そして, [D1] の文献表を参考に original の文献に直接あたって頂きたい.

§1 局所ゼータ関数の有理性

局所ゼータ関数についての最初の基本定理は, ゼータ関数の有理性である.

[定理 1.1] 任意の $\Phi \in \mathcal{S}(K^n)$ に対し, $Z_f(\Phi; s)$ は複素平面全体に解析接続され q^{-s} の有

理関数を表わす．より詳しく，

$$Z_f(\Phi;s) \stackrel{\cdot}{=} \frac{P_f(\Phi;q^{-s})}{\prod_i (1-q^{-(N_i s+\nu_i)})}$$

の形に書ける．ここで，$P_f(\Phi;T) \in \mathbb{C}[T^{\pm 1}]$, $N_i, \nu_i \in \mathbb{Z}$ であり，分母は f のみに依存し Φ によらない．

この定理は，特異点解消を用いて J.Igusa [I1] により証明された．実数体上では，対応する定理は I.N.Bernstein-S.I.Gelfand [BG], M.F.Atiyah [A] で示されていた．[BG] には，非アルキメデス的局所体の場合にも特異点解消を用いる方法が適用できることが指摘してある．

[応用 1.2]　$f \in \mathfrak{O}[X_1,\ldots,x_n]$ とし

$$N_m = \sharp\left\{ x \in \mathfrak{O}^n \bmod \mathfrak{P}^m \;\middle|\; f(x) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}^m} \right\}$$

とおく．このとき，生成関数 $P(T) = \sum_{m=0}^{\infty} N_m T^m$ は T の有理関数である．

この結果は Borevich-Shafarevich の教科書 ([BS] p.57, 問題 9) に予想として述べられているものであるが，$P(T)$ と $Z_f(s)$ との関係

$$P(q^{-(s+n)}) = \frac{1-q^{-s}Z_f(s)}{1-q^{-s}}$$

に基づいて，定理 1 の簡単な系として J.Igusa によって証明された．

§2　局所ゼータ関数の有理性定理の Denef による一般化

J.Igusa による局所ゼータ関数の有理性定理は，Denef によって大いに一般化された．Denef の結果を述べる前に，少し言葉を準備する．

開集合 $U \subset K^n$, U 上で収束する巾級数 $g(x), h(x)$, 自然数 m を用いて，$\{x \in U \mid g(x) = 0\}$, $\{x \in U \mid \operatorname{ord} g(x) < \operatorname{ord} h(x)\}$, $\{x \in U \mid g(x) = y^m,\ {}^{\exists} y \in K\}$, と表わされる K^n の部分集合を，(ここだけの用語だが) それぞれタイプ I, タイプ II, タイプ III の部分集合ということにする．

[定義 2.1]　K^n の部分集合 S は，条件

“任意の $x \in S$ に対し，ある開近傍 U があり，$U \cap S$ は，タイプ I, II, III の集合から，合併，共通部分，補集合をとる操作を有限回施して得られる”

を満たすとき *semianalytic* といわれる.

[定義 2.2]　K^n の部分集合 S は, K^{m+n} の semianalytic な部分集合 $\tilde{S}$ があって

$$S = pr(\tilde{S}), \quad pr : K^{m+n} \to K^n \quad \text{(projection)}$$

となるとき *subanalytic* といわれる.

[定義 2.3]　関数 $f : K^n \to K$ は, そのグラフが $K^n \times K$ の subanalytic な部分集合となるとき *subanalytic* といわれる.

[定理 2.4]　f を K^n 上の subanalytic な関数, S を K^n の有界な subanalytic な部分集合とする. このとき, 積分

$$\int_S |f(x)|^s \, |dx|$$

は q^{-s} の有理関数を表わす.

Denef [D2] によるこの定理は, 有理性を持つ p 進巾積分の範囲を著しく拡張している.

例えば, p 進体上の概均質ベクトル空間に付随する局所ゼータ関数は, 通常, 群の開軌道ごとにその上での積分として与えられるが, 群の開軌道は subanalytic (より強く semialgebraic) なので, Denef の定理により直ちに有理性が従う (cf. [I2], [S]). また [BöSa] では, Denef の定理を二次形式の局所密度の生成関数の有理性の証明に利用している.

