数理解析研究所講究録
第 845 巻 1993 年 70-86

多重度一定の特性帯を持つ一般の偏微分方程式系の Levi 条件

龍谷大学理工学部 松本和一郎
(Waichiro Matsumoto)

§0. Introduction.

下の Cauchy 問題を考える

$$(1)\quad \begin{cases} Pu \equiv \left(D_t u - \sum_{|\alpha|\le\nu} A_\alpha(t,x) D_x^\alpha \right) u = f(t,x), \\ u(t_0,x) = u_0(x). \end{cases} \quad (\nu \in \mathbb{N} = \{1,2,\cdots\})$$

ここに、$D_t = \frac{1}{\sqrt{-1}}\frac{\partial}{\partial t}$, $D_x = \frac{1}{\sqrt{-1}}\frac{\partial}{\partial x}$, $(t,x) \in \mathbb{R}^{1+l}_{t,x}$ であり、$u(t,x)$, $f(t,x)$, $u_0(x)$ は N 次元ベクトル, $A_\alpha(t,x)$ は $N\times N$ 行列である。Ω を $\mathbb{R}^{1+l}_{t,x}$ の開集合とする。(N次元ベクトル) $v(t,x)$ が Ω 上で定義された C^∞ 級函数を成分に持つとき、$v(t,x) \in C^\infty(\Omega)$ と略記する。又、ある集合 G の元を成分に持つ $N\times N$ 行列の全体を $Mat(N; G)$ とかく。特に $Mat(N;G)$ に属し、そこに逆元を持つ行列の全体を $GL(N;G)$ とかく。$\Omega_{t_0} = \Omega \cap \{t = t_0\}$, $\Omega^{\pm}_{t_0} = \Omega \cap \{t \gtrless t_0\}$ とおこう。当面 $A_\alpha(t,x) \in Mat(N; C^\infty(\Omega))$ とする。

定義1. (C^∞ well $\overbrace{\text{posedness}}^{\text{at }(t_0,x_0)}$) 下の(E)と(U)が成り立つとき. Ωの点(t_0,x_0)で Cauchy 問題(1)が未来に C^∞ well posed という。

(E) (Existence) (t_0,x_0)の近傍$\hat{\omega}$があって
$\forall u_0(x)\in C^\infty(\Omega_{t_0})$, $\forall f(t,x)\in C^\infty(\Omega)$に対して
$u(t,x)\in C^\infty(\hat{\omega})$があって $\overline{\hat{\omega}^+_{t_0}}$で
(1)を満たす。

(U) (Local uniqueness) (t_0,x_0)の任意の近傍ωに対してある(t_0,x_0)の近傍$\omega'\subset\omega$があって.
$u_0=0$ in ω_{t_0} かつ $f=0$ in ω ならば (1)の解 u は $\omega'^+_{t_0}$ で 0である。

"過去に C^∞ well posed" も $\hat{\omega}^+_{t_0}$, $\omega'^+_{t_0}$ を $\hat{\omega}^-_{t_0}$, $\omega'^-_{t_0}$ に置きかえて定義される。

定義2. (C^∞ well posedness in Ω) Cauchy 問題(1)が Ωの各点(t_0,x_0)で未来に(過去に) C^∞ well posed のとき. (1)はΩで未来に(過去に) C^∞ well posed という。特にΩにおいて未来にも過去にも C^∞ well posed の時. 単にΩで C^∞ well posed という。

(1) が Ω で C^∞ well posed となる為の $P(t,x,D_t,D_x)$ に対する条件を Levi 条件という。比較の為に高階単独方程式の場合の結果をまとめておく。

$$p(t,x,D_t,D_x) = D_t^m + \sum_{\substack{|\alpha| \le \nu j \\ 1\le j\le m}} a_{\alpha j}(t,x) D_x^\alpha D_t^{m-j}$$

$(a_{\alpha j} \in C^\infty(\Omega)$: スカラー$)$

とする。まず S. Mizohata [17] [16], K. Kajitani [6] により、$a_{\alpha j} \in \mathcal{A}(\Omega)$ の仮定の下に（K. Kajitani は $a_{\alpha j} \in C^\infty(\Omega)$ の場合も扱っている）

