数理解析研究所講究録
第 844 巻 1993 年 154-171

類数 1 の虚 Abel 体の決定

防衛大　山村　健　(Ken Yamamura)

類数 1 の虚 Abel 体をすべて決定したことを報告する。決定したといっても大まかな部分はすでに Uchida(東北大の内田興二先生) によりなされており、私がしたのはほとんど computer による計算に過ぎない。ここでは最初に簡単に歴史に触れ、それから結果と関連する事柄を expository な形で述べる。なお、紙数の制限のため、一般的な記号については説明を省くことがある。

1 歴史

虚 Abel 体の類数問題は虚 2 次体の類数問題から派生したといってよいと思う。そこでまず、虚 2 次体について述べる。Gauss は類数 1 の虚 2 次体はちょうど 9 個であると予想した。Heilbronn は 1934 年に

$$h(-D) = h(\mathbf{Q}(\sqrt{-D})) \to \infty \quad (D \to \infty)$$

を示した。したがって、類数が一定数以下の虚 2 次体は高々有限個しか存在しない。Siegel は 1935 年に $h(-D)$ のより正確な asymptotic formula を証明した：

$$\log h(-D) \sim \log D \quad (D \to \infty).$$

これを一般の代数体に拡張したのが Brauer である。彼は 1950 年に

$$\log h_K R_K \sim \log D_K \quad (\frac{[K:\mathbf{Q}]}{\log D_K} \to 0)$$

を証明した。ここで、Kは上の条件をみたす $\mathbf{Q}$ の Galois 拡大を動くか、あるいは次数が一定以下の体を動く。ここで注意すべきことは、この Brauer-Siegel の定理は effective ではなく、そのため決定問題には役に立たないということである。Gauss の予想は 1967 年に Baker と Stark によって独

立に証明された。また、彼等は1971年に類数2の虚2次体を決定した。(18個)

虚2次体に関することを虚 Abel 体に拡張したのが Uchida で、彼は1971年から1972年にかけての一連の論文で、次のことを証明した。第一に、上の Heilbronn の結果に相当することを虚 Abel 体について証明した。その概略は、まず Brauer-Siegel の定理の応用として、Kが$\mathbf{Q}$上正規なCM-体のとき、

$$h^{-}(K) \to \infty \quad (\frac{[K:\mathbf{Q}]}{\log D_K} \to 0)$$

となることを示し、次にKが導手 $f(K)$ の Abel 体のとき、

$$\frac{[K:\mathbf{Q}]}{\log D_K} \to 0 \quad (f(K) \to \infty)$$

となることを示した。これらを合わせれば、Kが導手 $f(K)$ の虚 Abel 体のとき、

$$h^{-}(K) \to \infty \quad (f(K) \to \infty)$$

となり、(相対) 類数が一定数以下の虚 Abel 体は高々有限個しかないことがわかる。これについて、Uchida は L-函数の1での値の評価による別証明も与えており、それは2次と $(2,2)$ 型を除いて effective である。第二に、類数1の虚 Abel 体の導手の具体的な上界として、2×10^{10}を与えた。さらに、彼は (Baker-Stark の結果を用いて) 類数1の $(2,2,\cdots,2)$ 型の虚 Abel 体を決定した。

なお、Odlyzko は1975年[1]に、より一般に、類数が一定数以下のCM-体は高々有限個しかないことを Artin 予想 (あるいは一般 Riemann 予想) の下で証明した。

類数1の虚 Abel 体の決定問題について、大まかなところを述べると、Masley が1976年に類数1の全円分体を決定 (29個 ($\mathbf{Q}$を除く)) し、Uchida が1986年に類数1の2冪次虚 Abel 体を決定した。

2 結果

[1]講演の際に、Stark が1974年にと言ったのは、誤りでした。訂正して、お詫び致します。

定理. 類数1の虚 *Abel* 体はちょうど172個ある。(それらはすべて具体的に決定され、最後の表で与えられる。) そのうち導手が最も大きい体は $\mathbf{Q}(\sqrt{-67}, \sqrt{-163})$ で、$10921 = 67 \cdot 163$ である。

注意. これらの172個の体のうち、少なくとも135個は(一般 Riemann 予想が正しければ、少なくとも155個は)(自明でない)不分岐拡大を持たない。(残りの体についてはわかっていない。)[2]

以下、断わりのない限り、Kは(虚)Abel 体を表す。

3 概略

以下で述べることの概略を述べる。決定を行なうためには、computer による類数計算が避けられないが、如何に計算量を減らすかが一番重要である。そのために、まずKの型を限定する(§4)。次に、Kの相対類数 $h^-(K)$ の下からの評価について述べる(§5)。Uchida はこれをある条件下で、$|L(1,\chi)|(\chi:$偶指標$)$ の値の上からの評価に帰着させた。これには、Landau-Stark formula が用いられた。$|L(1,\chi)|(\chi:$偶指標$)$ の値の上からの評価については、Hua の結果と Moser の結果とを合わせたものを用いた。これらの評価には、Dedekind zeta の例外零点や指標和が深く関わっている。そこで、§6 で例外零点について知られていることを簡単にまとめる。$h^-(K)$ の計算については、算術的公式を挙げるにとどめる(§7)。$h^+(K)$ の計算と類数1の虚 Abel 体の多くは不分岐拡大を持たないことの確認は、root-discriminant の評価を用いてなされる。これについては §8,§9 で述べる。最後に§10 で、今後の課題等について述べる。

4 Kの型と決定の順序

まず、Kの類数が1ならば、Kの種数 $g(K)(=[K^*:K], K^*$は種の体、すなわち、Abel 体との合成によって得られるKの不分岐拡大のうち最大のもの$)$ は1である。$g(K)=1$ のためには、Kの指標群は素数冪導手の指標で生成される巡回群の直積に同型である:

$$X_K = \mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})\hat{} = \langle\chi_1\rangle \times \cdots \times \langle\chi_r\rangle \quad (\chi_i\text{の導手は素数冪})$$

[2] 私がこの決定問題を解決しようと思ったきっかけは不分岐拡大を持たない代数体の例を多く作ろうと思ったからである。

ことが必要十分であり、また体の言葉で言うと、これはKは素数冪導手のAbel 体の合成である：

$$K = K_1 \cdots K_t \quad (K_i\text{の導手は素数冪})$$

ことと同値である。したがって、このような体のみを考えればよい。上で、r およびtを最小に取ると、t はKの導手の素因数の個数となり、

$$r = \begin{cases} t+1 & (K \supset \mathbf{Q}(\zeta_8)) \\ t & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