Denef の定理の応用例を, さらに 2 つ挙げておこう.

[応用 2.5]　(J.Denef and Van den Dries [DVD]) $f(x_1, \ldots, x_n)$ を $\mathfrak{O}^n$ 上で収束する巾級数とし,

$$A_m = \sharp\left[\left\{x \in \mathfrak{O}^n \;\middle|\; f(x) = 0\right\} \bmod \mathfrak{P}^m\right]$$

とおく. このとき, 生成関数 $\sum_{m=0}^{\infty} A_m T^m$ は, T の有理関数を表わす.

[応用 2.6]　(Du Sautoy [DS]) G をコンパクト p 進 Lie 群とし,

$$C_m = \sharp\{H \subset G \mid H = \text{open compact subgroup of index } p^m\}$$

とおく. このとき, 生成関数 $\sum_{m=0}^{\infty} C_m T^m$ は, T の有理関数を表わす.

§3　極と b-関数の関係

一般に K を標数 0 の体, $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ を K-係数多項式とする. このとき, I.N.Bernstein のよく知られた定理により, $x_1, \ldots, x_n$ と s の多項式を係数とする偏微分作

用素 $P(x,s,\partial_x)\in K[x_1,\ldots,x_n,s,\partial_{x_1},\ldots,\partial_{x_n}]$ と s の多項式 $b(s)$ とを適当に選ぶと,

$$P(x,s,\partial_x)f(x)^{s+1}=b(s)f(x)^s \tag{3.1}$$

なる方程式を満たすようにできる. このような $b(s)$ のうちで, モニックで次数が最低のものを $f(x)$ の b-関数, または Bernstein-Sato 多項式という (cf. [H], 第 5 章).

$K=\mathbb{R}$ の場合を簡単に復習しておこう. 実数体上では b-関数と局所ゼータ関数の解析接続の関係, 特に b-関数が局所ゼータ関数の極の位置を統制していることはよく知られている. 実数体の場合に b-関数と局所ゼータ関数が結びつくのは, (3.1) 式から部分積分を用いて容易に証明できる次の関係式によっている.

$$\int_{\{x\in\mathbb{R}^n\ \mid\ f(x)>0\}} f(x)^s\Phi(x)\,dx=\frac{1}{b(s)}\cdot\int_{\{x\in\mathbb{R}^n\ \mid\ f(x)>0\}} f(x)^{s+1}(P^*(x,s,\partial_x)\Phi)(x)\,dx. \tag{3.2}$$

ここで $P^*(x,s,\partial_x)$ は $P(x,s,\partial_x)$ の随伴作用素である. この式より, $b(s)=\prod_\lambda(s+\lambda)$ と表わしたとき,

$$\frac{1}{\prod_\lambda\Gamma(s+\lambda)}\cdot\int_{\{x\in\mathbb{R}^n\ \mid\ f(x)>0\}} f(x)^s\Phi(x)\,dx$$

が整関数に解析接続されることが, 直ちに従う. よって, 局所ゼータ関数の極は b-関数の根 $-\lambda$ から始まる等差数列$-\lambda,-\lambda-1,-\lambda-2,\ldots$ 上に分布していることが分かる.

さて K が p 進体の場合には, $f(x)$ の p 進巾積分に部分積分を適用するなどということはできず, b-関数の根と局所ゼータ関数の極の間の関係は $\mathbb{R}$ の場合のように直接的ではない. しかし, p 進体の場合にも同様の関係があるであろうことは, 期待しない方が無理というものである.

J.Igusa は, K 上分解する既約正則概均質ベクトル空間の相対不変式を中心に, 局所ゼータ関数 $Z_f(s)$ の explicit な計算を大々的に実行し, きわめて多くの例に対し, $Z_f(s)$ の極は $s=-\lambda+\frac{2\pi t}{\log q}\sqrt{-1}$ $(t\in\frac{1}{N}\mathbb{Z})$ の形で表わされ, $-\lambda$ が b-関数の根になっていることを確認した (cf. [I3]). 以下に, $Z_f(s)$ の計算結果の見本をお目にかけよう.

