数理解析研究所講究録
第 843 巻 1993 年 130-135

Invariants of cusps and the dimension formula

東北大教養　尾形　庄悦

序. $C\subset\mathbb{R}^n$ を自己双対, 等質, 開凸錐とし, $G=\{g\in GL_n(\mathbb{R}) \mid gC=C\}$ とする。このときチューブ領域 $\mathcal{D}=\mathbb{R}^n+\sqrt{-1}\,C$ は対称領域となる。$\mathcal{D}$ の正則自己同型群の単位元を含む連結成分を $\tilde{G}=(\mathrm{Hol}\,\mathcal{D})^\circ$ とおくと, $\tilde{G}$ はエルミート型の半単純リー群となる。$r=\mathbb{R}\text{-rk}\,\tilde{G}$ とする。$\mathbb{Q}\text{-rk}\,\tilde{G}=1$ となるように $\mathbb{Z}^n\subset\mathbb{R}^n$ をえらぶ。$\mathcal{D}$ の有理境界点 $\sqrt{-1}\infty$ に対応する $\tilde{G}$ の放物部分群 $\mathcal{P}$ は $G\ltimes\mathbb{R}^n$ と同型になる。$\tilde{G}$ の neat な算術部分群 $\tilde{\Gamma}$ を選ぶと局所対称領域 $\tilde{\Gamma}\backslash\mathcal{D}$ は有限個の点 $\{P_1,\cdots,P_h\}$ を付け加えてコンパクト化できる。

$Y^*=(\tilde{\Gamma}\backslash\mathcal{D})\cup\{P_1,\cdots,P_h\}$ (佐武-Baily-Borel コンパクト化).

$P_1=\sqrt{-1}\infty$ とする。$\pi: Y\longrightarrow Y^*$ を特異点解消とすると, 例外因子 D は連結成分 $D^{(1)},\cdots D^{(h)}$ の和に分解する. $D^{(1)}=\pi^{-1}(P_1)$.

$\tilde{\Gamma}$ の重み k をもつカスプ型式全体を $S_k(\tilde{\Gamma})$ で表わすとき, その次元はリーマン-ロッホの定理を使って計算できる。

$$\dim S_k(\tilde{\Gamma})=\dim H^0(Y,\ L^{\otimes k}\otimes\mathcal{O}_Y(-D)).$$

更に，これは，$\tilde{\Gamma}\backslash\mathfrak{D}$ の体積に比例する普遍係数をもつ n 次の k の多項式 $P(k)$ と各 $D^{(i)}$ から決まる不変量 $\chi_\infty(p_i)$ の和として表わされる。i.e.,

$$\dim S_k(\tilde{\Gamma}) = P(k) + \sum_{i=1}^{h}(-1)^n \chi_\infty(p_i).$$

一方，ヒルベルト・モジュラー群の時（$r=n$，$C=(\mathbb{R}_{>0})^n$），セルバーグの跡公式により

$$\dim S_k(\tilde{\Gamma}) = P(k) + \sum_{i=1}^{h} 2^{-r} L_i(s)\Big|_{s=\frac{n}{r}}$$

と表わされる。$L_i(s)$ は清水の L-関数の定数倍で，境界点 p_i に対応する有理放物部分群 P_i により定義される。

この二つの公式より，

$$\sum_{i=1}^{h}(-1)^n\chi_\infty(p_i) = \sum_{i=1}^{h} 2^{-r} L_i(s)\Big|_{s=1}$$

が判る。このことから，Van der Geer は $(-1)^n\chi_\infty(p_i) = 2^{-r}L_i(s)|_{s=1}$ と予想した。Hirzebruch は $L_i(s)|_{s=1}$ が p_i の符号数不足指数（signature defect）$\sigma(p_i)$ と一致すべきだと予想し，Atiyah, Donnelly-Singer により，また Müller により証明された。

この予想と定理はヒルベルト・モジュラー群の場合だけを扱っている。一般の場合を考えたい。

$\mathbb{R}^n$ 上の r 次の多項式関数で，$g\in G$ に対し，$N(gv) = (\det g)^{r/n} N(v)$ $v\in\mathbb{R}^n$ を満たすように"ノルム"N を定める。$S=\{N=0\}$ を特異集合とすると，$\mathbb{R}^n\setminus S = \coprod_{i=0}^{m} C_i$ と分解する。$C_0 = C$ とする。佐藤－新谷の概均質ベクトル空間の理論によれば，

$$\xi_i(M, s) = \sum_{x \in \Gamma \backslash M \cap C_i} \frac{\mu(x)}{|N(x)|^s}$$

でゼータ関数を定めると，$\{\xi_i\}$は関数等式を満たす。佐武はξ_iの一次結合 $L(M, S)$ で単独で関数等式を満たすものを見つけた。

<u>定理</u>（佐武） $L(M, 0) = 2^r \xi_0(M, 0)$.