となる。

次に、F がKの種数1の部分体のとき、F の（狭義の）類数はKの類数を割り切る。なぜなら、$g(F) = 1$ ならば、F の（狭義の）絶対類体$H(F)$ と KとがF 上線形無関連でなければならず、$H(F)K$はKの$h(F)$次不分岐拡大となるからである。したがって、Kの類数が1ならば、その種数1の虚部分体はすべて類数1の虚 Abel 体である。

結局、種数1でかつ、その任意の種数1の虚部分体はすべて類数が1の体のみを考えればよい。また、r が小さい順に、指標群が小さい順に決定していけばよい。基本的なのは、Kの導手が素数冪の場合、および$r = 2, \mathrm{ord}\chi_1 = 2$ 冪, $\mathrm{ord}\chi_2 =$ 素数の場合の2つの場合で、残りの場合については指標群がより小さい場合から容易に可能性をしぼることができる。例えば、$r = 3$ の場合に、χ_1を奇指標にとっておけば、X_Kの部分群$\langle \chi_1, \chi_2 \rangle$ および、$\langle \chi_1, \chi_3 \rangle$ に対応するKの部分体は類数1の虚 Abel 体であるから、$r = 2$ の場合からχ_1, χ_2, χ_3の導手の取り得る値が限定される。

5 Kの相対類数$h^-(K)$の下からの評価

一般に、CM-体Kの類数$h(K)$はその最大実部分体K^+の類数$h(K^+) = h^+(K)$ で割り切れ、その商$h^-(K)$ をKの相対類数という。$h^-(K)$ については解析的類数公式が知られており、特に、Kが虚 Abel 体のときは、Kの Dedekind zeta 函数が、Riemann zeta といくつかのL-函数との積で書けることから、次のようになる：

$$h^-(K) = \frac{Qw}{(2\pi)^{(n/2)}} \sqrt{\frac{D_K}{D_{K^+}}} \prod_{\chi:\mathrm{odd}} L(1, \chi).$$

ここで、n は Kの次数、$Q = [E_K : W_K E_{K^+}](= 1 \text{ or } 2)$ は Hasse の unit index で、$w = \# W_K$は Kに含まれる 1 の冪根の個数である。また、D_K (あるいは D_{K^+}) は K(あるいは K^+) の判別式の絶対値である。

Uchida は種数 1 の虚 Abel 体 Kについて、Hasse の unit index を計算するための規準を与えた：

命題. (Uchida[8]) *Kが種数 1 の虚 Abel 体：$K = K_1 \cdots K_t$ (K_i の導手は素数冪で、2 つずつ互いに素) のとき、Kの Hasse の unit index が 1 であるための必要十分条件は、ちょうど 1 つの K_i が虚であることである。*

一般に、$|L(1,\chi)|$ の値を下から評価することは難しい。今、$L_1(s)(L_0(s))$ で X_Kの奇指標（自明でない偶指標）に付随する L-函数の積を表す：

$$L_1(s) = \prod_{\chi:\text{odd}} L(s,\chi), \quad L_0(s) = \prod_{\substack{\chi:\text{even} \\ \chi\neq 1}} L(s,\chi).$$

Uchida は $L_1(1)$ の下からの評価を $L_0(s)$ のある s での値の上からの評価に帰着させた：

命題. (Uchida[8]) $[K:\mathbf{Q}] \geqq 4$ かつ $L_1(s)$ が例外零点を持たないとき、

$$L_1(1) \geqq \begin{cases} \{9.3 L_0(s_0) \log D_K\}^{-1} & (\zeta_K(s) \text{ が例外零点を持つとき}) \\ \{9.3 L_0(1) \log D_K\}^{-1} & (\zeta_K(s) \text{ が例外零点を持たないとき}) \end{cases}$$

ここで、$s_0 = 1 + (1.2 \log D_K)^{-1}$であり、$\rho$ が$\zeta_K(s)$ の例外零点であるとは、ρ が $1 - 32/(105 \log D_K) < \rho < 1$ なる実零点であることをいう。[3]

これは Landau-Stark formula（下の補題）を用いて証明される。類数 1 の虚 Abel 体 Kについては、$\zeta_K(s)$ は例外零点を持たないことがわかる（後述）ので、結局 Kの相対類数の下からの評価は偶指標に関する $|L(1,\chi)|$ の値の上からの評価に帰着する。これについては Hua の結果と Moser の結果とを検討すれば、次が得られる：

命題. *χ が導手 f の自明でない偶指標のとき、*

$$|L(1,\chi)| < \frac{1}{2}\log f + \gamma - \frac{1}{2}.$$

ただし、γ は Euler の定数である：$\gamma = 0.577\cdots$.

これは指標和による L-函数の表現および、指標和の Gauss の和を用いた評価によって証明される。

---

[3]Uchida の論文における例外零点の定義はこのように書き直されるべきである。

補題. (Landau-Stark[7]) $f(s)$ を整函数で、ある実数 $\alpha > 0, a, b, c \geqq 0$ に対して、

$$g(s) = \alpha^{s/2}\Gamma(s)^a\Gamma(s/2)^b\Gamma((s+1)/2)^c$$

が函数等式

$$g(1-s) = g(s)$$

を満たす整関数となるようなものとする。このとき、

$$\begin{aligned}(*)\ \frac{g'}{g}(s) &= \sum_{\substack{\rho:g(\rho)=0\\ 0<\Re\rho<1}} \frac{1}{s-\rho}\\ &= \frac{1}{2}\log\alpha + a\psi(s) + \frac{b}{2}\psi(s/2) + \frac{c}{2}\psi((s+1)/2) + \frac{f'}{f}(s)\end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、$\psi(s) = \Gamma'(s)/\Gamma(s)$ である。

これは Hadamard の積公式と函数等式から容易に証明される。この補題で、$f(s) = s(s-1)\zeta_K(s), L(s,\chi)$ などとすることにより、$\zeta_K(s)$ の 1 での留数、$L(1,\chi), D_K$ などの評価が得られる。

6 例外零点 (exceptional zero) について知られていること

ここで、Dedekind zeta の例外零点について知られていることをまとめておく。Dedekind zeta の例外零点についての明確な定義はないように思われる。Dedekind zeta の critical strip 内の零点はすべて直線$\Re(s) = 1/2$ 上にあるというのが一般化された Riemann 予想 (GRH) であるが、一般の代数体については critical strip 内の 1 に近い零点がないことさえまだ証明されていない。不明確な表現であるが、Dedekind zeta の例外零点とは、このような critical strip 内の 1 に近い零点のことである。Dedekind zeta のこのような零点についてはまず次のことが知られている。