$\zeta_p(s) = (1-p^{-s})^{-1}$ で簡単に表わされる例

P.V.	Local Zeta Function	b-function
$\mathbf{GL}(n) \otimes \mathbf{SL}(n)$	$\prod_{i=1}^{n} \zeta_p(s+i)$	$\prod_{i=1}^{n}(s+i)$
$\Lambda^2\mathbf{GL}(2n)$	$\prod_{i=1}^{n} \zeta_p(s+2i-1)$	$\prod_{i=1}^{n}(s+2i-1)$
$Sp(2n) \otimes \mathbf{GL}(2m)$ $(1 \leq m < n)$	$\prod_{i=1}^{m} \zeta_p(s+2i-1)\zeta_p(s+2(n-i+1))$	$\prod_{i=1}^{m}(s+2i-1)(s+2(n-i+1))$
$E_6 \otimes \mathbf{GL}(1)$	$\zeta_p(s+1)\zeta_p(s+5)\zeta_p(s+9)$	$(s+1)(s+5)(s+9)$

複雑な例

n	$\frac{1}{2}$	1	2	4
P.V.	$S^2\mathbf{SL}_3 \otimes \mathbf{GL}_2$	$(\mathbf{SL}_3 \otimes \mathbf{SL}_3) \otimes \mathbf{GL}_2$	$\Lambda^2\mathbf{SL}_6 \otimes \mathbf{GL}_2$	$E_6 \otimes \mathbf{GL}_2$

$$b(s) = (s+1)^2(s+\tfrac{5}{6})(s+\tfrac{7}{6})(s+\tfrac{n+1}{2})^2(s+\tfrac{n+2}{2})^2(s+\tfrac{2n+1}{2})^2(s+\tfrac{3n+1}{3})(s+\tfrac{3n+2}{3}).$$

$$\begin{aligned} Z(s) \;&=\; \zeta_p(2s+2)\zeta_p(6s+5)\zeta_p(2s+2n+1)\zeta_p(4s+2n+2)\zeta_p(6s+3n+3)\zeta_p(6s+6n+2) \\ &\quad \times P(p^{-1}, p^{-s}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(x,y) \;&=\; 1 + (n)_+(3n)xy + (1 + x^n - x^{2n} + x^{3n-1} - 2x^{3n} + x^{4n-1} - x^{4n} + x^{5n})x^2y^2 \\ &\quad + (n)_+(3n)(1 - x^n + x^{2n-1})x^3y^3 \\ &\quad + (n)_+(1 + x^{n-1} - x^n + x^{3n-2} - x^{3n-1} - x^{3n} - x^{4n-1} + x^{4n})x^4y^4 \\ &\quad + (n)_+(3n)(1 - x^n + x^{2n-1})x^{n+4}y^5 \\ &\quad + (1 + x^{n-1} - x^n + x^{2n-1} - 2x^{2n} + x^{3n-2} - x^{3n-1} - x^{3n} \\ &\qquad - 2x^{4n-1} + x^{4n} - 2x^{5n-1} + x^{5n} + x^{7n-1})x^{n+5}y^6 \end{aligned}$$

（まだ次頁へ続く）

$$
\begin{aligned}
&+(1)(n)_+(2n-1)_+(3n)x^{2n+5}y^7\\
&+(1+x^{2n-1}-2x^{2n}+x^{3n-1}-2x^{3n}-x^{4n-1}-x^{4n}+x^{4n+1}\\
&\qquad -2x^{5n-1}+x^{5n}-x^{6n-1}+x^{6n}+x^{7n-1})x^{2n+6}y^8\\
&-(n)_+(3n)(1-x^{n-1}+x^{2n-1})x^{3n+7}y^9\\
&+(n)_+(1-x-x^n-x^{n+1}+x^{n+2}-x^{3n}+x^{3n+1}+x^{4n})x^{5n+6}y^{10}\\
&-(n)_+(3n)(1-x^{n-1}+x^{2n-1})x^{4n+8}y^{11}\\
&+(1-x^n+x^{n+1}-2x^{2n}+x^{2n+1}-x^{3n}+x^{4n}+x^{5n})x^{5n+8}y^{12}\\
&-(n)_+(3n)x^{6n+9}y^{13}+x^{10n+10}y^{14}.
\end{aligned}
$$

ここで $(a)=1-p^{-a}$, $(a)_+=1+p^{-a}$ とおいた (cf. [I5]).

