数理解析研究所講究録
第 843 巻 1993 年 171-183

Eisenstein series for Siegel modular groups

東工大・理 水本信一郎 (Shin-ichiro Mizumoto)

1. Results

$m \in \mathbb{Z}_{>0}$ を以下固定し、H_m を Siegel upper half space of degree m とする。

$k \in 2\mathbb{Z}_{\geqq 0}$, $Z \in H_m$, $s \in \mathbb{C}$ に対して

$$E_k^{(m)}(Z,s) := \det(\operatorname{Im}(Z))^s \sum_{\begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \in \left\{\begin{pmatrix} * & * \\ 0^{(m)} & * \end{pmatrix}\right\} \backslash Sp(m,\mathbb{Z})} \det(cZ+d)^{-k} \left|\det(cZ+d)\right|^{-2s}$$

とおく。右辺の和は $\left\{ (Z,s) \;\middle|\; Z \in H_m,\ \mathrm{Re}(s) > \frac{m+1-k}{2} \right\}$ で absolutely and uniformly convergent. これを Eisenstein series (of weight k) for $Sp(m,\mathbb{Z}) = Sp_{2m}(\mathbb{Z})$ とよぶ。

次の性質はよく知られている：

<u>Fundamental Theorem</u> [La, Kal]

(1) 各 $Z \in H_m$ に対し、$E_k^{(m)}(Z,s)$ は s の fcn として

全平面に meromorphic に解析接続され、次の functional equation をみたす：

$$\Gamma_m(s) := \prod_{j=0}^{m-1} \Gamma\left(s - \frac{j}{2}\right), \quad \xi(s) := \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$$
$$(= \xi(1-s))$$

とし、

$$\mathbb{E}_k^{(m)}(Z,S) := \frac{\Gamma_m\left(s+\frac{k}{2}\right)}{\Gamma_m(s)} \cdot \xi(2s) \prod_{j=1}^{[\frac{m}{2}]} \xi(4s-2j)\, E_k^{(m)}\left(Z, s-\frac{k}{2}\right)$$

とおくと （ [ ] は Gauss symbol ）

$$\mathbb{E}_k^{(m)}(Z,s) = \mathbb{E}_k^{(m)}\left(Z, \frac{m+1}{2} - s\right).$$

(2) Poles の location は Z に independent. i.e.

$Z = x + iy$ （ x, y : real matrices ） とおくとき、

$\forall s_0 \in \mathbb{C}$ で $\exists \delta \in \mathbb{R}_{>0}$, $\exists \ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$:

$$E_k^{(m)}(Z,s) = \frac{(C^\infty\text{-fcn in } (x,y,s))}{(s-s_0)^\ell} \quad \text{for } |s-s_0|<\delta.$$

(3) $E_k^{(m)}(Z,s)$ は Z の fcn として slowly increasing. 」

(3) について： Rankin-Selberg method の automorphic L-fcn's への応用において

$$\mathcal{D}\, E_k^{(m)}(Z,s) \Big|_{H_{m_1} \times \cdots \times H_{m_r}} \qquad (\star)$$

の type の fcn があらわれる (e.g. [Bö2], [BSY], [Mi]).

ここで $\mathcal{D}$ は $Sp(m, \mathbb{Z})$ に関しては必ずしも invariant でない differential operator (であって, (★) の形の fcn が $Sp(m_1, \mathbb{Z}) \times \cdots \times Sp(m_r, \mathbb{Z})$ に関して保型性をもつようなもの) である。(このような differential operator の一般的構成法は [Ib] にある。)

このとき R-S integral の convergence を示すためには

(★) も slowly increasing か?

という問題を解決しなければならない (Böcherer 氏がこの点を 1990年9月頃、筆者に指摘した)。

今回得られたことを述べる:

Main result

(i) Fundamental Theorem に. Fourier expansion を用いた elementary proof がつく。

($m = 2$ のとき [Kau].)

(ii) $E_k^{(m)}(z, s)$ の $\forall$ partial derivative in the entries of (x, y) は slowly increasing (locally uniformly in s). すなわち:

(i) により, $\forall s_0 \in \mathbb{C}$ に対し $\exists \delta \in \mathbb{R}_{>0}$, $\exists \ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

s.t. $\quad (s-s_0)^\ell E_k^{(m)}(z, s)$: holom. in s for $|s-s_0|<\delta$, C^∞ in (x, y).

