数理解析研究所講究録
第844巻 1993年 26-38

Greenberg予想について

東大数理　隅田浩樹（Sumida Hiroki）

この小文で述べるGreenbergの予想とは、有限次代数体の $\mathbb{Z}_p$-拡大に対して定義される岩澤 λ, μ-不変量が、総実体のcyclotomic $\mathbb{Z}_p$-拡大に対しては消えるだろうというものです。この予想に対し、ここでは次の(1)(2)を与えます。

(1) ある特定の場合における予想と同値な条件

(2) 岩澤主予想の情報を用いた予想の十分条件

そして、(1)(2)を比べることにより、どのような場合に成立を示すことが困難そうであるかを見てみたいと思います。

これらの結果を得るにあたって、重要な御意見、御助言を頂いた岩澤健吉先生に深く感謝いたします。

§1　Introduction

記号　p：素数　$k/\mathbb{Q}$：有限次代数体　K/k：$\mathbb{Z}_p$-拡大

$K/k_n/k$：$[k_n:k]=p^n$，A_n：k_n の ideal 類群の p-part

定理．0（岩澤[4]）

次の３つの不変量　$\lambda = \lambda_p(K/k)$　$\mu = \mu_p(K/k)$　$\nu = \nu_p(K/k)$

があって、十分大きなnに対し、

$$|A_n| = p^{\lambda n + \mu p^n + \nu}$$ となる。

・cyclotomic $\mathbb{Z}_p$－拡大

$\mu_n := \{1$ の n 乗根$\}$　$\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty}) := \bigcup_{n \geq 0} \mathbb{Q}(\mu_{p^n})$　とする。

$\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q}$ なる $\mathbb{Q}$ の $\mathbb{Z}_p$－拡大 $\mathbb{Q}_\infty$ が存在することが分かる。（しかも $\mathbb{Q}_\infty$ は $\mathbb{Q}$ の $\mathbb{Z}_p$－拡大としては、唯一のものである。）k：有限次代数体に対し、$k_\infty := k \cdot \mathbb{Q}_\infty$ を k の cyclotomic $\mathbb{Z}_p$－拡大と呼ぶ。

・Greenberg予想＝$GC(k, p)$

$k/\mathbb{Q}$：総実有限次拡大とし、全ての素数 p，k_∞：k の cyclotomic $\mathbb{Z}_p$－拡大に対して

$$\lambda_p(k_\infty/k) = \mu_p(k_\infty/k) = 0$$ となる。

すなわち、$|A_n|$ は、$n \to \infty$ において有界。

知られている結果

$k = \mathbb{Q}$ という最も基本的な場合、$\lambda = \mu = \nu = 0$ となることが分かる。（岩澤[8]）また、k が総実でないとき $\lambda = \mu = 0$ とならない例としては、p：irregular prime，$k = \mathbb{Q}(\zeta_p)$ がある。（岩澤[9]）

$k/\mathbb{Q}$：abel拡大のとき、$\mu_p(k_\infty/k)=0$となることが知られている。（Ferrero-Washington[2]）

また、$\mathbb{Z}_p$-拡大に関する予想としてLeopoldt予想（後述）がある。k，pに対するLeopoldt予想は、kの独立な$\mathbb{Z}_p$-拡大がr_2+1個（r_2：kの虚素点）のみであることと同値であることが類体論から分かる。$k/\mathbb{Q}$：abel-拡大のとき、この予想が成立することが知られている。（Brumer[1]）

・<u>Leopoldt予想</u>＝$Lc(k;p)$

k：有限次代数体　E_k：kの単数群

$\overline{E}_k := Im(E_k \hookrightarrow \prod_{\mathfrak{p}|p} k_{\mathfrak{p}}^\times)$の閉包　（$k_{\mathfrak{p}}$：$k$の$\mathfrak{p}$による完備化）とするとき、$\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}} E_k = \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_p} \overline{E}_k$となる。

$\varepsilon \longmapsto (\varepsilon,\cdots,\varepsilon)$

§2　Greenberg予想と同値な条件

まず、記号について説明する。

記号　k：総実な有限次代数体、p，k_∞，k_n，A_n，は§1と同じものとする。$\Gamma := Gal(k_\infty/k)$，$Cl_n(\mathfrak{a})$：$\mathfrak{a}\subset k_n$のideal類

$H_{n,m} := \ker(i_{n,m} : A_n \to A_m)$　$(Cl_n(\mathfrak{a}) \longmapsto Cl_m(\mathfrak{a}$の延長$))$