(f) (1) が C^∞ well posed

$\Rightarrow$ $\nu = 1$ かつ $p_m(t,x,\lambda,\xi) = 0$ の λ に関する根が $(t,x,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^l$ に対してすべて実である。

ここに $p_m = \lambda^m + \sum_{\substack{|\alpha| = j \\ 1\le j\le m}} a_{\alpha j}(t,x)\xi^\alpha \lambda^{m-j}$,

が得られている。完全な Levi 条件は未だ得られていない。ここでは下の仮定のもとに結果をまとめる。
(H. Flaschka and G. Strang [5], J. Chazarin [3], S. Mizohata [18])

(a.1) $p_m = 0$ の λ に関する根 $\lambda_j(t,x,\xi)$ が $\Omega \times (\mathbb{R}^l \setminus \{0\})$ 上一定の多重度 m_j を持つ $(1\le j\le d)$。 $\left(\sum_{j=1}^{d} m_j = m\right)$

(a.1) の下に、$P(t,x,D_t,D_x)$ は下のように分解できる。(H. Kumano-go [ ])

(2) $p = \prod_{j=1}^{d} {}^{\circ} P_j(t,x,D_t,D_x)$, $p_j = (D_t - \lambda_j(t,x,D_x))^{\circ m_j} + \sum_{k=1}^{m_j} b_k^j(t,x,D_x) \circ (D_t - \lambda_j)^{\circ m_j - k}$

$\mathrm{ord}\, b_k^j \le k-1$,

ここに、$\circ$ は作用素の積を表す。これを用いて単独高階の場合の Levi 条件は (a.1) の下に

(l) (f) ⊕ true ord $b_k^j \leqq 0$.

となる。ここに true ord $b = \mu$ とは $\lim_{|\xi|\to\infty} b(t,x,|\xi|\xi')/|\xi|^{\mu}$ が各 $(t,x,\xi') \in \Omega \times S^{\ell-1}$ に対して有限かつ $\neq 0$ のことである。

一方、系の場合は (f) に対応する結果も、(a.1) に当たる仮定の下での (l) に対応する結果も未解決であった。後者については V.M. Petkov [19], [20], H. Yamahara [25], Y. Demay [4], W. Matsumoto [12], J. Vaillant [22], [23], [24] etc があるが、いずれも特性根の多重度を限るか、あるいは主要部の Jordan 構造に仮定をおくものである。ここでは、このような構造上の仮定を置くかわりに係数の解析性を仮定する。Ω で実解析的函数の全体を $\mathcal{A}(\Omega)$ とかく。後で必要になるので、複素領域 $\hat{\Omega}$ での正則函数の全体を $\mathcal{H}(\hat{\Omega})$, 有理型函数の全体を $\mathcal{M}(\hat{\Omega})$ とかくことにしておく。

(A.0) $\quad A_\alpha(t,x) \in \mathrm{Mat}(N : \mathcal{A}(\Omega)) \quad (|\alpha| \leqq \nu)$.

我々の結果を記述する為に言葉を用意しよう。$\|\xi\| = \sqrt{|\mathrm{Re}\,\xi|^2 + |\mathrm{Im}\,\xi|^2}$ とおく。$\omega \times \Gamma \subset \mathbb{C}^{1+\ell}_{t,x} \times \mathbb{C}^{\ell}_{\xi}$ が conic とは「$(t,x,\xi) \in \omega \times \Gamma \Rightarrow \forall \rho > 0 \; (t,x,\rho\xi) \in \omega \times \Gamma$」のことである。$\tilde{\omega}$, $\widetilde{\omega'} \subset \omega \times \Gamma$ が conically compact in

$\omega\times\Gamma$ とは $\tilde{\omega}\cap\{\|\xi\|=1\}$ が $\omega\times\Gamma\cap\{\|\xi\|=1\}$ で compact となることである。 $\omega\times\Gamma\subset\mathbb{C}^{1+l}\times\underbrace{\mathbb{C}^{l}}_{\text{が conic}}$ とします。

定義 3 (Meromorphic formal symbol)

形式和 $a(t,x,\xi)=\sum_{i=0}^{\infty}a_i(t,x,\xi)$ が 下の (3), (4) を満たす時 $a(t,x,\xi)$ を $\omega\times\Gamma$ における κ 次の meromorphic formal symbol という。