命題. (Stark[7]) Kを有限次代数体とするとき、$\zeta_K(s)$ は

$$1-(4\log D_K)^{-1} \leqq \Re\rho < 1,\ |\Im\rho| < (4\log D_K)^{-1}$$

なる零点ρを高々 1 つしか持たない。また、もしこのような零点が存在したとしてもそれは単純零点である。

したがって、実軸上 0 と 1 の間の 1 に近い単純零点が問題になるが、これについては次のことが知られている。

定理. (Heilbronn) K/kを有限次代数体の有限次 *Galois* 拡大とする。もし、$\zeta_K(s)$ が *(critical strip* 内に*)* 実単純零点を持てば、それは $\zeta_{k_2}(s)$ または $\zeta_k(s)$ の零点である。ここで、k_2 は K/kの２次中間拡大体である。(k_2 は存在しないかもしれない。)

したがって、Abel 体 Kの Dedekind zeta $\zeta_K(s)$ が例外零点を持てば、それはKの２次部分体に付随する L-函数の例外零点（いわゆる Siegel の零点）である。特に、Kが２次部分体を持たなければ、$\zeta_K(s)$ は例外零点を持たない。ただし、これは Heilbronn の定理によらなくとも、$\zeta_K(s)$ の分解：

$$\zeta_K(s) = \zeta(s) \prod_{\chi:\mathrm{quad.}} L(s,\chi) \prod_{\substack{\{\chi,\overline{\chi}\} \\ \chi:\mathrm{non-quad.}}} L(s,\chi)\overline{L(s,\chi)} \ (s \in \boldsymbol{R})$$

からわかる。(Riemann zeta $\zeta(s)$ は正の実零点を持たないことに注意。)

結局、虚 Abel 体の類数問題における、本質的な困難は２次体にある。２次体に付随する L-函数の例外零点（いわゆる Siegel の零点）の存在の可能性を否定できないため、類数の下からの良い評価が得られないのである。

２次体に付随する L-函数の例外零点については、次のようなことがわかっている：

定理. (Rosser[6]) χ を導手 f の自明でない実 *Dirichlet* 指標とする。$f \leqq 227$ ならば、$L(s,\chi)$ は正の実零点を持たない。

定理. (Low[3]) χ を判別式$-d$ の虚２次体に付随する *Dirichlet* 指標とする。$d < 593,000$ ならば、$s > 0$ に対して、$L(s,\chi) > 0$.

２次体に付随する Dirichlet 指標χについては、例外零点を持たないということよりも強く、$s > 0$ に対して、$L(s,\chi) > 0$ と予想されている。なお、Chowla は２次指標χについて、$L(s,\chi) > 0$ $(s > 0)$ を判定するための簡単な規準を与えた：

定理. (Chowla[1]) χ を２次の *Dirichlet* 指標とする。また、$S_m(x)$ でχについての第 m 指標和を表す：

$$S_1(x) = \sum_{n \leqq x} \chi(n), \ S_m(x) = \sum_{n \leqq x} S_{m-1}(n) \ (m \geqq 2).$$

このとき、すべての自然数n に対して $S_m(n) \geqq 0$ となる m が存在すれば、

$$L(s,\chi) > 0 \ (s > 0).$$

この定理は L-函数の指標和による表現：

$$\begin{aligned} L(s,\chi) &= \sum_{s=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} S_1(n)\{\frac{1}{n^s}-\frac{1}{(n+1)^s}\} \\ &= \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} S_m(n)\sum_{t=0}^{m}(-1)^t\binom{m}{t}\frac{1}{(n+t)^s} \end{aligned}$$

からわかる。($\sum_{t=0}^{m}(-1)^t\binom{m}{t}\frac{1}{(n+t)^s}>0$ であることは容易にわかる。)

この定理を用いれば、導手が小さいいくつかの指標 χ については、$L(s,\chi)>0$ $(s>0)$ を computer を用いて簡単に確かめることができる。私はこの定理と Uchida の類数 1 の 2 冪次虚 Abel 体の決定の結果を用いて、類数 1 の虚 Abel 体 K について、$\zeta_K(K)$ は例外零点を持たないことを確かめた。

なお、Heilbronn は、すべての自然数 m に対して、$S_m(n)<0$ となる n が存在するような、2 次の Dirichlet 指標 χ が無数に存在することを証明した。そこで、このような χ については、適当な素数の有限集合 T について、χ の代わりに、指標

$$\chi_T(n) = \begin{cases} \chi(n) & ((n,\prod_{p\in T}p)=1 \quad \text{のとき}) \\ 0 & ((n,\prod_{p\in T}p)>1 \quad \text{のとき}) \end{cases}$$

について指標和を考えれば、$L(s,\chi)>0$ $(s>0)$ が証明できるのではないかと考えられている。

7 K の相対類数 $h^-(K)$ の計算

K の相対類数 $h^-(K)$ の計算は次の arithmetic formula:

$$\begin{aligned} h^-(K) &= Qw\prod_{\chi:\mathrm{odd}}(-\frac{1}{2}B_{1,\chi}) \\ &= Qw\prod_{\chi:\mathrm{odd}}(-\frac{1}{2f_\chi}\sum_{a=1}^{f_\chi}\chi(a)a) \end{aligned}$$

により、computer を用いて計算した。なお、K の導手が素数冪でない場合には、Hasse による上の公式の簡易化がある。また、K がある種の体のときには、その相対類数がいくつかの部分体の相対類数の積になることも上の公式からわかる。

8 Kの最大実部分体の類数 $h^+(K)$ の計算

一般に、実 Abel 体の類数の計算は、基本単数の計算が関係しており、容易ではない。しかし、導手が小さいものについては、類数計算が root-discriminant の評価を用いることによりかなり簡単になる。(これは、実 Abel 体に限らず、root-discriminant が小さい体に当てはまる。次節の補題参照。) この idea は古くからあったと思われるが、(多くの) 実 Abel 体の類数の計算に最初に採用したのは Masley である。

9 Unramified-closed fields

有限次代数体が (自明でない) 不分岐拡大を持たないとき、その体は unramified-closed であるということにする。root-discriminant が十分小さい代数体は unramified-closed であることが容易にわかる。これから類数 1 の虚 Abel 体の多くは unramified-closed であることが root-discriminant の計算によって、容易に確かめられる。ここでは、まずこのことについて説明し、関連する問題について述べる。以下の補題を用いる。

補題. 位数 60 未満の有限群は可解。(位数 60 の 5 次交代群 A_5 は非可解。)

