数理解析研究所講究録
第844巻 1993年 183-189

On real quadratic fields with a single class in each genus

都立大理 堂前 和宏 (Kazuhiro Dohmae)

§1. イントロダクション

Dは平方因子を持たない有理整数(≠1)とし，2次体 $K=\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ の判別式を d とする．Kの広義及び狭義のイデアル類群をそれぞれ $H(K)$, $H^{+}(K)$ で表す．principal genus $H^{+}(K)^{2}$ の類数が1のとき，即ち $\#(H^{+}(K)^{2})=1$ のとき，2次体Kの種の類数は1であるという．明らかに

$$\#(H^{+}(K)^{2})=1 \quad \Rightarrow \quad \#(H(K)^{2})=1$$

であるが，逆は必ずしも成立たない。

類数が1の2次体を決定する問題は「Gaussの類数問題」として有名であるが，同様に種の類数が1の2次体を決定する問題も考えることができる．虚2次体の場合は，そのようなものが既に知られている67個以外には高々1つしか存在しないことがわかっている(Weinberger)．ここでは実2次体の場合を考えるが，そのときはDの形を制限しなければならない．

（基本単数があまり大きくないものだけを対象にするため.）結果は次のようになる.

__定理__　$D>1$ は narrow R-D type とする.

(i) $D \leqq 1.31\times 10^{16}$ かつ $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ の種の類数が 1 であるような D の値は 69 個である.

(ii) $D > 1.31\times 10^{16}$ かつ $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ の種の類数が 1 であるような D の値は高々 1 つである.（GRH を仮定すればこのような値は存在しない.）

§2. 判別式の評価

D が $D = n^2+r \neq 5$, $-n<r\leqq n$, $r \mid 4n$ という形に表されるとき, 実 2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$（または単に D）は R-D type であるという. また, 上の条件に加えて $r\in\{\pm1,\pm4\}$ が成立つとき, narrow R-D type であるという. D が R-D type のとき, $K=\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ の基本単数を ε_D とすれば,

$$\varepsilon_D \leqq 4D$$

である.

__命題 1__　$D > 1$ は R-D type とする. もし $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ の種の類数が 1 ならば, 高々 1 つの例外を除いて

$$D < 1.31 \times 10^{16}$$

である．さらにGRHを仮定すれば，例外は存在しない．

（証明）$K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ の狭義の類数と種数を $h^+(K)$，$g^+(K)$ とする．いま，

$$d_0 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot 43 \text{（最初の14個の素数の積）}$$
$$< 1.31 \times 10^{16}$$

とおく．Kの判別式を d とし，$d \geqq d_0$ とすれば，竜沢の評価により，高々1つの例外を除いて

$$h^+(K) \geqq \frac{\sqrt{d}}{2\log \varepsilon_0} L(1, \chi_d) \geqq \frac{\sqrt{d}}{2\log 4d} \cdot 0.655 \frac{1}{\log d_0 \cdot d^{\frac{1}{\log d_0}}}$$
$$\geqq \frac{0.655}{2e \log d_0} \cdot \frac{\sqrt{d_0}}{\log 4d_0} > 2^{13}$$

が成立つ．d が t 個の素判別式の積であるとして，$h^+(K) = g^+(K)$ と仮定すれば，$2^{t-1} \geqq 2^{13}$ より $t \geqq 14$．よって

$$d \geqq d_0 \cdot 47^{t-14}$$

であり，

$$2^{t-1} = h^+(K) > \frac{0.655}{2\log d_0} \cdot \frac{d_0^{\frac{1}{2} - \frac{1}{\log d_0}} \cdot 47^{(\frac{1}{2} - \frac{1}{\log d_0})(t-14)}}{\log 4d_0 + (t-14)\log 47}$$
$$\geqq \frac{0.655}{2e} \cdot \frac{\sqrt{d_0} \cdot 6^{t-14}}{\log d_0 \cdot (\log 4d_0 + (t-14)\log 47)} > 2^{t-1}$$

となり矛盾．従って $h^+(K) > g^+(K)$ であり，Kの種の類数は1より大きい． ▨

§3. 計算と結果

まず，素数 p に対して

$$\left(\frac{D}{p}\right)^* = \begin{cases} \left(\frac{D}{p}\right) & \text{if} \quad p \geqq 3 \\ 1 & \text{if} \quad p = 2 \quad \text{and} \quad D \equiv 1 \bmod 8 \\ -1 & \text{if} \quad p = 2 \quad \text{and} \quad D \equiv 5 \bmod 8 \\ 0 & \text{if} \quad p = 2 \quad \text{and} \quad D \equiv 2 \text{ or } 3 \bmod 4 \end{cases}$$