(3) ある $\omega\times\Gamma$ の analytic set (ある正則函数 $\not\equiv 0$ の零点集合) と実数 κ があって. $a_i\in\mathcal{M}(\omega\times\Gamma)\cap\mathcal{H}(\omega\times\Gamma\setminus\Sigma)$ かつ a_i は ξ について $\kappa-i$ 次正斉次。 $(i\in\mathbb{Z}_+)$

(4) $\omega\times\Gamma\setminus\Sigma$ の任意の conically compact subset $\tilde{\omega}$ に対して ある $C>0$, $R>0$ があって.

$$|a_i(t,x,\xi)|\leq CR^i\, i!\,\|\xi\|^{\kappa-i} \quad \text{on } \tilde{\omega} \quad (i\in\mathbb{Z}_+)$$

が成り立つ。

定義 4. (Holomorphic formal symbol)

$a(t,x,\xi)$ が $\omega\times\Gamma$ において $\Sigma=\phi$ の meromorphic formal symbol の時 $\omega\times\Gamma$ における holomorphic formal symbol という。

κ 次の $\omega\times\Gamma$ 上の meromorphic formal symbol (= m.f.s) の全体を $S^{\kappa}_{\mathcal{M}}$, κ 次の $\omega\times\Gamma$ 上の holomorphic formal symbol (= h.f.s.) の全体を $S^{\kappa}_{\mathcal{H}}$ とかく。又. $S_{\mathcal{M}}=\bigcup_{\kappa}S^{\kappa}_{\mathcal{M}}$

等とおく。S_M における積を定義しよう。$a = \sum a_i$, $b = \sum b_i$ とする。

$$(5) \qquad a \circ b = \sum_{i=0}^{\infty} c_i, \quad c_i = \sum_{j+k+|\alpha|=i} \frac{1}{\alpha!} a_j^{(\alpha)}(t,x,\xi)\, b_{k(\alpha)}(t,x,\xi)$$

と定義する。ここに $a^{(\alpha)} = \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^{\alpha} a$, $a_{(\alpha)} = D_x^{\alpha} a$ である。通常の和とこの積で $S_M(\omega \times \Gamma)$ は非可換体，$S_H(\omega \times \Gamma)$ は $S_M(\omega \times \Gamma)$ の部分環となる。

$a = \sum a_i \in S_M^K$ において $0 \leq i < i_0$ のとき $a_i \equiv 0$, $a_{i_0} \not\equiv 0$ ならば $K - i_0$ を a の true order, a_{i_0} を a の true principal part (= t.p.p.) と呼ぶ。

さて，しばらくの間 t の dual 変数 τ も含んだ meromorphic formal symbol $p(t,x,\tau,\xi)$ を考えよう。これらの全体を $\overline{S}_M$ とかこう。true order, true p.p. 等の定義は同様である。$\mathring{S}_M^K = \{ p \in \overline{S}_M^K ;\ p$ が K 次正斉次$\}$, $\mathring{S}_M = \bigcup_K \mathring{S}_M^K$ とおき，$\mathring{S}_M$ に通常の積を与えると $\mathring{S}_M \setminus \{0\}$ は可換乗法群となる。$p \in \overline{S}_M$ に対してその true p.p. p_{i_0} を対応させる射像 π

$$(6) \qquad \begin{array}{rcccl} \pi : & \overline{S}_M \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathring{S}_M \setminus \{0\} & \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & \\ & p & \longmapsto & p_{i_0} = \pi(p) & \end{array}$$

は非可換乗法群から可換乗法群への群の準同型

である。この元を用いれば E. Artin [1] の手順で Mat $(N ; \bar{S}_M)$ の元 $P(t,x,\tau,\xi)$ に行列式を定義できる。これを $\det_M P$ とかこう。これは M. Sato-M. Kashiwara [21] の行列式に対象が共通な限り一致する。特に P が、微分作用素ならば、$\det_M P$ (正則函数を係数に持つ) は 正則函数を係数 に持つ τ と ξ の斉次多項式となる。