既約正則概均質ベクトル空間は M.Sato-T.Kimura [SK] によって 29 系列に分類されているが, K-split form に限れば, 現時点で 29 のうちの 24 系列に対し $Z_f(s)$ の計算が行なわれている ([I3], [I5] による). まだ $Z_f(s)$ が計算されていない既約正則概均質ベクトル空間は, 次のものである.

$$\Lambda^3\mathbf{GL}(8),\quad \Lambda^2\mathbf{SL}(5)\otimes\mathbf{GL}(3),\quad \Lambda^2\mathbf{SL}(5)\otimes\mathbf{GL}(4),\quad Spin(10)\otimes\mathbf{GL}(3),\quad Spin(14)\otimes\mathbf{GL}(1).$$

以上のような計算は, 次の予想を支持している.

[予想 3.1] $Z_f(s)$ の極の実部は, $b(s)$ の零点である.

より強く, 重複度も考慮して,

[予想 3.2] $Z_f(s)$ の極の位数は, 極の実部の $b(s)$ における重複度を越えない.

と予想することもできる.

予想 3.1 は, 現在のところ, 次のような場合に解かれている.

1. $f(x)$ が 2 変数多項式の場合 (Loeser [L1]),
2. $f(x)$ が既約正則 reduced 概均質ベクトル空間の相対不変式の場合 (Kimura-Sato-Zhu [KSZ]),
3. $f(x)$ がそのニュートン図形に関して非退化で, さらに若干の付加的仮定を満たす場合 (Loeser [L2]).

これらの証明であるが, 実数体の場合の (3.2) 式のような $Z_f(s)$ と $b(s)$ との直接の関係が (今のところ) 存在しないので, 多少回りくどい道を辿らねばならない. すなわち, まず極の実

部として現われる有理数を幾何学的なデータで表現し，次にその幾何学的な量が $b(s)$ の零点となることを Lefschetz 原理によって $\mathbb{C}$ 上の代数解析的問題として考察するのである．Loeser [L1] では，局所ゼータ関数の解析接続を特異点解消によって行い，その際，極の実部と例外因子の交わり具合いとの間に関係がつくことを用いる．Kimura-Sato-Zhu [KSZ] では，極の実部と特異軌道上の相対不変微分形式の乗法因子の関係を用いる．Loeser [L2] では，ニュートン図形に関して非退化な多項式に対してはトーラス埋め込みを利用して扱いやすい特異点解消が構成され (cf. [K], [V])，ニュートン図形のデータによって極の実部が記述されること（この部分は Denef [D3] による）を利用する．

重複度こみの予想 3.2 については，一般的結果は知られていないように思われるが，私の不勉強で知らないだけであるかもしれない．

多変数の例

ついでに，多変数の計算例もあげておく (cf. [HS])．多変数の局所ゼータ関数についての研究はあまり無く，[L3] および概均質ベクトル空間の場合の [S] くらいしか知らない．

P.V.	$Z(s_1,\ldots,s_n)$
$\Lambda^2 Trig(2n)$	$\displaystyle\prod_{i=1}^{n}\zeta_p(s_i+\cdots+s_n+2i-1) \times \prod_{1\le i\le j\le n-1}\frac{\zeta_p(s_i+\cdots+s_j+2j-2i+1)}{\zeta_p(s_i+\cdots+s_j+2j-2i+3)}$
$Sp(2n)\otimes Trig(2m)$ $(1\le m<n)$	$\displaystyle\prod_{i=1}^{m}\zeta_p(s_i+\cdots+s_m+2n-2i+2)\zeta_p(s_i+\cdots+s_m+2i-1) \times \prod_{1\le i\le j\le m-1}\frac{\zeta_p(s_i+\cdots+s_j+2j-2i+1)}{\zeta_p(s_i+\cdots+s_j+2j-2i+3)}$