このとき $\forall \rho \in \mathbb{R}_{>0}$, $\forall N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$: given に対し

$\exists\ A, B \in \mathbb{R}_{>0}$: depending only on $m, k, s_0, \delta, \ell, \rho, N$

s.t.

$$\left| (s-s_0)^{\ell}\, \mathbb{D} E_k^{(m)}(z,s) \right| \leq A \cdot \det(\mathrm{Im}(z))^{B}$$

for $\mathrm{Im}(z) \geqq \rho \cdot 1_m$, $|s-s_0| < \delta$. ここで $\mathbb{D}$ は $\forall$ monomial of degree N in $\dfrac{\partial}{\partial z_{ij}}$'s and $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}_{ij}}$'s（但し $z = (z_{ij})$）.

（特に、$\forall$ "slowly increasing" differential operator が R-S integral に apply できる。）

<u>補足</u> $\mathbb{E}_k^{(m)}(z,s)$ を Fundamental Theorem (1) で def したものとする。

(1°) この pole については次が知られている：

(1) $\mathbb{E}_0^{(m)}(z,s)$ の possible poles は
$$\left\{ \frac{j}{4} \;\middle|\; j \in \mathbb{Z},\ 0 \leq j \leq 2m+2 \right\}$$
にある [Kal]。

(2) $k > 0$ なら $\mathbb{E}_k^{(m)}(z,s)$ は entire [Mi, p.599]。

(2°) 講演の際、「pole はすべて simple pole か？」との質問に対し筆者は「高々 double pole だ」と答えたが、それは思い違いであった。正確な解答は次の通りである：

(i) $\mathbb{E}_0^{(m)}(z,s)$ の pole については $s = \frac{m+1}{2}$ (resp. $s=0$) が simple pole, residue $= \prod_{j=1}^{[\frac{m}{2}]} \xi(2j+1)$ (resp. $-\prod_{j=1}^{[\frac{m}{2}]} \xi(2j+1)$) であることがわかっている [Kal] が、

他の possible poles は、実際に pole なのか、order はいくつなのかわからない。

(ii) もとの $E_k^{(m)}(Z,s)$ の pole は $\zeta(s)$ の zeros にも関係してくるので複雑である。

(3°) 結局、Eisenstein series の pole の様子が筆者にはまだよくわかっていないので、もう少し調べてみたいと思っている。」

2. Outline of Proof

$Z = x + iy \in H_m$ (x, y : real) とする。[Ma] により、$\mathrm{Re}(s) > \frac{m+1}{2}$ で、$E_k^{(m)}(Z,s)$ の Fourier exp. は次のようになる：

$$E_k^{(m)}(Z,s) = \det(y)^s + \det(y)^s \sum_{\nu=1}^{m} \sum_{h \in \Lambda_\nu} \sum_{q \in \mathbb{Z}_{prim}^{(m,\nu)}/GL_\nu(\mathbb{Z})}$$

$$S_\nu(h, 2s+k)\, \xi_\nu(y[q], h; s+k, s)$$

$$\cdot\, \mathbf{e}(\sigma(h[{}^t q]x)). \qquad (*)$$

ここで

$$\mathbf{e}(s) := e^{2\pi i s}, \quad \sigma := \mathrm{trace},$$

$$\Lambda_\nu := \{\text{half-integral matrix of size } \nu\},$$

$$\mathbb{Z}_{prim}^{(m,\nu)} := \{m \times \nu \text{ integral matrix, primitive}\},$$

$$S_\nu(h, s) := \sum_{r = {}^t r \in \mathbb{Q}^{(\nu)} \bmod 1} n(r)^{-s}\, e(\sigma(hr)) \quad : \quad \text{singular series (Siegel series)}$$

with

$n(r) :=$ product of denominators of elementary divisors of r.

また $g > 0$: size ν, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ に対し、

$$\xi_\nu(g, h; \alpha, \beta) := \int_{{}^t x = x^{(\nu)}} e(-\sigma(hx)) \det(x + ig)^{-\alpha} \det(x - ig)^{-\beta} dx.$$

($\mathrm{Re}(\alpha + \beta) > \nu$ で convergent) : confluent hypergeometric fcn [Sh 1].

Remarks

(1) $(*)$ で, $\nu \longleftrightarrow$ rank of c in $\det(cz + d)^{-k}$.

(2) $m \geq 3$ のとき, $(*)$: divergent for $\mathrm{Re}(s) < \frac{m-k}{2}$.