この補題は有名である。

補題. 有限次代数体の有限次拡大 L/K がすべての有限素点で不分岐ならば、L と K の *root-discriminant* は一致する：

$$rd_L = rd_K (= D_K^{1/[K:\mathbf{Q}]}).$$

この補題は判別式の連鎖律からただちにしたがう。

補題. n を自然数とし、r_1, r_2 を $r_1+2r_2 = n$ なる負でない整数とする。L が n 次以上の有限次代数体で、その実素点および虚素点の個数 $r_1(L), r_2(L)$ の絶対次数 n_L に対する比が、それぞれ r_1/n および r_2/n であるようなものを動くときの L の *root-discriminant* の下限を $B(n, r_1, r_2)$ で表す：

$$B(n, r_1, r_2) = \inf\{rd_L \mid n_L = [L, \mathbf{Q}] \geq n,\ r_i(L)/n_L = r_i/n\ \}.$$

Kを n_K 次の代数体とし、K_{ur} を K の最大不分岐 (*Galois*) 拡大とする。もし、$rd_K < B(h'n_K, h'r_1(K), h'r_2(K))$ ならば、$[K_{ur} : K] < h'$ である。したがって、このとき K の類数は h' より小さい。特に、$rd_K <$ $B(2n_K, 2r_1(K), 2r_2(K))$ ならば、K は *unramified-closed* であり、したが

って、このとき K の類数は 1 である。また、K の類数が 1 で、$rd_K < B(60n_K, 60r_1(K), 60r_2(K))$ ならば、K は *unramified-closed* である。

この補題は上の 2 つの補題を用いて、容易に示される。これは次の有名な事実の証明と同様である。

例. 類数 1 の虚 2 次体 K は不分岐拡大を持たない。

証明. もし K が不分岐 Galois 拡大 L を持てば、補題より

$$[L:\mathbf{Q}] \geqq 120, \ rd_L = rd_K \leqq \sqrt{163} = 12.7\cdots.$$

これは Odlyzko による評価 $B(120, 0, 60) \geqq 14.3$ に反する。

この例と同様にして、root-discriminant の計算によって、類数 1 の虚 Abel 体の多くは unramified-closed であることが確認できる。なお、類数 1 の虚 Abel 体の root-discriminant の計算は、次の補題と Hasse の conductor-discriminant formula を用いれば、簡単にできる。(類数 1（種数 1）の虚 Abel 体は判別式が 2 つずつ互いに素な素数冪導手の Abel 体の合成であることに注意。)

補題. K を 2 つの有限次代数体 E, F の合成体とする。E と F の判別式が互いに素ならば、

$$rd_K = rd_E rd_F.$$

当然、すべての類数 1 の虚 Abel 体が unramified-closed ではないか、またはより一般に、類数の小さい虚 Abel 体は非可解不分岐 Galois 拡大を持たないのではないかという疑問が生ずるが、残念ながら root-discriminant の評価（と類数計算）以外に有限次代数体が unramified-closed であることを判定する有効な手段は知られていない。なお、この問題について、以下のような虚 Abel 体の例がある。

例. 4 次体 $\mathbf{Q}(\sqrt{-67}, \sqrt{-163})$ の類数は 1 。この体の導手は 10921 で、root-discriminant は $\sqrt{10921} = 104.5\cdots$ であり、その値は類数 1 の虚 Abel 体の中でともに最大である。この体が unramified-closed であるか、あるいは非可解不分岐 Galois 拡大をもつかは現在のところ全く不明である。

この体より root-discriminant が小さく、非可解不分岐 Galois 拡大を持つ例、無限次不分岐拡大を持つ例が存在する：

例. 2 次体 $\mathbf{Q}(\sqrt{-4903})$ は不分岐 A_5-拡大を持つ。この体の類数は 27 で、導手は 4903、root-discriminant は $\sqrt{4903} = 70.02\cdots$ である。

例. 2次体 $\mathbf{Q}(\sqrt{-5})$ と $\mathbf{Q}(\zeta_{73})$ の3次部分体の合成体は不分岐 A_5-拡大を持つ。この体の類数は254で、導手は1440、root-discriminant は $2 \cdot 5^{1/2} \cdot 7^{2/3} = 78.11\cdots$ である。

例. (Martinet) 10次体 $\mathbf{Q}(\sqrt{-46}, \cos\frac{2\pi}{11})$ の類体塔は無限である。この体の導手は2024で、root-discriminant は $2^{3/2} \cdot 11^{4/5} \cdot 23^{1/2} = 92.36\cdots$ である。

なお、類数1の実2次体で非可解不分岐 Galois 拡大を持つものは数多く（私の予想では無数に）存在する。文献にない型の例を挙げておく。

例. 実2次体 $\mathbf{Q}(\sqrt{1810969})$ は（狭義の）類数が1で、不分岐 $A_5 \times A_5$-拡大を持つ。

例. 実2次体 $\mathbf{Q}(\sqrt{483345053})$ は（狭義の）類数が1で、不分岐 A_8-拡大を持つ。

例. 実2次体 $\mathbf{Q}(\sqrt{30861161})$ は（狭義の）類数が1で、（無限素点は分岐する）不分岐 A_9-拡大を持つ。

例. 実2次体 $\mathbf{Q}(\sqrt{2081741381})$ は（狭義の）類数が1で、（無限素点は分岐する）不分岐 A_{10}-拡大を持つ。

10　今後の課題

類数の小さい虚 Abel 体の決定問題は今後も扱われると思う。決定自体にはさほど意味があるとは思われないが、そのためになされる（相対）類数の評価の改良に意味がある。また、類群の指数が一定数以下の虚 Abel 体は高々有限個しか存在しないと予想されるが、これは虚2次体に限定しても、指数が2冪のものを除いては、L-函数に関する拡張された Riemann 予想の仮定無しでは証明されていない。この問題の難しさは、類数とは異なり、類群の指数については、Dedekind zeta の $s=1$ での留数等の解析的な量との関係が見出されていないことにあると言えるだろう。このような関係が見出されると大きな進歩がもたらされることは間違いない。問題としては、より一般に、類群の指数が一定数以下のCM-体は高々有限個しか存在しないであろうかということが考えられる。また、Sprindžuk の結果に、（ある種の密度の意味で）ほとんどすべての代数体の類数は大

きいというのがあるが、これをほとんどすべての代数体の類群の指数は大きいというように拡張できないだろうかという問題も考えられる。

この方面で、最近最も成果をあげているのは S.Louboutin であろう。彼は類数1の虚 Abel 体の決定、CM-体の相対類数の下からの評価の改良、$|L(1,\chi)|$ の値の上からの評価の改良、類群の指数が2の虚4次巡回拡大体の決定などをしており、彼の結果を用いれば、私が行った計算の量はかなり減らすことができる。彼の結果のうち、$|L(1,\chi)|$ の値の上からの評価を紹介しておく：