$H_n := \bigcup_{m\geq n} H_{n,m}$　　$D_n := \langle Cl_n(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p}|p \rangle \cap A_n$，$E_n$：$k_n$の単数群

これと同様にp-整数環に対しても次を定義する。

A_n'，$H_{n,m}'$　H_n'，$i_{n,m}'$，E_n'

このとき、$0 \to D_n \to A_n \to A_n' \to 0$（完全）

☆ A_n, A_n' の幾何的な意味

L : k_∞ 上最大不分岐 abel p-拡大

L' : k_∞ 上最大の全ての素点が完全分解する abel p-拡大

とすると、類体論と k_∞ における各素点の剰余体を考えれば、

$Gal(L/k_\infty) \cong \varprojlim A_n$, $Gal(L'/k_\infty) \cong \varprojlim A_n'$ となる。

A_n', A_n の言葉を使って Greenberg 予想と同値な条件を調べてみる。まず一般的な場合から。

<u>命題 1</u>

k : 総実代数体, k_∞/k で p 上の素 ideal が不分解とする。
このとき $Lc(k, p)$ のもとで、

$$Gc(k, p) \iff A_n' = H_n' \quad \forall n \geq 0$$
$$\iff A_n'^{\Gamma} \subset H_n' \quad \forall n \geq 0$$

証明. これは Greenberg[6] からすぐに得られる。総実体 k において $Lc(k, p)$ の下では、$|A_n^{\Gamma}|$ は $n \to \infty$ で有界であることが分かる。$D_n \subset A_n^{\Gamma}$ であるから $|A_n|$ の有界性と $|A_n'|$ の有界性は同値である。[6] と同様に、$|A_n'|$ が $n \to \infty$ で有界であることと $A_n' = H_n'$ であることは同値である。($|H_n'|$ は $n \to \infty$ で有界 岩澤[11] Th. 10) $A_n' = H_n'$ と $A_n'^{\Gamma} \subset H_n'$ の同値性を示すことは難しくない。 ▨

k：総実代数体とし、次の2つの場合を考える。

case I　k_∞においてp上に素idealが1つしかない。

case II　$k/\mathbb{Q}$でpが完全分解し、$Lc(k, p)$を仮定する。

これら2つのcaseにおいて、次の2つの定理が得られた。

（定理1は、Greenberg [6] の結果からすぐに得られる。）

<u>定理．1</u>（Greenberg）　case I

$$Gc(k, p) \Longleftrightarrow A_0' = H_0'$$

<u>定理．2</u>　case II

$$Gc(k, p) \Longleftrightarrow \begin{cases} \circ\ A_0' = H_0' \\ \circ\ p\text{-rank}(\mathrm{Ker}(H^2(k_n/k, E_n') \to H^2(k_n/k, k_n^\times))) \\ \quad = p\text{-rank}(\mathrm{Im}(H^0(k_n/k, A_n') \to H^1(k_n/k, D_n))) \end{cases}$$

$$n \gg 0$$

注意　Greenberg [6] において、case IIの同値条件は、$A_n^{\Gamma} = D_n \quad n \gg 0$ としている。定理2は、この条件を2つの条件に分離したものである。一般の総実体に対しても実際に確かめ得る同値条件（$A_n' = H_n'$, $|A_m^{\Gamma_n}| = |A_n'|$ $\forall m \geq \exists n \geq c$）が得られるが、上の2つの場合が典型的である。

証明（命題1を用いる。）

$$R_n := \mathrm{Ker}(H^2(k_n/k, E_n) \to H^2(k_n/k, k_n^\times))$$

$$R_n' := \mathrm{Ker}(H^2(k_n/k, E_n') \to H^2(k_n/k, k_n^\times))$$ とおく。

このとき、次のことがcase I, case IIの性質からいえる。

◦ case I　　$R_n' = \mathrm{Ker}(R_n' \longrightarrow R_\infty')$

◦ case II　　$R_n' \cong \mathrm{Ker}(R_n' \longrightarrow R_\infty') \oplus R_n$　　$n \gg 0$

($R_n' \to R_\infty'$ は、$H^2(k_n/k, E_n') \xrightarrow{\text{infl.}} H^2(k_\infty/k, E_\infty')$ から)