とおく．次の補題を準備する．

<u>補題</u>　p を任意の素数とするとき，次の２つの条件は同値である：

(i) 不定方程式 $x^2 - Dy^2 = \pm 4p^2$ が non-trivial な整数解（即ち $x_0 \equiv y_0 \equiv 0 \pmod{p}$ でない整数解）を持つ．

(ii) p は実２次体 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ において次のように分解する：

$$(p) = \mathfrak{P}\mathfrak{P}', \quad \mathfrak{P} \neq \mathfrak{P}', \quad \mathfrak{P}^2 \text{ は principal} \quad .$$

いま実２次体 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ の Minkowski 定数を M_D として，

$$S_D = \{ p \text{ prime} \,;\; p \leqq M_D \,,\; \left(\frac{D}{p}\right)^* = 1 \}$$

と置けば，上の補題から次を得る．

<u>命題２</u>　以下の３つの条件は同値である．

(i) $\#(H(D)^2) = 1$

(ii) 任意の素数 $p \in S_D$ に対して，不定方程式 $x^2 - Dy^2 = \pm 4p^2$ が non-trivial な整数解を持つ．

(iii) $\left(\frac{D}{p}\right)^* = 1$ なる任意の素数 p に対して，不定方程式 $x^2 - Dy^2 = \pm 4p^2$ が non-trivial な整数解を持つ．

上の命題は $\#(H(D)^2) = 1$ であるための必要十分条件を与えているが，不定方程式 $x^2 - Dy^2 = \pm 4p^2$ が non-trivial な整数解を持つかどうかの判定はそれほど容易でない．しかし，この形の不定方程式の可解性に関するよく知られた条件を用いることにより，次の命題を得る．

<u>命題 3</u>　$D > 1$ は narrow R-D type とする．もし $p < r_D$ かつ $\left(\frac{D}{p}\right)^* = 1$ を充す素数 p が存在するなら

$$\#(H(D)^2) > 1$$

であり，従って $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ の種の類数は 1 より大きい．但し，$\varepsilon_D = \frac{1}{2}(t_D + u_D\sqrt{D})$ とするとき，

$$r_D = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{t_D}}{|u_D|} & \cdots \quad N\varepsilon_D = -1 \\ \dfrac{\sqrt{t_D - 2}}{|u_D|} & \cdots \quad N\varepsilon_D = +1 \end{cases}$$

である．

r_Dは具体的には次のようになる：

(i) $D = a^2+4$ or $4a^2+1$ ならば，$r_D = \sqrt{a}$.

(ii) $D = a^2+1 \equiv 2 \bmod 4$ ならば，$r_D = \sqrt{\frac{a}{2}}$.

(iii) $D = a^2-4$ ならば，$r_D = \sqrt{a-2}$.

(iv) $D = 4a^2+1$ ならば，$r_D = \sqrt{a-\frac{1}{2}}$.

命題3で得た条件を用いて，命題1で求めた範囲のDをふるいにかけ，残ったものについては類数と種数を計算し，最終的に§1の定理を得る．69個のDの値は次頁の表のようになる．

［参考文献］

[1] K. Dohmae, On real quadratic fields with a single class in each genus, appear in Japan. J. Math.

[2] P. J. Weinberger, Exponents of the class group of complex quadratic fields, Acta Arith. 22 (1973), 117 - 124

[3] H. Yokoi, Class number one problem for real quadratic fields (the Conjecture of Gauss), Proc. Japan Acad. Math. 64 (1988), 53-55

[4] H. Yokoi, Class-number one problem for certain kind of real quadratic fields, Proc. Int. Conf. on Class Numbers and Fundamental Units, Katata, Japan (1986), 125 - 137

Table : D's of narrow R–D type with a single class in each genus
($D \leq 1.31 \times 10^{16}$)

$h^+(\mathbf{Q}(\sqrt{D}))$	$D = a^2 + 4$	$D = a^2 + 1$	$D = a^2 - 4$	$D = a^2 - 1$
1	29, 53, 173, 293,	2, 17, 37, 101, 197, 677		
2	85, 365, 533, 629, 965, 1685, 1853, 2813	10, 26, 65, 122, 362, 485, 1157, 2117, 3365	21, 77, 437	3
4	2405, 3485, 10205, 16133	170, 290, 530, 962, 1370, 9605, 14885, 20165	165, 285, 357, 957, 1085, 2397	15, 35, 143
8	32045	2210, 5330, 58565, 77285	1365, 2805, 4485, 7917, 8645	195, 255, 483, 1295
16			26565	1155, 3135