命題. (Louboutin[2]) χ を導手 f の自明でない原始的偶 *Dirichlet* 指標とする。このとき、

$$|L(1,\chi)| \leqq \frac{1}{2}\log f + \frac{2+\gamma-\log 4\pi}{2}.$$

さらに、f が偶数であると仮定すると、

$$|L(1,\chi)| \leqq \frac{1}{4}\log f + \frac{2+\gamma-\log \pi}{2}.$$

なお、$(2+\gamma-\log 4\pi)/2 = 0.023\cdots$ かつ $(2+\gamma-\log\pi)/2 = 0.358\cdots$ である。

なお本稿では、類数計算については、ごく簡単に触れただけであったが、Abel 体、またはCM-体の類数あるいは類群の構造を computer で簡単に求められる algorithm の開発もされることが望ましい。

数表の説明。類数1の各虚 Abel 体は、その次数 $n=[K:\mathbf{Q}]$, 指標群の型、導手 f, root-discriminant rd 等で与えられる。

指標群の型で、“$*$”は生成元が奇指標であることを表す。

生成元で、χ_4 は導手4、位数2の（ただ1つの）原始的 Dirichlet 指標を表す。奇素数 p について、χ_p は導手 p, 位数 $p-1$ の原始的 Dirichlet 指標を表す。素数冪 $q=p^m(\neq 4)$ について、ψ_q は導手 q, 位数 p^{m-1} または 2^{m-2} の原始的 Dirichlet 偶指標を表す。

UCの欄で、Yは体が unramified-closed であることを表す。Yに括弧がついているときは一般 Riemann 予想を仮定している。

参考文献

[1] S. Chowla, *Note on Dirichlet's L-functions*, Acta Arith. **1**(1936), 113–114.

[2] S. Louboutin, *Majorations explicites des* $|L(1,\chi)|$, C. R. Acad. Sci. Paris, **316**(1993), 11-14.

[3] M. E. Low, *Real zeros of the Dedekind zeta function of an imaginary quadratic field*, Acta Arith. **14**(1968), 117-140.

[4] J. M. Masley, *Class numbers of real cyclic number fields with small conductor*, Compositio Math. **37**(1978), 297–319.

[5] A. M. Odlyzko, *Bounds for discriminants and related estimates for class numbers, regulators and zeros of zeta functions : a survey of recent works*, Séminaire de Théorie des Nombres, Bordeux **2**(1990), 119-141.

[6] J. B. Rosser, *Real zeros of Dirichlet L-series*, J. Res Nat Bur. Standards Sect. B **45**(1950), 505–514.

[7] H. M. Stark, *Some effective cases of the Brauer-Siegel theorem*, Invent. Math. **23**(1974), 135-152.

[8] K. Uchida, *Imaginary abelian number fields of degree* 2^m *with class number one, Class numbers and fundamental units of algebraic number fields,* Proc. Int. Conf. Katata/Jap., 1986, 151-170.
(Correction in Zbl. Math. **612**(1987) o12011)

[9] L. C. Washington, Introduction to Cyclotomic Fields, Graduate Text in Mathematics 83, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1980.

[10] K. Yamamura, *The determination of the imaginary abelian number fields with class number one*, submitted to *Math. Comp.*.

Table of the imaginary abelian number fields with class number one.

n	Type	Generators	f	rd	Simple expression	UC
		χ_3	3	1.73	$\mathbf{Q}(\sqrt{-3})$	Y
		χ_4	4	2.00	$\mathbf{Q}(\sqrt{-1})$	Y
		χ_7^3	7	2.64	$\mathbf{Q}(\sqrt{-7})$	Y
		$\chi_4\psi_8$	8	2.82	$\mathbf{Q}(\sqrt{-2})$	Y
2	2^*	χ_{11}^5	11	3.31	$\mathbf{Q}(\sqrt{-11})$	Y
		χ_{19}^9	19	4.35	$\mathbf{Q}(\sqrt{-19})$	Y
		χ_{43}^{21}	43	6.55	$\mathbf{Q}(\sqrt{-43})$	Y
		χ_{67}^{33}	67	8.18	$\mathbf{Q}(\sqrt{-67})$	Y
		χ_{163}^{81}	163	12.76	$\mathbf{Q}(\sqrt{-163})$	Y
		χ_5	5	3.43	$\mathbf{Q}(\zeta_5)$	Y
		χ_{13}^3	13	6.84	$\mathbf{Q}(\sqrt{-(13+2\sqrt{13})})$	Y
		$\chi_4\psi_{16}$	16	6.72	$\mathbf{Q}(\sqrt{-(2+\sqrt{2})})$	Y
	4^*	χ_{29}^7	29	12.49	$\mathbf{Q}(\sqrt{-(29+2\sqrt{29})})$	Y
		χ_{37}^9	37	15.00	$\mathbf{Q}(\sqrt{-(37+6\sqrt{37})})$	Y
		χ_{53}^{13}	53	19.64	$\mathbf{Q}(\sqrt{-(53+2\sqrt{53})})$	(Y)
		χ_{61}^{15}	61	21.82	$\mathbf{Q}(\sqrt{-(61+6\sqrt{61})})$	(Y)
		χ_4, ψ_8	8	4.00	$\mathbf{Q}(\zeta_8)$	Y
		χ_3, χ_5^2	15	3.87	$\mathbf{Q}(\sqrt{-3}, \sqrt{5})$	Y
		χ_4, χ_5^2	20	4.47	$\mathbf{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt{5})$	Y
4		χ_3, ψ_8	24	4.89	$\mathbf{Q}(\sqrt{-3}, \sqrt{2})$	Y
		χ_7^3, χ_5^2	35	5.91	$\mathbf{Q}(\sqrt{-7}, \sqrt{5})$	Y
		$\chi_4\psi_8, \chi_5^2$	40	6.32	$\mathbf{Q}(\sqrt{-2}, \sqrt{5})$	Y
		χ_3, χ_{17}^8	51	7.14	$\mathbf{Q}(\sqrt{-3}, \sqrt{17})$	Y
	$(2^*, 2)$	χ_4, χ_{13}^6	52	7.21	$\mathbf{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt{13})$	Y
		χ_{11}^5, ψ_8	88	9.38	$\mathbf{Q}(\sqrt{-11}, \sqrt{2})$	Y
		χ_7^3, χ_{13}^6	91	9.53	$\mathbf{Q}(\sqrt{-7}, \sqrt{13})$	Y
		χ_3, χ_{41}^{20}	123	11.09	$\mathbf{Q}(\sqrt{-3}, \sqrt{41})$	Y
		χ_4, χ_{37}^{18}	148	12.16	$\mathbf{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt{37})$	Y
		χ_{11}^5, χ_{17}^8	187	13.67	$\mathbf{Q}(\sqrt{-11}, \sqrt{17})$	Y
		$\chi_4\psi_8, \chi_{29}^{14}$	232	15.23	$\mathbf{Q}(\sqrt{-2}, \sqrt{29})$	Y
		χ_3, χ_{89}^{44}	267	16.34	$\mathbf{Q}(\sqrt{-3}, \sqrt{89})$	Y
		χ_7^3, χ_{61}^{33}	427	20.66	$\mathbf{Q}(\sqrt{-7}, \sqrt{61})$	(Y)