結局，Van der Geer と Hirzebruch の予想を一般化して，二つの等式

$$\xi_0(M^*, 0) = (-1)^n \chi_\infty(p_1),$$
$$\xi_0(M^*, 0) = 2^{-r} \sigma(p_1) \quad (n\text{は奇数})$$

が成立するかどうかという，局所的問題に定式化される。

1. 凸錐のゼータ関数

$M \simeq \mathbb{Z}^n$, $M_{\mathbb{R}} = M \otimes \mathbb{R}$ とする．自己双対とも等質とも限らない開凸錐 $C \subset M_{\mathbb{R}}$ と部分群 $\Gamma \subset GL(M)$ の組で条件

(i) $gC = C \quad \forall g \in \Gamma$,

(ii) Γは$C/\mathbb{R}_{>0}$上固有不連続，固定点なしに作用する，

(iii) 商 $\Gamma \backslash C/\mathbb{R}_{>0}$ はコンパクト

を満たすものを考える。

$\langle\ ,\ \rangle : M^* \times M \longrightarrow \mathbb{Z}$ を自然な pairing とし，Cの双対錐を
$C^* = \{y \in M^*_{\mathbb{R}} ;\ \langle y, x \rangle > 0 \quad \forall x \in \bar{C} \setminus \{0\}\}$で定める。$C$の特性関数を$\phi(x)$とする。このとき，凸錐$C$のゼータ関数を

$$Z(C, M; s) = \sum_{x \in \Gamma \backslash M \cap C} \phi_C(x)^{s}$$

で定める。

定理 (i) $Z(C,M;s)$ は全平面へ有理型に解析接続される。

(ii) $s=0$ で正則，かつ，その値は $\Gamma \backslash C \cup \{0\}$ の錐分割の言葉を使って表わされる。

(iii) (石田) $Z(C,M;0) \in \mathbb{Q}$.

注意 C が等質，自己双対錐のとき，$\phi(x)$ は $N(x)^{-n/r}$ の定数倍であるから，$Z(C,M;0) = \xi_0(M,0)$.

2. 幾何的不変量

$\mathcal{D} = M_{\mathbb{R}} + \sqrt{-1}\, C \subset M_{\mathbb{C}}$ はチューブ領域で，$V = \Gamma \ltimes M \backslash \mathcal{D} \cup \sqrt{-1}\infty$ は孤立特異点 $p = \sqrt{-1}\infty$ を持つ正規解析空間である。この (V,p) を土橋カスプと呼ぶ。トロイダル埋込みを使って，特異点解消 $\pi : (U, X) \longrightarrow (V, p)$ を例外因子 X が単純正規交叉のみをもつようにとる。$X = \sum_{i \in I} X_i$. 各 X_i の定める類を $\delta_i \in H^2(U, \partial U; \mathbb{Z})$ とする。

定義 (佐武) (i) $\chi_\infty(p) = \left[\prod_{i \in I} \dfrac{\delta_i}{1 - e^{-\delta_i}}\right]_n [U, \partial U] \in \mathbb{Q}$.

(ii) $\sigma(p) = \left[\prod_{i \in I} \delta_i \coth \delta_i\right]_n [U, \partial U] - \mathrm{sign}(U, \partial U)$,

ここに，$\mathrm{sign}(U,\partial U)$ はカップ積 $H^n(U,\partial U) \otimes H^n(U) \longrightarrow H^{2n}(U,\partial U)$ により定まる $H^n(U,\partial U;\mathbb{R})$ 上の二次形式の符号数を表わす。

3. 結果

<u>定理</u>（石田）　(V, p) が (C, Γ, M) により定まる偶数次元のカスプのとき，

$$\chi_\infty(p) = Z(C^*, {}^t\Gamma, M^*; 0).$$

<u>定理</u>　n が偶数のとき，

$$\chi_\infty(p) = 2^{-n}\sigma(p).$$

この定理の証明には，$\mathrm{sign}(U, \partial U)$ を $X_J = \bigcap_{j \in J} X_j$ $(J \subset I)$ 上のある二次形式の符号数の和で表わす公式が使われる。

4. 発展

$\mathcal{D}$ がチューブ領域でない場合，例えば m 次元複素単位球 $B^m = \{z \in \mathbb{C}^m \mid \|z\| < 1\}$ の直積 $\mathcal{D} = (B^m)^r$ $(r > 1)$ の場合にも，$\Gamma\backslash\mathcal{D}$ に有限個の点を付け加えてコンパクト化できることがある。このようなカスプ特異点 p に対しても，

<u>定理</u>　$n = mr$ が偶数のとき，

$$\chi_\infty(p) = 2^{-n}\sigma(p).$$

<u>問題</u>　§3での石田の定理に相当する等式を見つけたい。

参考文献

1. I. Satake and S. Ogata, Zeta functions associated to cones and their special values, Adv. Stud. Pure Math. vol. **15**, pp. 1-27(1989).
2. M.-N. Ishida, The duality of cusp singularities, Math. Ann. **298**, 81-97(1992).
3. S. Ogata, Hirzebruch's conjecture on cusp singularities, to appear in Math. Ann.
4. S. Ogata, Signature defects of Hilbert-Picard modular cusps, to appear in Math. Z.
5. H. Tsuchihashi, Higher dimensional analogues of periodic continued fractions and cusp singularities, Tohoku Math. J. **35**, 607-639(1983).