ここで次の可換図式がある。(一般的なもの　岩澤[12])

$$\begin{tikzcd}
A_0' \arrow[r] & A_\infty'^{\Gamma} \arrow[r] & R_\infty' \arrow[r] & 0 \\
A_0' \arrow[r] \arrow[u, equal] & A_n'^{\Gamma} \arrow[r, "\varphi_n"] \arrow[u, "i_{n,\infty}"] & R_n' \arrow[r] \arrow[u, "\text{infl.}"] & 0
\end{tikzcd}$$

case I の場合は、この可換図式と $R_n' = \mathrm{Ker}(R_n' \longrightarrow R_\infty')$ から明らか。case II の場合は、$n \gg 0$ のとき

$$\varphi_n^{-1}(\mathrm{Ker}(R_n' \longrightarrow R_\infty')) \cong \mathrm{Im}(H^0(k_n/k, A_n') \longrightarrow H^1(k_n/k, D_n))$$

となることに気をつけて可換図式を見ればよい。 ▨

§3　岩澤主予想との関連

まず、結果を述べることにする。

<u>定理 3</u>

$k/\mathbb{Q}$: 実 abel 拡大、p は $[k:\mathbb{Q}]$ を割らない奇素数

$\Delta := \mathrm{Gal}(k/\mathbb{Q})$ とする。ψ : $\mathbb{C}_p$ 上の Δ の 1 次指標に対して

$\Psi := \bigoplus_\sigma \psi^\sigma$　$\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p(\psi)/\mathbb{Q}_p)$ を定める。

$$\left\{ \begin{array}{l} \circ\ h_\Psi(T) := \prod_\sigma g_{\psi^\sigma}(T) \in \mathbb{Z}_p[T] \text{ が } \mathbb{Z}_p[T] \text{ 内で既約。} \\ \circ\ \text{ある } n \text{ に対して、} \varepsilon_\Psi H_n \neq 0 \end{array} \right.$$

$$\Longrightarrow \quad \lambda_p(k_\infty/k)_\Psi = 0$$

記号　$\Lambda := \mathbb{Z}_p[[T]]$．$\mathbb{Q}_p(\psi) := \mathbb{Q}_p$ に ψ の値を添加した体

ε_Ψ：Ψ に対する巾等元 $\in \mathbb{Z}_p[\Delta]$ で，上記の加群は自然に $\mathbb{Z}_p[\Delta]$ -加群となる。Ψ は $\mathbb{Q}_p$ 上の Δ の既約指標となることに注意。

ψ'：ψ に対応する $\mathbb{C}_p$-値 primitive even Dirichlet 指標．（ψ'^σ：$\sigma \in Gal(\mathbb{Q}_p(\psi)/\mathbb{Q}_p)$ をわたる。）

$g_\psi(T)$：p 進 L 関数 $L_p(s, \psi)$ から構成される distinguished polynomial $\in \Lambda[\psi]$（Λ に ψ の値を添加した環）

$\lambda_p(k_\infty/k)_\Psi$：定理 0 において，$A_n$ のかわりに $\varepsilon_\Psi A_n$ とおいたときの λ の値。

この定理では，岩澤主予想から得られる情報を用いるため，まず主予想から説明する。

<u>定理（岩澤主予想）</u> Greenberg[7] における formulation

$\mathbb{C}_p := \widehat{\overline{\mathbb{Q}}}_p$，$q = \begin{cases} p & p:\text{odd} \\ p^2 & p = 2 \end{cases}$

ψ：$\mathbb{C}_p$ に値をもつ primitive Dirichlet 指標で even（$\psi(-1) = 1$）かつ first kind（conductor が $p \cdot q$ で割れない。）

$k_\psi/\mathbb{Q}$：ψ に対応する abel 拡大。

γ_0：$Gal(k_{\psi,\infty}/k_\psi)$ の位相生成元を 1 つ fix.

κ_0：$\zeta^{\gamma_0} = \zeta^{\kappa_0}$　${}^\forall\zeta \in \mu_{p^\infty}$　$\kappa_0 \in \mathbb{Z}_p^\times$

。$f_\psi(T)$ の構成

M：$k_{\psi,\infty}$ 上最大 p, ∞ の外不分岐 abel p-拡大

$W := Gal(M/k_{\psi,\infty}) \otimes \mathbb{C}_p$. $Gal(k_{\psi,\infty}/\mathbb{Q})$ の有限次元表現空間

$\left(\begin{array}{l} g \in Gal(k_{\psi,\infty}/\mathbb{Q}),\ x \in Gal(M/k_{\psi,\infty}) \text{ に対し}, \ x^g = \tilde{g}\, x\, \tilde{g}^{-1} \\ \tilde{g} \text{ は } g \text{ の } Gal(M/\mathbb{Q}) \text{ への延長}. \end{array} \right)$

$W_\psi := \{ w \in W \mid s(w) = \psi(s) \cdot w \quad {}^\forall s \in Gal(k_\psi/\mathbb{Q}) \}$