単独高階の場合の (2) に対応する P の分解を与えよう。
order の尺度として ξ_j $(1 \leq j \leq \ell)$ の1つをとる。ここでは ξ_1 としておく。従って形式的に $\xi_1 = 0$ も pole set Σ に入れておく。(例えば $\xi_1\xi_2 = (\xi_2/\xi_1)\xi_1^2$ と 0次正斉次部分と ξ_1 の巾 に分離して考える。)

Theorem 0. (W. Matsumoto [13].)

$$P = I_N D_t + A(t,x,\xi), \quad A \in S_M^\nu$$

において $A_0(t,x,\xi)$ の固有値 $\lambda_j(t,x,\xi) \in \mathring{S}^\nu$ $(1 \leq j \leq d)$ が $(t,x,\xi) \in \omega \times \Gamma \subset \mathbb{C}^{1+\ell}_{t,x} \times \mathbb{C}^{\ell}_{\xi}$ 内において一定の多重度 m_j を持つ holomorphic function (i.e. $\in \mathring{S}^\nu_H$) とする。$\left(\sum_{j=1}^{d} m_j = N\right)$

このとき $\mathcal{N}(t,x,\xi) \in GL(N : S_M)$, $\{\delta_j\}_{1\le j\le d}$,
$\{n_{jk}\}_{\substack{1\le k\le \delta_j \\ 1\le j\le d}}$ ($\delta_j \in \mathbb{N}$, $n_{jk} \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{\delta_j} n_{jk} = m_j$) が
あって

$$(7) \quad \tilde{P} \equiv \mathcal{N}^{-1} \circ P \circ \mathcal{N} = \bigoplus_{1\le j\le d} \bigoplus_{1\le k\le \delta_j} P^{jk}(t,x,D_t,\xi)$$

$$P^{jk} = (D_t - \lambda_j(t,x,\xi))\, I_{n_{jk}} - B^{jk}(t,x,\xi)$$

$$B^{jk} = \sum_{i=0}^{\infty} B_i^{jk} \quad , \quad B_i^{jk} \in Mat(n_{jk} : \mathring{S}_M^{\nu-i})$$

$$B_0^{jk} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \xi_1^{\nu} ,$$

$$B_i^{jk} = \begin{pmatrix} & & \bigcirc & \\ b_i^{jk}(1), & \cdots & & b_i^{jk}(n_{jk}) \end{pmatrix} , \quad (i \geq 1).$$

と Jordan 標準形の主要部と Sylvester 型の低階に相似変換できる。なお この $\mathcal{N}$ と P^{jk} を構成するアルゴリズムがある。

この定理を我々の目的に使いやすいように言いかえる。

<u>定義 5.</u> (μ 次の M-基底)

$$P(t,x,D_t,\xi) = I_N D_t - A(t,x,\xi) \ , \ A \in S_M^{\nu}$$

に対して. N次元ベクトル $\{v_h^{jk}\}_{\substack{1\le h\le n_{jk} \\ 1\le k\le \delta_j \\ 1\le j\le d}}$, $v_h^{jk} \in S_M$
が

$$(8) \quad P \circ v_h^{jk} \Big|_{D_t=0} + v_{h+1}^{jk}\, \xi_1^{\mu} = -b_{(h)}^{jk} \circ v_1^{jk} \ , \ b_{(h)}^{jk} \in S_M^{\mu-1} ,$$

を満たし．SM上の右ベクトル空間の基底となる時 $\mathcal{P}$ の $\{\lambda_j\}_{1\le j\le d}$ に属する μ 次の M-基底という。

Th.0 はしかるべき仮定の下に $\mathcal{P}$ が A_0 の固有値に属する ν 次の M 基底を持つことを主張している。

<u>Remark.</u> M 基底における $\{\delta_j\}$ も $\{n_{jk}\}$ も不変量ではない。

<u>例1.</u> $$\mathcal{P} = I_3 D_t - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix} \xi_1^{\nu} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xi_1^{\nu'}$$

$(\nu > \nu',\ b = \text{定数})$

$d = 1$, $\lambda_1 = 0$ である。

1) $\delta_1 = 2$, $n_{11} = 2$, $n_{12} = 1$ の場合．

たとえば
$$v_1^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad v_2^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad v_1^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2) $\delta_1 = 1$. $n_{11} = 3$ の場合