Continued.

n	Type	Generators	f	rd	Simple expression	UC
		χ_3, χ_4	12	3.46	$\mathbf{Q}(\zeta_{12})$	Y
		χ_3, χ_7^3	21	4.58	$\mathbf{Q}(\sqrt{-3}, \sqrt{-7})$	Y
		$\chi_3, \chi_4\psi_8$	24	4.89	$\mathbf{Q}(\sqrt{-3}, \sqrt{-2})$	Y
		χ_4, χ_7^3	28	5.29	$\mathbf{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt{-7})$	Y
		χ_3, χ_{11}^5	33	5.74	$\mathbf{Q}(\sqrt{-3}, \sqrt{-11})$	Y
		χ_4, χ_{11}^5	44	6.63	$\mathbf{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt{-11})$	Y
		$\chi_7^3, \chi_4\psi_8$	56	7.48	$\mathbf{Q}(\sqrt{-7}, \sqrt{-2})$	Y
		χ_3, χ_{19}^9	57	7.54	$\mathbf{Q}(\sqrt{-3}, \sqrt{-19})$	Y
		χ_4, χ_{19}^9	76	8.71	$\mathbf{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt{-19})$	Y
		χ_7^3, χ_{11}^5	77	8.77	$\mathbf{Q}(\sqrt{-7}, \sqrt{-11})$	Y
		$\chi_4\psi_8, \chi_{11}^5$	88	9.38	$\mathbf{Q}(\sqrt{-2}, \sqrt{-11})$	Y
		χ_3, χ_{43}^{21}	129	11.35	$\mathbf{Q}(\sqrt{-3}, \sqrt{-43})$	Y
		χ_7^3, χ_{19}^9	133	11.53	$\mathbf{Q}(\sqrt{-7}, \sqrt{-19})$	Y
		$\chi_4\psi_8, \chi_{19}^9$	152	12.52	$\mathbf{Q}(\sqrt{-2}, \sqrt{-19})$	Y
		χ_4, χ_{43}^{21}	172	13.11	$\mathbf{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt{-43})$	Y
4	$(2^*, 2^*)$	χ_3, χ_{67}^{33}	201	14.17	$\mathbf{Q}(\sqrt{-3}, \sqrt{-67})$	Y
		χ_{11}^5, χ_{19}^9	209	14.45	$\mathbf{Q}(\sqrt{-11}, \sqrt{-19})$	Y
		χ_4, χ_{67}^{33}	268	16.37	$\mathbf{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt{-67})$	Y
		χ_7^3, χ_{43}^{21}	301	17.34	$\mathbf{Q}(\sqrt{-7}, \sqrt{-43})$	Y
		$\chi_4\psi_8, \chi_{43}^{21}$	344	18.54	$\mathbf{Q}(\sqrt{-2}, \sqrt{-43})$	Y
		χ_3, χ_{163}^{81}	489	22.11	$\mathbf{Q}(\sqrt{-3}, \sqrt{-163})$	(Y)
		$\chi_4\psi_8, \chi_{67}^{33}$	536	23.15	$\mathbf{Q}(\sqrt{-2}, \sqrt{-67})$	(Y)
		χ_4, χ_{163}^{81}	652	25.53	$\mathbf{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt{-163})$	?
		$\chi_{11}^5, \chi_{67}^{33}$	737	27.14	$\mathbf{Q}(\sqrt{-11}, \sqrt{-67})$	?
		$\chi_7^3, \chi_{163}^{81}$	1141	33.77	$\mathbf{Q}(\sqrt{-7}, \sqrt{-163})$	?
		$\chi_{19}^9, \chi_{67}^{33}$	1273	35.67	$\mathbf{Q}(\sqrt{-19}, \sqrt{-67})$	?
		$\chi_{11}^5, \chi_{163}^{81}$	1793	42.34	$\mathbf{Q}(\sqrt{-11}, \sqrt{-163})$	?
		$\chi_{43}^{21}, \chi_{67}^{33}$	2881	53.67	$\mathbf{Q}(\sqrt{-43}, \sqrt{-67})$	?
		$\chi_{19}^9, \chi_{163}^{81}$	3097	55.65	$\mathbf{Q}(\sqrt{-19}, \sqrt{-163})$	?
		$\chi_{43}^{21}, \chi_{163}^{81}$	7009	83.71	$\mathbf{Q}(\sqrt{-43}, \sqrt{-163})$	?
		$\chi_{67}^{33}, \chi_{163}^{81}$	10921	104.50	$\mathbf{Q}(\sqrt{-67}, \sqrt{-163})$	?

Continued.

