数理解析研究所講究録
第846巻 1993年 20-27

Sharp characters with only one rational values

東京医科歯科大教養　清田正夫　(Masao Kiyota)

千葉大教養　野澤宗平　(Sôhei Nozawa)

本講演は昨年6月に岐阜大で開かれた代数的組み合せ論研究集会における（Alvis-Kiyota-Nozawa の共同研究に関する）清田による講演の続編で, 単位元以外に rational value をもたない sharp pairs に関する次の予想が肯定的に解決されたことの報告である.

<u>予想</u>.

(G,χ) を (任意の rank の) normalized L-sharp とする. このとき, $L\cap\mathbb{Z}=\emptyset$ ならば G は奇数位数の巡回群で, χ は1次指標, または2つの複素共役な1次指標の和である.

以下, G を有限群, χ を G の指標とし, $n=\chi(1)$ を χ の次数とする.

また, 任意の有限集合 $L\subset\mathbb{C}$ に対して, L の元を根にもつ最小次数のモニック多項式を $f_L(x)$ で表す. すなわち

$$f_L(x) \underset{def}{=} \prod_{\alpha\in L}(x-\alpha).$$

<u>定義</u>.

$L=\{\chi(g)\mid g\in G\backslash\{1\}\}$ のとき, (G,χ) は *type* L という.

<u>定理</u>([B]).

(G,χ) が type L ならば $f_L(n)\in\mathbb{Z}$ で, $|G|$ は $f_L(n)$ を割る.

<u>定義</u>.

(G,χ) が type L で，$|G|=f_L(n)$ が成り立つとき，(G,χ) を *L-sharp* という．

(G,χ) が L-sharp ならば，定義より明らかなように χ は忠実な指標である．

先ず，sharp pairs の代表的な例から紹介しよう．例 1 は L が有理整数だけからなる場合であり，例 2，例 3，例 4 は L が無理数を含む場合の例である．

<u>例 1</u>.

(G,Ω) を sharply t-transitive 置換群，π をその置換指標とする．このとき，(G,π) は $\{0,1,\ldots,t-1\}$-sharp となる．

特に，任意の有限群 G に対して，(G,ρ_G) は $\{0\}$-sharp である．ここでρ_G は G の正則指標を表す．

<u>例 2</u>.

G を巡回群，λ を G の忠実な 1 次指標とすると

(1) (G,λ) は sharp pair で，

(2) $|G|$ が奇数ならば，$(G,\lambda+\overline{\lambda})$ も sharp pair である．ここで，$\overline{\lambda}$ は λ の複素共役を表す．

<u>例 3</u>.

G を位数 $2m$ の正 2 面体群，ψ を G の忠実な 2 次の既約指標とすると，(G,ψ) は sharp pair となる．

<u>例 4</u>.

G を位数 $4m$ の正 2 面体群，または一般 4 元数群，ψ を G の忠実な 2 次の既約指標，ξ を 位数 $2m$ の cyclic kernel をもった nonprincipal な 1 次指標とする．このとき (G,ψ)，$(G,\psi+\xi)$ はともに sharp pairs である．

一般に，$(\chi, 1_G)_G = m$ のとき

$$\chi' = \chi - m1_G, \qquad L' = \{\alpha - m \mid \alpha \in L\}$$

とおけば，(G,χ) が L-sharp であることと (G,χ') が L'-sharp であることは同値である．従って，sharp pairs の分類問題を考えるとき，(G,χ) は $(\chi, 1_G)_G = 0$ を満たすとしてよい．

定義.

$(\chi, 1_G)_G = 0$ のとき，(G,χ) は *normalized* であるという．

定義.

(G,χ) を L-sharp, $\mathcal{G}$ を $\mathbb{Q}(L)$ の $\mathbb{Q}$ 上のガロワ群とするとき，L の $\mathcal{G}$-orbits の個数を (G,χ) の *rank* と呼ぶ.

先ず，"小さい" rank を持つ sharp pair (G,χ) の分類結果を紹介する.

L が有理整数だけからなる場合は, 非常に難しく僅かに以下の結果が知られているだけである.

[CK] $L = \{\ell\}$ ならば，$\ell = -1$ で, G は任意の有限群, $\chi = \rho_G - 1_G$.

[CK] $L = \{\ell, \ell+1\}$ ならば，$\ell = -1$.