たとえば
$$v_1^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1/b \end{pmatrix},\quad v_2^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad v_3^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xi_1^{\nu'-\nu}.$$

系における (f) に対応する結果を述べよう。

定義 6. (Hyperbolic polynomial)

τ と ξ の斉次多項式 $g(t,x,\tau,\xi)$ が τ について Kowalevskian polynomial でかつ $g=0$ の τ に関する根がすべて $\Omega\times\mathbb{R}^{\ell}_{\xi}$ 上実数のとき g を hyperbolic polynomial という。

定義 7. (Hyperbolic system)

系 $Q(t,x,D_t,\xi)$ において $\det_M Q$ が hyperbolic polynomial の時 Q を hyperbolic system という。(特に (1) の P の type で $\nu=1$ ならば $\det_M P=\det P_0$ である。P_0 は P の主要部分)

Theorem I. (A.0) を仮定する。(1) が Ω において未来に (又は過去に) C^∞ well posed ならば、下の同値な $(F)_1\sim(F)_3$ が成り立つ。

$(F)_1$ $\det_M P$ が hyperbolic polynomial である。

$(F)_2$ P が $\mathcal{S}_M$ における相似変換で 1 階 hyperbolic system に変換される。

$(F)_3$ ($\nu>1$ のとき) $A_0=\sum_{|\alpha|=\nu}A_\alpha(t,x)\xi^\alpha$ が巾零 (従って Th 0 が適用できる) かつ P の標準形 $\tilde{P}$ in Th 0 に

おいて

(9) $\quad \text{true ord}\, b^{jk}(h) \leq 1-(\nu-1)(n_{jk}-h)$
$$(1 \leq h \leq n_{jk})$$

が成り立ち、更に

(10) $\quad \det{}_M \hat{P} \equiv \tau^{n_{jk}} - \sum_{h=1}^{n_{jk}} b^{jk}(h)\, \xi_1^{(\nu-1)(n_{jk}-h)} \tau^{h-1} = 0$

のτに関する根がすべて$\Omega \times \mathbb{R}^l$上実数である。

"(1)がC^∞ w.p. ⇒ A_0:中零, (9)" は共に S.Mizohata [17], K.Kajitani [6] と同様にして示せる。"(1)がC^∞ w.p. ⇒ (10)" は S.Mizohata [16] と同様にして示せる。又. "$(F)_3 \Rightarrow (F)_2 \Rightarrow (F)_1 \Rightarrow (F_3)$" は明かである。

さて、系において (a.1) に対応する仮定を導入しよう。

(A.1) $\quad \det{}_M P = 0$ の $(t, x, \tau, \xi) \in \Omega \times (\mathbb{R}^{1+l}_{\tau,\xi} \setminus \{0\})$ における零点が各連結成分上多重度一定である。

$(F)_3$ ⊕ (A.1) により、$\hat{P}$が1階 system に変換され更に再び Th 0 の仮定を満たす。すなわちPは1次のM-基底を持つことになる。これを$(F)_3$における ものと区別する為にすべての量に $\sim$ をつけることと

する。(A.0)(A.1)の下に P に対するLevi条件を与えよう。

Theorem 2. (A.0), (A.1) を仮定する。下の同値な $(L)_1$, $(L)_2$ が P に対する Levi 条件である。

$(L)_1$ P が S_M における相似変換で主要部が対角の1階双曲系に変換される。

$(L)_2$ P が I次の M-基底を持ち、更に

(11) $$\text{true ord}\ \tilde{b}^{jk}_{(h)} \leq -(\tilde{n}_{jk}-h) \qquad (1 \leq h \leq \tilde{n}_{jk}-1)$$

が成り立つ。

Remark 1. p9 の Remark にもかかわらず、(9)や(11)の条件は全体としてM-基底のとり方によらない不変量である。

Remark 2. Th 2 において "(1)が C^∞ w.p. $\Rightarrow$ $(L)_1$, $(L)_2$" を出すのには未来へ(又は過去へ)の C^∞ w.p. だけでよい。逆に $(L)_1$ or $(L)_2$ からは未来へも過去へも(1)が C^∞ w.p. となることが従う。