$(*)$ で h は Λ_ν のすべての rank の element をうごく。そこで $\lambda = \mathrm{rank}(h)$ とおき, $\mathrm{Re}(s) > m$ のもとで $(*)$ を rearrange すると次を得る:

$$E_k^{(m)}(z, s) = \sum_{0 \leq \lambda \leq \nu \leq m} F_{k,\nu,\lambda}^{(m)}(z, s),$$

$\lambda = 0$ (constant terms)

$$F_{k,\nu,0}^{(m)}(z, s) = \gamma(s)\, \mathrm{Zeta}(s) \det(y)^s\, \zeta_\nu^{(m)}\!\left(2y, 2s + k - \tfrac{\nu+1}{2}\right).$$

ここで　$\gamma(s)$ = Gamma factor ,　Zeta(s) = Riemann zeta factor ,

$1 \leq \nu \leq m$,　$y^{(m)} > 0$ に対し

$$\zeta_\nu^{(m)}(y, s) := \sum_{a \in \mathbb{Z}_{\mathrm{prim}}^{(m,\nu)} / GL_\nu(\mathbb{Z})} \det(y[a])^{-s} .$$

$(y[a] := {}^t a y a)$

これは $\mathrm{Re}(s) > \frac{m}{2}$ で convergent , 全 s-平面に merom. にのびる [Ma] (Epstein zeta fcn , or Eisenstein series for GL_m)。

$$\zeta_0^{(m)} := 1 \qquad (\text{以下では } \zeta_0^{(0)} := 1) .$$

$\underline{\lambda > 0}$　$\Delta_\lambda^{(m)} := \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ 0^{(m-\lambda,\lambda)} & * \end{pmatrix} \in GL_m(\mathbb{Z}) \right\}$ とすると

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_{\mathrm{prim}}^{(m,\lambda)} / GL_\lambda(\mathbb{Z}) & \overset{1:1}{\longleftrightarrow} & GL_m(\mathbb{Z}) / \Delta_\lambda^{(m)} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ r & \longmapsto & u_r = (\overset{\lambda}{\widetilde{r}} \ *) . \end{array}$$

各 u_r に対し　$g(y, u_r) > 0$: size $m-\lambda$ を

$$y[u_r] = \begin{pmatrix} y[r] & 0 \\ 0 & g(y,u_r) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1_\lambda & * \\ 0 & 1_{m-\lambda} \end{bmatrix}$$

(Jacobi decomposition)

で決める。すると

$$F^{(m)}_{k,\nu,\lambda}(z,s) = \gamma(s)\,Zeta(s)\,\det(y)^s \sum_{\substack{h\in\Lambda_\lambda \\ \det(h)\neq 0}} \sum_{u_r \in GL_m(\mathbb{Z})/\Delta^{(m)}_\lambda}$$

$$S_\lambda(h, 2s+k-\nu+\lambda)\,\xi^*_\lambda\left(y[r], h; s+k-\frac{\nu-\lambda}{2}, s-\frac{\nu-\lambda}{2}\right)$$

$$\cdot\,\zeta^{(m-\lambda)}_{\nu-\lambda}\left(2g(y,u_r), 2s+k-\frac{\nu+1}{2}\right)\cdot e\left(\sigma(h[{}^tr]x)\right). \qquad (**)$$

ここで ξ^*_λ は ξ_λ を少し modify したものである。

この形にしておくと Fourier series $(**)$ は（適当な $(s-s_0)^\ell$ をかけると）$\forall s_0\in\mathbb{C}$ の nbd. で一様に convergent で，項別に何度でも (x,y) について differentiable となる。（証明には [Sh 1] [Ki] [Bö 1] の結果をつかう。）このことから，① $E^{(m)}_k(z,s)$ の meromorphy，② poles の location が z に independent なこと，③ $\forall$ partial derivative が slowly increasing なことが出る。

Remark

$(**)$ で，$\zeta^{(m-\lambda)}_{\nu-\lambda}$ が infinite series としてあらわれるのは $m-\lambda > \nu-\lambda > 0$，すなわち $m \geq 3$ のときである。」

3. Proof of functional equation

上の $F^{(m)}_{k,\nu,\lambda}(z,s)$ を次のように書いておく：

$\lambda > 0$ のとき

$$F^{(m)}_{k,\nu,\lambda}(z,s) = \sum_{\substack{h\in\Lambda_\lambda \\ \det(h)\neq 0}} \sum_{r\in \mathbb{Z}^{(m,\lambda)}_{prim}/GL_\lambda(\mathbb{Z})} b^{(m)}_{k,\nu,\lambda}(h[{}^t r], y, s)\, e(\sigma(h[{}^t r]x)).$$

Remark 上で $h[{}^t r]$ は $\{h' \in \Lambda_m \mid \operatorname{rank}(h') = \lambda\}$ をちょうど一回うごく。」

また

$$b^{(m)}_{k,\nu,0}(*, y, s) = F^{(m)}_{k,\nu,0}(z,s) \quad (m>0),$$

$$b^{(0)}_{k,0,0} := 1$$

とおく。

§2 で得られた $b^{(m)}_{k,\nu,\lambda}$ の explicit form により

$$b^{(m)}_{k,\nu,\lambda}(h[{}^t r], y, s) = \gamma(s)\, Zeta(s)$$

$$\cdot\, \zeta^{(m-\lambda)}_{\nu-\lambda}\left(2g(y,u_r),\ 2s+k-\frac{\nu+1}{2}\right)$$

$$\cdot\, b^{(\lambda)}_{k,\lambda,\lambda}\left(h,\ y[r],\ s-\frac{\nu-\lambda}{2}\right).$$

($\lambda = 0$ のとき $g(y, *) = y$ とおく。)

Eisenstein series の fcnl. eq. は次のことから出る：

Proposition $C(m,\lambda)$.