[CK] $L = \{0, \ell\}$ で, $\ell \neq -1$ ならば, χ は既約, $-\ell$ は素数べき.

特に, $-\ell = p$ (p は素数) ならば，$G = P \rtimes \mathbb{Z}_{p-1}$．ここで P は位数 p^3 の非可換アーベル群である.

[CKaK] $L = \{-1, 1\}$ ならば，χ は2つの既約指標の和で，G は次のいずれかである.

D_8, Q_8 $(n=3)$; S_4, $SL(2,3)$ $(n=5)$;
$GL(2,3)$, $\widehat{S}_4$ $(n=7)$; S_5, $SL(2,5)$ $(n=11)$;
$PSL(2,7)$ $(n=13)$, A_6 $(n=19)$, $\widehat{A}_7$ $(n=71)$, M_{11} $(n=89)$.

[CK] $L = \{\ell, \ell+1, \ell+2\}$ ならば，$\ell = -1$.

[N1] $L = \{\ell, \ell+1, \ell+2, \ell+3\}$ ならば，χ は既約で

$$\begin{array}{ll} SL(2,3)\ (n=2,\ \ell=-2), & S_5\ (n=4,\ \ell=-1), \\ A_6\ (n=5,\ \ell=-1), & M_{11}\ (n=10,\ \ell=-1). \end{array}$$

一般に，$L \subset \mathbb{Z}$ の場合には

(1) $|L| = 2$ ならば，$(\chi,\chi) = 1 - \min(L)\cdot\max(L)$

(2) $|L| > 2$ ならば，$(\chi,\chi) \leq -\min(L)\cdot\max(L)$

なので，次の対象としては例えば $L = \{-1,2\}, \{-2,1\}, \{-1,0,2\}, \ldots$ 等の場合と思われるがどれも未解決である.

以後は，L が無理数を含む場合を考察する.

以下，$L_0 = L \cap \mathbb{Z}$，$L^* = L \setminus \mathbb{Z}$ とおき，$L^* \neq \emptyset$ と仮定する.

定理 1 ([CK]).

(G,χ) を rank 1 の normalized L-sharp with $L_0 = \emptyset$ とすると，G は奇素数次の巡回群で，χ は 1 次指標か，または 2 つの複素共役な 1 次指標の和である.

定理 2 ([A],[AKN],[KN]).

(G,χ) を rank 2 の normalized L-sharp とする．このとき

(1) $L_0 = \emptyset$ ならば，G は位数 p^2 (p: 奇素数) の巡回群で，χ は 1 次指標か，または 2 つの複素共役な 1 次指標の和 ($p > 3$) である.

(2) $|L_0| = 1$ ならば，次のいずれかが起こる.

(i) $L_0 = \{-1\}$, G は 4 次の巡回群, χ は 1 次指標.

(ii) $L_0 = \{-1\}$, G は 9 次の巡回群, χ は 2 つの複素共役な 1 次指標の和.

(iii) $L_0 = \{0\}$, G は位数 $2p$ (p: 素数 ≥ 5) の正 2 面体群, χ は 2 次の既約指標.

<u>定理 3</u>([N2]).

(G, χ) を rank 3 の normalized L-sharp とする．このとき

(1) $L_0 = \emptyset$ ならば, G は位数 pq (p, q は異なる奇素数), または p^3 (p は奇素数) の巡回群で, χ は 1 次指標, または 2 つの複素共役な 1 次指標の和 $(p, q > 3)$ である.

(2) $|L_0| = 1$ ならば, 次のいずれかが起こる.

(i) $L_0 = \{-1\}$, G は位数 8 の巡回群, χ は 1 次指標.

(ii) $L_0 = \{-1\}$, G は位数 27 の巡回群, χ は 2 つの複素共役な 1 次指標の和.

(iii) $L_0 = \{-1\}$, G は位数 $2p$ (p: 奇素数) の巡回群, χ は 1 次指標.

(iv) $L_0 = \{-1\}$, G は位数 $3p$ (p: 素数 ≥ 5) の巡回群, χ は 2 つの複素共役な 1 次指標の和.

(v) $L_0 = \{-1\}$, G は位数 $4p$ (p: 素数 ≥ 5) の正 2 面体群, または一般 4 元数群, χ は 2 次の既約指標と (位数 $2p$ の cyclic kernel をもった) 1 次指標の和.