Remark 3. Th I の結果が成り立つ為に係数の解析性は不必要のように思われるが、証明されていない。

一方 Th2 に関しては、下の例に見るように係数の解析性を無条件にはずすわけにはいかない。

例

$$P = I_3 D_t - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix} D_x - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu(t) \\ \nu(t) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

① $\mu(t)\nu(t) \equiv 0$

特に $s_1 > s_1' > t_1 > t_1' > s_2 > s_2' > t_2 > t_2' > \cdots$

があって

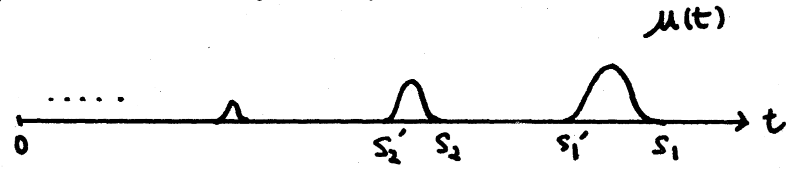
$$\mathrm{supp}\,\mu = \{0\} \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} [s_i', s_i],$$

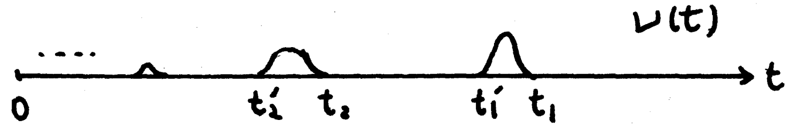
$$\mathrm{supp}\,\nu = \{0\} \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} [t_i', t_i],$$

② $\mu(t) \geqq 0$, $\nu(t) \geqq 0$, $\mu, \nu \in C^\infty(\mathbb{R})$

ならば P に対する初期値問題は $(0, x_0)$ において未来に C^∞ well posed でない。$(\forall x_0 \in \mathbb{R})$

(W. Matsumoto [12] と同様にして示せる)





Th2 の証明の方針.

"(1) が C^∞ w.p. $\Rightarrow$ $(L)_2$" は単独高階のときと同じに証明される。"$(L)_2 \Rightarrow (L)_1$" は明か。したがって "$(L)_1 \Rightarrow$ (1) が C^∞ w.p." を示せばよい。

$^\exists\tilde{\Omega}$: Ω の complex nbd ，$\Gamma_\varepsilon = \{\xi \in \mathbb{C}^l ; |\mathrm{Im}\,\xi| < \varepsilon |\mathrm{Re}\,\xi|\}$ $({}^\exists\varepsilon > 0)$ とおく．以下 $\tilde{\Omega} \times \Gamma_\varepsilon$ で考える。

Step 1. W. Matsumoto and H. Yamahara [15] と同様にして，(1) の*形式的基本解を

$$(12) \qquad u = \sum_{h=0}^{\infty} t^h u_h(x,\xi)/h! \quad (\text{形式的巾級数})$$

の形で求める。$\{u_h\}$ は $\underline{S_M}$ で unique に定まり，ある $\kappa_0 \geq 0$ があって $u_h \in \underline{S_H}^{h+\kappa_0}$ である。上の級数は収束する。

Step 2. (A.1) の仮定 ($\oplus$ (F)$_2$) により，$\det_M P = \prod_{j=1}^{d} (\tau - \lambda_j(t,x,\xi))^{m_j}$ ，$\lambda_j \neq \lambda_{j'}$ on $\tilde{\Omega} \times \Gamma_\varepsilon$ if $j \neq j'$，$\lambda_j \in \underline{\mathring{S}_H^1}(\tilde{\Omega} \times \Gamma_\varepsilon)$ ，λ_j : real on $\Omega \times \mathbb{R}^l$ となる。従って λ_j の phase function $\phi_j(t,x,\xi)$ が $\mathring{S}_H^1(\tilde{\Omega} \times \Gamma_\varepsilon)$ にきまる。一方相似変換で 1 階主要部対角双曲系に変換されることから $N_0^{-1} u = \bigoplus_{j,k} u_{jk}$ とすると

$$(13) \quad I_{n_{jk}}(D_t - \lambda_j(t,x,\xi))\, u_{jk} - C(t,x,\xi)\, u_{jk} = 0 , \qquad C \in \mathrm{Mat}(n_{jk} ; S_M^0)$$