§4 局所ゼータ関数の対称性

局所体 K の有限次拡大 L に対して，$\mathfrak{O}_L$, $\mathfrak{P}_L$ でその整数環，極大イデアルを表わす．また，$q_L = N(\mathfrak{P}_L) = \sharp(\mathfrak{O}_L/\mathfrak{P}_L)$ とおく．$f(x)\in K[x_1,\ldots,x_n]$ を L-係数多項式とみなして，局所ゼータ関数

$$Z_L(s) = Z_{f,L}(s) = \int_{\mathfrak{O}_L^n\setminus\{f(x)=0\}} |f(x)|_L^s\ |dx|_L$$

を考えることができる．このとき，$Z_L(s)$ が，体 L によらず普遍的な表示を持つことがしばしばある．そこで Igusa [I4] は，次の概念を導入した．

[定義 4.1] 有理関数 $F(u,v) \in \mathbb{Q}(u,v)$ で，任意の有限次拡大 L/K に対し，

$$Z_L(s) = F(q_L^{-1}, q_L^{-s})$$

を満たすものが存在するとき，$F(u,v)$ を $f(x)$ の普遍ゼータ関数という．

さらに Igusa [I4] は，豊富な具体例に基づいて，次の予想を提出した．

[予想 4.2] $f(x) \in K[x_1, \ldots, x_n]$ は斉次多項式とする．f の普遍ゼータ関数 $F(u,v)$ は (存在するならば)，

$$F(u,v) = v^{\deg f} F(u^{-1}, v^{-1})$$

を満たす．

この予想は，Denef-Meuser [DM] によって肯定的に解かれた．彼らによる解答は，次のようなものである．

[定理 4.3] $f(x) \in \mathfrak{O}_K[x_1, \ldots, x_n]$ は斉次多項式で $f \bmod \mathfrak{P}_K \not\equiv 0$ なるものとする．$\bmod \mathfrak{P}_K$ で good reduction をもつような $D_K = \mathrm{Proj}(K[x_1, \ldots, x_n]/(f))$ の embedded resolution $h_K : Y_K \to \mathbf{P}_K^n$ が存在すると仮定する．このとき f の普遍ゼータ関数 $F(u,v)$ は (存在するならば)，対称性

$$F(u,v) = v^{\deg f} F(u^{-1}, v^{-1})$$

を満たす．

[系 4.4] 定理 4.3 の仮定のもとで，

$$\deg Z_f(s) = -\deg f$$

が成り立つ．ここで，$\deg Z_f(s)$ は q^{-s} に関する次数である．

ここで，f が代数的数体に係数を持つ斉次多項式であれば，ほとんどすべての有限素点に対して，特異点解消についての条件は満足される．定理 4.3 の証明の要点を略述する．

まず，仮定のような特異点解消の存在に基づいて，$h_K^{-1}(D_K)$ の既約成分の何個かの交わりの $\mathfrak{O}_L/\mathfrak{P}_L$-有理点の個数を用いた $Z_L(s)$ の明示的表示を得ることができる．この明示的表示において，$\mathfrak{O}_L/\mathfrak{P}_L$-有理点の個数を Lefschetz の不動点公式によって ℓ 進コホモロジーにおける Frobenius 写像の跡として表わしたとき，定理で主張されている普遍ゼータ関数 $F(u,v)$ の満

たす対称性は, ℓ 進コホモロジーに対する Poincaré の双対性, すなわち Weil の合同ゼータ関数の関数等式の帰結に他ならないことがわかる.

定理の意味を, 簡単に説明しておく. まず, 定理 1.1 により, 局所ゼータ関数は

$$Z_f(s) = \frac{P_f(q^{-s})}{\prod_i (1 - q^{-(N_i s + \nu_i)})} \quad (P_f(T) \in \mathbb{Q}[T^{\pm 1}], N_i, \nu_i \in \mathbb{Z})$$

のような表示を持つ. ここで §3 で紹介した予想や結果にも見られるように, 分母はきわめて安定な性質を持つ. しかし, 分子は §3 の例に見るように, なかなか複雑で統制しがたいものである. とくに, 分子に $1 - q^{-Ns+\nu}$ 以外にどのようなタイプの q^{-1}, q^{-s} の (Laurent) 多項式が現われうるのかは興味深い. 定理は, 分子に現われる多項式も (それが, たとえ §3 であげた $P(x, y)$ のような複雑なものであっても), $q \mapsto q^{-1}$ の変換で相反方程式に似た対称性を持つことを主張している. [I4], [DM] では, この対称性を局所ゼータ関数の "functional equation" と呼んでいるが, いわゆる "local functional equation" とは別物である. 紛らわしいので, ここでは「対称性」と呼んだ.