n	Type	Generators	f	rd	Simple expression	UC
6	6*	χ_7	7	5.06	$\mathbf{Q}(\zeta_7)$	Y
		$\chi_3\psi_9$	9	5.19	$\mathbf{Q}(\zeta_9)$	Y
		χ_{19}^3	19	11.63		Y
		χ_{43}^7	43	22.97		(Y)
		χ_{67}^{11}	67	33.24		?
	(2*, 3)	χ_3, χ_7^2	21	6.33	$\mathbf{Q}(\sqrt{-3}, \cos(2\pi/7))$	Y
		χ_4, χ_7^2	28	7.31	$\mathbf{Q}(\sqrt{-1}, \cos(2\pi/7))$	Y
		χ_4, ψ_9	36	8.65	$\mathbf{Q}(\sqrt{-1}, \cos(2\pi/9))$	Y
		χ_3, χ_{13}^4	39	9.57		Y
		$\chi_4\psi_8, \chi_7^2$	56	10.35	$\mathbf{Q}(\sqrt{-2}, \cos(2\pi/7))$	Y
		χ_7^3, ψ_9	63	11.44	$\mathbf{Q}(\sqrt{-7}, \cos(2\pi/9))$	Y
		χ_4, χ_{19}^6	76	14.24		Y
		χ_{11}^5, χ_7^2	77	12.13	$\mathbf{Q}(\sqrt{-11}, \cos(2\pi/7))$	Y
		χ_7^3, χ_{13}^4	91	14.62		Y
		χ_3, χ_{31}^{10}	93	17.09		Y
		$\chi_4\psi_8, \chi_{13}^4$	104	15.63		Y
		χ_3, χ_{43}^{14}	129	21.25		(Y)
8	8*	$\chi_4\psi_{32}$	32	16.00	$\mathbf{Q}(i\sin(\pi/16))$	Y
		χ_{41}^5	41	25.77		(Y)
	(2*, 4)	χ_4, ψ_{16}	16	16.00	$\mathbf{Q}(\zeta_{16})$	Y
		χ_3, ψ_{16}	48	11.65	$\mathbf{Q}(\sqrt{-3}, \cos(\pi/8))$	Y
	(2*, 4*)	χ_3, χ_5	15	5.79	$\mathbf{Q}(\zeta_{15})$	Y
		χ_4, χ_5	20	6.68	$\mathbf{Q}(\zeta_{20})$	Y
		χ_7^3, χ_5	35	8.84	$\mathbf{Q}(\sqrt{-7}, \zeta_5)$	Y
		$\chi_4\psi_8, \chi_5$	40	9.45	$\mathbf{Q}(\sqrt{-2}, \zeta_5)$	Y
		$\chi_3, \chi_4\psi_{16}$	48	11.65	$\mathbf{Q}(\sqrt{-3}, i\sin(\pi/8))$	Y
		χ_4, χ_{13}^3	52	13.69		Y
		χ_7^3, χ_{13}^3	91	18.11		Y
		χ_4, χ_{37}^9	148	30.00		?
		$\chi_{11}^5, \chi_4\psi_{16}$	176	22.31	$\mathbf{Q}(\sqrt{-11}, i\sin(\pi/8))$	(Y)
		$\chi_4\psi_8, \chi_{29}^7$	232	35.34		?
	(4*, 2)	χ_5, ψ_8	40	9.45	$\mathbf{Q}(\zeta_5, \sqrt{2})$	Y
		χ_5, χ_{13}^6	65	12.05	$\mathbf{Q}(\zeta_5, \sqrt{13})$	Y
		χ_{13}^3, χ_5^2	65	15.30		Y
		$\chi_4\psi_{16}, \chi_5^2$	80	15.04	$\mathbf{Q}(i\sin(\pi/8), \sqrt{5})$	Y
		χ_5, χ_{17}^8	85	13.78	$\mathbf{Q}(\zeta_5, \sqrt{17})$	Y
		χ_{13}^3, ψ_8	104	19.36		Y

Continued.

n	Type	Generators	f	rd	Simple expression	UC
8	$(2^*,2,2)$	χ_4, ψ_8, χ_5^2	40	8.94	$\mathbf{Q}(\zeta_8, \sqrt{5})$	Y
	$(2^*,2,2^*)$	χ_4, ψ_8, χ_3	24	6.92	$\mathbf{Q}(\zeta_{24})$	Y
		χ_3, χ_5^2, χ_4	60	7.74	$\mathbf{Q}(\zeta_{12}, \sqrt{5})$	Y
		$\chi_4, \psi_8, \chi_{11}^5$	88	13.26	$\mathbf{Q}(\zeta_8, \sqrt{-11})$	Y
		$\chi_3, \chi_5^2, \chi_7^3$	105	10.24	$\mathbf{Q}(\sqrt{-3}, \sqrt{5}, \sqrt{-7})$	Y
		$\chi_3, \chi_5^2, \chi_4\psi_8$	120	10.95	$\mathbf{Q}(\sqrt{-3}, \sqrt{5}, \sqrt{-2})$	Y
		$\chi_4, \chi_5^2, \chi_7^3$	140	11.83	$\mathbf{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt{5}, \sqrt{-7})$	Y
		$\chi_3, \psi_8, \chi_{11}^5$	264	16.24	$\mathbf{Q}(\sqrt{-3}, \sqrt{2}, \sqrt{-11})$	Y
		$\chi_7^3, \chi_5^2, \chi_4\psi_8$	280	16.73	$\mathbf{Q}(\sqrt{-7}, \sqrt{5}, \sqrt{-2})$	Y
		$\chi_4, \chi_{13}^6, \chi_7^3$	364	19.07	$\mathbf{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt{13}, \sqrt{-7})$	Y
		$\chi_3, \chi_{17}^8, \chi_{11}^5$	561	23.68	$\mathbf{Q}(\sqrt{-3}, \sqrt{17}, \sqrt{-11})$	(Y)
	$(2^*,2^*,2^*)$	χ_3, χ_4, χ_7^3	84	9.16	$\mathbf{Q}(\zeta_{12}, \sqrt{-7})$	Y
		$\chi_3, \chi_4, \chi_{11}^5$	132	11.48	$\mathbf{Q}(\zeta_{12}, \sqrt{-11})$	Y
		$\chi_3, \chi_7^3, \chi_4\psi_8$	168	12.96	$\mathbf{Q}(\sqrt{-3}, \sqrt{-7}, \sqrt{-2})$	Y
		$\chi_3, \chi_4, \chi_{19}^9$	228	15.09	$\mathbf{Q}(\zeta_{12}, \sqrt{-19})$	Y
		$\chi_4, \chi_7^3, \chi_{19}^9$	532	23.06	$\mathbf{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt{-7}, \sqrt{-19})$	(Y)
		$\chi_3, \chi_{11}^5, \chi_{19}^9$	627	25.03	$\mathbf{Q}(\sqrt{-3}, \sqrt{-11}, \sqrt{-19})$	(Y)
10	10^*	χ_{11}	11	8.84	$\mathbf{Q}(\zeta_{11})$	Y
	$(2^*,5)$	χ_3, χ_{11}^2	33	11.79	$\mathbf{Q}(\sqrt{-3}, \cos(2\pi/11))$	Y
		χ_4, χ_{11}^2	44	13.61	$\mathbf{Q}(\sqrt{-1}, \cos(2\pi/11))$	Y
12	12^*	χ_{13}	13	10.67	$\mathbf{Q}(\zeta_{13})$	Y
		χ_{37}^3	37	28.02		?
		χ_{61}^5	61	44.46		?
	$(2^*,6^*)$	χ_3, χ_7	21	8.76	$\mathbf{Q}(\zeta_{21})$	Y
		χ_4, χ_7	28	10.12	$\mathbf{Q}(\zeta_{28})$	Y
		$\chi_4, \chi_3\psi_9$	36	10.39	$\mathbf{Q}(\zeta_{36})$	Y
		$\chi_4\psi_8, \chi_7$	56	14.31	$\mathbf{Q}(\sqrt{-2}, \zeta_7)$	Y
		$\chi_7^3, \chi_3\psi_9$	63	13.74	$\mathbf{Q}(\sqrt{-7}, \zeta_9)$	Y
		χ_4, χ_{19}^3	76	23.26		(Y)
		χ_{11}^5, χ_7	77	16.78	$\mathbf{Q}(\sqrt{-11}, \zeta_7)$	Y
		χ_3, χ_{43}^7	129	39.79		?
	$(4^*,3)$	χ_5, χ_7^2	35	12.23	$\mathbf{Q}(\zeta_5, \cos(2\pi/7))$	Y
		χ_5, ψ_9	45	14.46	$\mathbf{Q}(\zeta_5, \cos(2\pi/9))$	Y
	$(6^*,2)$	χ_7, χ_5^2	35	11.31	$\mathbf{Q}(\zeta_7, \sqrt{5})$	Y
		$\chi_3\psi_9, \chi_5^2$	45	11.61	$\mathbf{Q}(\zeta_9, \sqrt{5})$	Y
		$\chi_3\psi_9, \psi_8$	72	14.69	$\mathbf{Q}(\zeta_9, \sqrt{2})$	Y
	$(2^*,2,3)$	χ_4, ψ_8, χ_7^2	56	14.63	$\mathbf{Q}(\zeta_8, \cos(2\pi/7))$	Y
		$\chi_3, \chi_5^2, \chi_7^2$	105	14.17	$\mathbf{Q}(\sqrt{-3}, \sqrt{5}, \cos(2\pi/7))$	Y