が成り立つ。ここで，u_{jk} を Fourier 積分作用素の形

$$(14) \qquad u_{jk} = a_{jk}(t,x,\xi)\, e^{i\phi_j(t,x,\xi)}$$

に書き直す。（この時 a_{jk}，ϕ_j 共に t の巾級数：前者は形式的，後者は収束，で表し t の形式的巾級数と

して扱う。

Step 3. $a_{jk}(t,x,\xi)$ の満たすべき方程式は 1階常微分方程式となるから

(15) $$a_{jk} = \sum_{h=0}^{\infty} t^h a_{jkh}(x,\xi)$$

において $a_{jkh} \in S_M^{\kappa_0'}$ （ κ_0' : 定数）となる。（H. Kumano-go [11] 参照。）

Step 4.

一方 (12) の u も $\sum_{j=1}^{d} u^j e^{i\phi_j}$ の形にかけるから、これと $N \circ \oplus a_{jk} e^{i\phi_j}$ と比較して（Const. の評価も含めて、

(16) $$u^j = \sum_{h=0}^{\infty} t^h u_h^j(x,\xi)$$

において、

(17) $$|u_h^j(x,\xi)| \leq C R^h h! \, \|\xi\|^{\kappa_0+\kappa_0'}$$

を得る。

以上より、(1) は C_0^∞ に作用する Fourier 積分作用素の symbol を (t_0, x_0) の近傍で持つ。これより、φ を cut off しておけば有限伝播性とあわせて (1) の解を局所的に得ることができる。

Q.E.D.

References

[1] E. Artin ; Geometric algebra, Chap. 4. Interscience Publishers (1957).

[2] L. Boutet de Monvel and P. Krée : Ann. Inst. Fourier Grenoble, 17 (1) (1967) 295-323,

[3] J. Chazarin : Ann. Inst. Fourier Grenoble, 24(1) (1974) 173-202

[4] Y. Demay ; J. Math. Pure Appl., 56 (1977) 393-422,

[5] H. Flaschka and G. Strang ; Adv. Math. 6 (3) (1971) 347-379

[6] K. Kajitani : Comm. PDE 4 (6) (1979) 595-608,

[7] H. Komatsu : Proc. Japan Acad. 55 Ser A (1979), 69-72,

[8] ———— : Proc. Japan Acad. 56 Ser A (1980), 137-142,

[9] ———— : Ultradistributions IV (to appear).

[10] H. Kumano-go ; Proc. Japan Acad. 52 (9) (1976), 480-483.

[11] ———— : Pseudo-differential operators, Chap 10. The MIT Press (1981)

[12] W. Matsumoto : J. Math. Kyoto U. 21 (1) & (2) (1981) 47-84 & 251-271

[13] ———— : Normal form of systems of partial

and pseudo differential operators in formal symbol classes, (to appear in J. Math. Kyoto U.)

[14] ———— : Levi condition for general systems (to appear).

[15] W. Matsumoto and H. Yamahara: Proc. Japan Acad. 67, Ser A (6) (1991) 181-185.

[16] S. Mizohata : J. Math. Kyoto U. 1 (1) (1961) 109-127.

[17] ———— : Israel J. Math. 13 (1972), 173-187,

[18] ———— ; Calcul d'opérat. front d'ondes, Travaux en cours (ed. J. Vaillant) Hermann 29 (1988) 39-64.

[19] V.M. Petkov : Dokl. Acad. Nauk. SSSR, 209 (4) 1973 795-797 (Russian)

[20] ———— : Trudy Mosc. Mat. Obs. 37 (1978) 3-47

[21] M. Sato and M. Kashiwara : Proc. Japan Acad. 51 Ser A (1975) 17-19

[22] J. Vaillant : Proc. conf. hyperbolic eq. Univ. Pisa, Longman Sci. and Tech. (1988)

[23] ———— : Bull. Sci. Math. 114 (3) (1990) 243-328

[24] ———— : Opérateurs de multiplicité constante, (to appear)

[25] H. Yamahara : Publ. RIMS Kyoto U. 12 (2) (1976) 493-572.