参考文献

[A] M.F.Atiyah: Resolution of singularities and division of distributions, *Comm. pure Appl. Math.* **23**(1970), 145–150.

[BG] I.N.Bernstein and S.I.Gel'fand: Meromorphic property of the function P^λ, *Funct. Anal. Appl.* **3**(1969), 273–285.

[BS] ボレビッチ・シャハレビッチ: 整数論 (上), 吉岡書店.

[BöSa] S.Böcherer and F.Sato: On the rationality of formal power series related to local densities, *Comment. Math. Univ. St. Pauli* **36**(1988), 53–86.

[D1] J.Denef: Report on Igusa's local zeta function, Séminaire Bourbaki 1990/91, n° 741, *Astérisque* **201–203**(1991), 359–386.

[D2] J.Denef: Multiplicity of the poles of the Poincaré series of a p-adic subanalytic set, Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux 1987/88, n° 43.

[D3] J.Denef: Poles of p-adic complex powers and Newton polyhedra, Résumé dans groupe d'étude d'analyse ultramétrique **17**(1984/85).

[DM] J.Denef and D.Meuser: A functional equation of Igusa's local zeta function, *Amer. J. Math.* **113**(1991), 1135–1152.

[DVD] J.Denef and L. Van den Dries: p-adic and real subanalytic sets, *Ann. of Math.* **128**(1988), 79–138.

[DS] M.Du Sautoy: Finitely generated groups, p-adic analytic groups and Poincaré series, *Bull. AMS.* **23**(1990), 121–126.

[H] 堀田良之: 代数入門, 裳華房.

[HS] Y.Hironaka and F.Sato: Spherical functions and local densities of alternating forms, *Amer. J. Math.* **110**(1988), 473–512.

[I1] J.Igusa: Complex power and asymptotic expansions I, *J. reine angew. Math.* **268/269**(1974), 110–130; II, *J. reine angew. Math.* **278/279**(1975), 307–321.

[I2] J.Igusa: Some results on p-adic complex powers, *Amer. J. Math.* **106**(1984), 1013–1032.

[I3] J.Igusa: b-functions and p-adic integrals, *Algebraic Analysis*, Vol.I(1988), 231–241.

[I4] J.Igusa: Universal p-adic zeta functions and their functional equations, *Amer. J. Math.* **111**(1989), 671–716.

[I5] J.Igusa: Local zeta functions of certain prehomogeneous vector spaces, *Amer. J. Math.* **114**(1992), 251–296.

[K] 金子晃: ニュートン図形・特異点・振動積分, 上智大学数学講究録 11, 1981.

[KSZ] T.Kimura, F.Sato and Xiao-wei Zhu: On the poles of p-adic complex powers and the b-functions of prehomogeneous vector spaces, *Amer. J. Math.* **122**(1990), 423–437.

[L1] F.Loeser: Fonctions d'Igusa p-adiques et polynômes de Bernstein, *Amer. J. Math.* **110**(1988), 1–22.

[L2] F.Loeser: Fonctions d'Igusa p-adiques, polynômes de Bernstein, et polyèdres de Newton, *J. reine angew. Math.* **412**(1990), 75–96.

[L3] F.Loeser: Fonctions zêta local d'Igusa à plusieures variables, intégration dans les fibres, et discriminants, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.* 4^e^ série, **22**(1989), 435–471.

[S] F.Sato: On functional equations of zeta distributions, *Adv. Studies in pure Math.* **15**(1989), 465–508.

[V] A.N.Varčenko: Newton polyhedra and estimation of oscillating integrals, *Funct. Anal. Appl.* **10**(1976), 175–196.