$\underline{f(T)}$: $\kappa_0 - 1$ の W_ψ への作用の特性多項式

・$g_\psi(T)$ の構成　（岩澤[10]より）

p 進 L 関数（久保田 - Leopoldt によって得られた。）

$L_p(s, \psi)$: $s \in \mathbb{Z}_p$（$\psi = 1$ のときは $s = 1$ を除く。）

$\mathbb{C}_p$ に値をとる連続関数

s.t. $L_p(1-n, \psi) = L(1-n, \psi\omega^{-n})\,(1 - \psi\omega^{-n}(p)p^{n-1})$

${}^\forall n \geq 1$　ω : Teichmuller 指標

ここで $L_p(1-s, \psi) = \dfrac{G_\psi(\kappa_0^s - 1)}{(\kappa_0^s - 1)^\delta}$　$\delta = \begin{cases} 0 & \psi \neq 1 \\ 1 & \psi = 1 \end{cases}$　となる

$G_\psi(T) \in \Lambda[\psi]$ があって、p 進 Weierstrass の準備定理から

$G_\psi(T) = 2\, \pi^{\mu_\psi} \underline{g_\psi(T)} \cdot U_\psi(T)$　とかける。

π : $\mathbb{Z}_p[\psi]$ の極大 ideal の生成元. $U_\psi(T) \in \Lambda[\psi]^\times$

$g_\psi(T)$: distinguished polynomial $\in \mathbb{Z}_p[\psi][T]$

☆ 主予想　　$f_\psi(T) = g_\psi(T)$

注意　上の予想は最終的に、より一般に Wiles [15] において証明されている。（F : 総実代数体. Deligne - Ribet による p 進 L 関数, p : odd ）

定理3の証明のあらすじ

$Y := Gal(M/k_\infty)$ とすると、Y は non-trivial finite Λ-submodule を持たない。（岩澤[11] Th.18） また $k/\mathbb{Q}$：アーベル拡大なので $\mu=0$ がいえている。(Ferrero-Washington [2]) ゆえに $\varepsilon_\Phi Y \hookrightarrow \bigoplus_{i=1}^{s} \Lambda/(f_{\Phi,i}(T))$, $f_{\Phi,i}(T)$: disting. polyn. (reflection, $p\neq 2$) ここで T を M/k_∞ における p 上の素ideal の惰性群をあわせたものとする。もし $\varepsilon_\Phi T$ が trivial であったとすると、$^\exists Z \subset \varepsilon_\Phi Y$ (finite index) に対して
$\varepsilon_\Phi A_m \cong \varepsilon_\Phi Y/\nu_{m,e} Z \quad m \gg e$, $\nu_{m,e} = \dfrac{(1+T)^{p^m}-1}{(1+T)^{p^e}-1}$ （岩澤[11] Th.6）
$\varepsilon_\Phi Y \hookrightarrow \bigoplus \Lambda/(f_{\Phi,i}(T))$ だから、$\varepsilon_\Phi H_m = 0$ となってしまう。実はこの場合、$H_n \neq 0 \Rightarrow H_m \neq 0 \ \ ^\forall m \geq n$（岩澤[13]）となるから、$\varepsilon_\Phi T = 0$ と $\varepsilon_\Phi H_n \neq 0$ とは両立しないことが分かる。
$\varepsilon_\Phi T \neq 0$ ならば、$\prod_{i=1}^{s} f_{\Phi,i}(T) = h_\Phi(T)$（岩澤主予想）が既約であるから、$\varepsilon_\Phi(Y/T)$：有限。故に $\lambda_p(k_\infty/k)_\Phi = 0$ ▨

証明内の M は、k_∞ 上最大 p の外不分岐 abel p-拡大。
Y は non-trivial とした。

§4. 実二次体の場合

今まで述べてきたことを実二次体で見てみる。

k を実二次体（素数次ガロア拡大でも可）とすると、全ての素数 p に対して定理1又は定理2が適用され得る。($p=2$ の

ときは体を取り換える必要性がでてくることがある。)

簡単のため、p : odd ($p=2$ でも同様) としておく。

<u>定理 1</u> k : 実二次体、p が不分解のとき

$$GC(k, p) \iff A_0' = H_0'$$

<u>定理 2</u> k : 実二次体、p が分解するとき

$$GC(k, p) \iff \begin{cases} A_0' = H_0' \\ |A_n'^{\Gamma}| > |A_n'^{\Gamma}/D_n| & n \gg 0 \\ A_n'^{\Gamma} : \text{cyclic} & n \gg 0 \end{cases}$$

証明 (§2 参考)