$m, \lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\lambda \leq \nu \leq m$, $k \in 2\mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする。

このとき

$$\frac{\Gamma_m\left(s+\frac{k}{2}\right)}{\Gamma_m(s)} \cdot \xi(2s) \prod_{j=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \xi(4s-2j)\, b^{(m)}_{k,\nu,\lambda}\left(h[{}^t r],\, y,\, s-\frac{k}{2}\right)$$

は $(s,\nu) \longmapsto \left(\frac{m+1}{2}-s,\ m+\lambda-\nu\right)$ で invariant.

[ここで empty product $:=1$. とくに $\Gamma_0(s):=1$.]

<u>Proof.</u> (m,λ) に関する twofold induction.

<u>$C(0,0)$</u> : これは $\xi(2s)=\xi\left(2\left(\frac{1}{2}-s\right)\right)$ のことだから OK.

<u>$C(\lambda,\lambda)$ for $\lambda<m \Rightarrow C(m,\lambda)$</u> : これは relation ⊘ と $\zeta^{(m-\lambda)}_{\nu-\lambda}$ の fcnl eq から OK.

よって 次を示せばよい:

<u>$C(m,\lambda),\ \forall\lambda<m \Longrightarrow C(m,m)$</u>.

$$G(z,s) := \mathbb{E}^{(m)}_k(z,s) - \mathbb{E}^{(m)}_k\left(z,\frac{m+1}{2}-s\right)$$

を考える。($\mathbb{E}^{(m)}_k$ は §1 の Fundamental Theorem (1) で def. した "completed Eisenstein series".)

Induction assumption により

$G(z,s)$ = sum over $\{h\in\Lambda_m \mid \det(h)\neq 0\}$.

従って (Fourier coeff. の estimate により)

$G(z,s)$: rapidly decreasing C^∞-modular form of weight k.

よって Rankin - Selberg method により

$$(G(z,s),\ E_k^{(m)}(z,\bar{s}')) = 0 \qquad \left(\begin{array}{l}\forall s' \text{ with} \\ \mathrm{Re}(s') > \dfrac{m+1-k}{2}\end{array}\right).$$

このことから $(G, G) = 0$, $G = 0$. とくに $C(m,m)$ が正しい。 ■

Remark $m = 2$ のときに限って. 上の pf は [Kau] のそれと異なる（上では, singular series の fcnl eq と, confluent hypergeometric fcn の fcnl eq を使っていない）。」

References

[Bö 1] Böcherer, S.: Über die Fourierkoeffizienten der Siegelschen Eisensteinreihen. Manuscripta math., 45, 273 – 288 (1984).

[Bö 2] Böcherer, S.: Siegel modular forms and theta series. Proc. Symp. Pure Math., 49, Part 2, 3 – 17 (1989).

[BSY] Böcherer, S., Satoh, T., Yamazaki, T.: On the pullback of a differential operator and its application to vector valued Eisenstein series. Commentarii Math. Univ. St. Pauli, 42, 1 – 22 (1992).

[Ib] Ibukiyama, T.: On differential operators on automorphic forms and invariant pluri-harmonic polynomials. Preprint (1991).

[Kal] Kalinin, V. L.: Eisenstein series on the symplectic group. Math. USSR Sbornik, 32, 449–476 (1977).

[Kau] Kaufhold, G.: Dirichletsche Reihe mit Funktionalgleichung in der Theorie der Modulfunktion 2. Grades. Math. Ann., 137, 454–476 (1959).

[Ki] Kitaoka, Y.: Dirichlet series in the theory of Siegel modular forms. Nagoya Math. J., 95, 73–84 (1984).

[La] Langlands, R. P.: On the Functional Equations Satisfied by Eisenstein Series. Lect. Notes in Math., vol. 544. Springer 1976.

[Ma] Maass, H.: Siegel's Modular Forms and Dirichlet Series. Lect. Notes in Math., vol. 216. Springer 1971.

[Mi] Mizumoto, S.: Poles and residues of standard L-functions attached to Siegel modular forms. Math. Ann., 289, 589–612 (1991).

[Sh 1] Shimura, G.: Confluent hypergeometric functions on tube domains. Math. Ann., 260, 269 – 302 (1982).

[Sh 2] Shimura, G.: On Eisenstein series. Duke Math. J., 50, 417 – 476 (1983).