Continued.

n	Type	Generators	f	rd	Simple expression	UC
12	$(2^*, 2^*, 3)$	χ_3, χ_4, χ_7^2	84	12.67	$\mathbf{Q}(\zeta_{12}, \cos(2\pi/7))$	Y
		$\chi_3, \chi_4\psi_8, \chi_7^2$	168	17.92	$\mathbf{Q}(\sqrt{-3}, \sqrt{-2}, \cos(2\pi/7))$	Y
		$\chi_3, \chi_{11}^5, \chi_7^2$	231	21.02	$\mathbf{Q}(\sqrt{-3}, \sqrt{-11}, \cos(2\pi/7))$	(Y)
		χ_4, χ_7^3, ψ_9	252	22.89	$\mathbf{Q}(\zeta_{12}, \cos(2\pi/9))$	(Y)
		$\chi_3, \chi_7^3, \chi_{13}^4$	273	25.33		(Y)
		$\chi_4, \chi_{11}^5, \chi_7^2$	308	24.27	$\mathbf{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt{-11}, \cos(2\pi/7))$	(Y)
		$\chi_3, \chi_4\psi_8, \chi_{13}^4$	312	27.08		(Y)
		$\chi_7^3, \chi_4\psi_8, \chi_{13}^4$	728	41.37		?
14	14^*	χ_{43}^3	43	32.86		?
		$\chi_7^3\psi_{49}$	49	32.29		?
16	16^*	χ_{17}	17	14.39	$\mathbf{Q}(\zeta_{17})$	Y
	$(2^*, 8)$	χ_4, ψ_{32}	32	16.00	$\mathbf{Q}(\zeta_{32})$	Y
	$(2^*, 8^*)$	$\chi_3, \chi_4\psi_{32}$	96	27.71	$\mathbf{Q}(\sqrt{-3}, i\sin(\pi/16))$	(Y)
	$(4^*, 4^*)$	χ_5, χ_{13}^3	65	22.89		(Y)
		$\chi_5, \chi_4\psi_{16}$	80	22.49	$\mathbf{Q}(\zeta_5, i\sin(\pi/8))$	(Y)
	$(2^*, 2, 4^*)$	χ_4, ψ_8, χ_5	40	13.37	$\mathbf{Q}(\zeta_{40})$	Y
	$(2^*, 2^*, 4^*)$	χ_3, χ_4, χ_5	60	11.58	$\mathbf{Q}(\zeta_{60})$	Y
		χ_3, χ_7^3, χ_5	105	15.32	$\mathbf{Q}(\zeta_{15}, \sqrt{-7})$	Y
		$\chi_3, \chi_4\psi_8, \chi_5$	120	16.38	$\mathbf{Q}(\zeta_{15}, \sqrt{-2})$	Y
		χ_4, χ_7^3, χ_5	140	17.69	$\mathbf{Q}(\zeta_{20}, \sqrt{-7})$	Y
	$(2^*, 4, 2)$	$\chi_4, \psi_{16}, \chi_5^2$	80	17.88	$\mathbf{Q}(\zeta_{16}, \sqrt{5})$	Y
	$(2^*, 4, 2^*)$	$\chi_4, \psi_{16}, \chi_3$	48	13.85	$\mathbf{Q}(\zeta_{48})$	Y
18	18^*	χ_{19}	19	16.27	$\mathbf{Q}(\zeta_{19})$	Y
		χ_3, ψ_{27}	27	15.58	$\mathbf{Q}(\zeta_{27})$	Y
	$(6^*, 3)$	$\chi_3\psi_9, \chi_7^2$	63	19.01	$\mathbf{Q}(\zeta_9, \cos(2\pi/7))$	Y
20	20^*	$\chi_5\psi_{25}$	25	16.71	$\mathbf{Q}(\zeta_{25})$	Y
	$(2^*, 10^*)$	χ_3, χ_{11}	33	11.79	$\mathbf{Q}(\zeta_{33})$	Y
		χ_4, χ_{11}	44	13.61	$\mathbf{Q}(\zeta_{44})$	Y
	$(2^*, 2^*, 5)$	$\chi_3, \chi_4, \chi_{11}^2$	132	23.58	$\mathbf{Q}(\zeta_{12}, \cos(2\pi/11))$	(Y)
24	$(4^*, 6^*)$	χ_5, χ_7	35	16.92	$\mathbf{Q}(\zeta_{35})$	Y
		$\chi_5, \chi_3\psi_9$	45	17.37	$\mathbf{Q}(\zeta_{45})$	Y
	$(2^*, 2, 6^*)$	χ_3, χ_5^2, χ_7	105	19.60	$\mathbf{Q}(\zeta_{21}, \sqrt{5})$	Y
	$(2^*, 2^*, 6^*)$	χ_3, χ_4, χ_7	84	17.53	$\mathbf{Q}(\zeta_{84})$	Y
	$(2^*, 3, 4^*)$	χ_3, χ_7^2, χ_5	105	21.19	$\mathbf{Q}(\zeta_{15}, \cos(2\pi/7))$	Y