定理1は、§2と同じ。定理2は、$\mathfrak{p}_n, \mathfrak{p}_n'$ を k_n における p 上の素 ideal とすると、$D_n = \langle Cl_n(\mathfrak{p}_n), Cl_n(\mathfrak{p}_n') \rangle \cap A_n$ であり、$\mathfrak{p}_n \mathfrak{p}_n'$ は単項だから、D_n は cyclic になることを気をつければよい。(上の条件は意味が分かり易いよう類群の言葉で書き換えている。3つの条件にはそれぞれ関連がある。) ▨

ψ : k に対応する primitive な Dirichlet 指標とすると、

<u>定理 3</u> k : 実二次体

$$\begin{cases} \circ\ g_\psi(T) \text{ が } \mathbb{Z}_p[T] \text{ 内で既約。} \\ \circ\ \text{ある } n \text{ に対して、} H_n \neq 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad GC(k, p)$$

証明 (§3 参考)

ψ^0-part は、trivial になることに気をつける。 ▨

定理2で、$A_n'^{\Gamma}$、A_n^{Γ} が non-cyclic となる場合としては、A_n'、A_n が Γ-moduleとしてsplitするときがある。そこで、A_n' A_nではないが、$Gal(M/k_\infty)$がsplitしないような状況を考えて得られたのが定理3である。

定理3の条件にあてはまらない一般的な状況において、予想の正否はどうなっているのだろうか。$A_n'^{\Gamma}$, A_n^{Γ} が non-cyclic $n \gg 0$ となる場合はないのだろうか。

このことから、そして一般的な興味からも、$g_\nu(T)$の性質を調べることは重要なことであると思う。

最後に実験結果を載せておく。

◦ $p=2$ $k=\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ $m<50000$ m: square free

$m \equiv 1 \pmod 8$ (case II) 5061例

$r=0$の判定で $\dfrac{3618}{5061}$ (約7割) が成立

$r=1$の判定で $\dfrac{4145}{5061}$ (約8割) が成立

判定法 $A_n'^{\Gamma} \supset A_n^{\Gamma}/D_n$ から $|D_n| \geq |A_n^{\Gamma}|/|A_n'^{\Gamma}|$. Greenbergの必要十分条件から $|A_n^{\Gamma}| = |D_n|$ がいえればよい。$|A_n'^{\Gamma}|, |A_n^{\Gamma}|$ については、genus formula から k_ν の p-単数群を計算することによって得られる。(参考 福田-小松[3], 福田-小松-和田[4], 福田[5], 田谷[14])

$A_n'^{\Gamma} \neq 0$ となる中で、$H_n \neq 0$ が、k_1の情報から少なくともいえているもの $\dfrac{1166}{1443}$ (約8割)

参考文献

[1] Brumer, On the units of algebraic number fields, Mathematika 14 (1967), 121-124

[2] Ferrero-Washington, The Iwasawa invariant μ_p vanishes for abelian number fields, Ann. of Math. 109 (1979), 377-395

[3] 福田-小松, On $\mathbb{Z}_p$-extensions of real quadratic fields, J. Math. Soc. Japan 38 (1986), 95-102

[4] 福田-小松-和田, A Remark on the λ-invariant of Real Quadratic Fields, Proc. Japan Acad. 62 Ser. A (1986), 318-319

[5] 福田, Iwasawa's λ-invariants of Certain Real Quadratic Fields, Proc. Japan Acad. 65 Ser. A (1989), 260-262

[6] Greenberg, On Iwasawa invariants of totally real number fields, Amer. J. Math. 98 (1976), 263-284

[7] Greenberg, On p-adic L-function and cyclotomic fields II, Nagoya Math. J. 67 (1977), 139-158

[8] 岩澤, A note on class numbers of algebraic number fields, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 20 (1956), 257-258

[9] 岩澤, On Γ-extensions of algebraic number fields, Bull. Amer. Math. Soc. 65 (1959), 183-226

[10] 岩澤, Lectures on p-adic L-functions, Ann. of Math. Studies 74 Princeton Univ. Press N.J. 1972

[11] 岩澤, On $\mathbb{Z}_\ell$-extensions of algebraic number fields, Ann. of Math (2) 98 (1973), 246-326

[12] 岩澤, On cohomology groups of units for $\mathbb{Z}_p$-extensions, Amer. J. Math. 105 (1983), 189-200

[13] 岩澤, Greenberg予想に関する講演 (unpublished)

[14] 田谷, On the Iwasawa λ-Invariants of Real Quadratic Fields, to appear in Tokyo J. of Math.

[15] Wiles, The Iwasawa conjecture for totally real fields, Ann. of Math. 131 (1990), 493-540