(vi) $L_0 = \{0\}$, G は位数 $2p^2$ (p: 素数 ≥ 5) の正 2 面体群, χ は 2 次の既約指標.

(3) $|L_0| = 2$ ならば, 次のいずれかが起こる.

(i) $L_0 = \{-2, 0\}$ または $\{-1, 1\}$, G は位数 16 の正 2 面体群, または一般 4 元数群で, χ は 2 次の既約指標, または 2 次の既約指標と 1 次指標の和である.

(ii) $L_0 = \{-1, 0\}$, G は位数 18 の正 2 面体群, χ は 2 次の既約指標.

(iii) $L_0 = \{-1, 0\}$, $G \cong \widehat{S}_4$, χ は 2 次の既約指標.

(iv) $L_0 = \{-1, 0\}$, $G \cong A_5$, χ は 3 次の既約指標.

定理 1, 定理 2 (1), 定理 3 (1) より自然に最初に述べたことが予想される.

定理 4 (予想)([AKLN]).

(G,χ) を (任意の rank の) normalized L-sharp とする. このとき, $L_0=\emptyset$ ならば, G は奇数位数の巡回群で, χ は 1 次指標, または 2 つの複素共役な 1 次指標の和である.

Reduction

(奇) 素数べきの位数をもつすべての群に対して定理 4 が成り立つならば, すべての有限群 G に対して定理 4 が成り立つ.

任意の p-群に対する定理 4 の証明には次の整数論的結果が要求される. また, 定理 5 の系では (G,χ) が L-sharp であることを仮定しない.

定理 5([AKLN]).

p を素数, ω を 1 の原始 p^ℓ-乗根とする. また, $\beta=\sum_{k=1}^{p^\ell-1}\beta_k(1-\omega^k)$ は $0\le\beta_k\in\mathbb{Z}$, $(p,k)=1$ なるある k に対して $\beta_k>0$ で, $\gcd(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_{p^\ell-1})=1$ を満たすものとする. このとき, β が無理数で, $N_{\mathbb{Q}(\omega)/\mathbb{Q}}(\beta)$ が p べきならば, β は $1-\omega$ または $2Re(1-\omega)$ と代数的共役である.

系.

χ を有限群 G の忠実な指標とし, ある位数 p^ℓ(p は素数) の元 $g\in G$ に対して, $\chi(g)$ が無理数と仮定する. また, L_g を $\chi(g)$ を含む L の Galois orbit とし, $f_{L_g}(\chi(1))$ が p べきと仮定する. このとき, 1 の原始 p^ℓ乗根 ω と 非負整数 s で, χ を与える表現 ρ において$\rho(g)$ の固有値が 1(重複度 $n-p^s$) と ω(重複度 p^s), または 1(重複度 $n-2p^s$), ω(重複度 p^s), $\overline{\omega}$(重複度 p^s) となるものが存在する.

これらから次のように定理 4 の証明が得られる.

定理 4 の証明の概略.

先の Reduction より，G を p-群，(G,χ) を normalized L-sharp with $L_0=\emptyset$ としてよい．定理 5 の系より G は位数 p の部分群をただ 1 つだけもつことが示される．従って，G は巡回群である．

いま，$G=<g>$ with $o(g)=p^\ell$ とし，ω を 1 の原始 p^ℓ乗根とする．$L_0=\emptyset$ から，$\chi(g)$ は無理数で，$N_{\mathbb{Q}(\omega)/\mathbb{Q}}(\chi(1)-\chi(g))$ は p べきとなる．また，ρ を χ を与える表現とし，$\rho(g)$ の固有値としての ω^k の重複度を α_k とおくと

$$\chi(1)-\chi(g)=\sum_{k=1}^{p^\ell-1}\alpha_k(1-\omega^k)$$

で，ある $0\le s\in\mathbb{Z}$ に対して $\gcd(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{p^\ell-1})=p^s$．そこで $\beta_k=p^{-s}\alpha_k$，$\beta=p^{-s}(\chi(1)-\chi(g))$ とおくと

$$\beta=\sum_{k=1}^{p^\ell-1}\beta_k(1-\omega^k)$$

で，β は定理 5 の仮定を満たす．従って，必要ならば g を g のべきで置き換えることによって

$$\chi=(n-p^s)1_G+p^s\lambda \qquad \text{または} \qquad \chi=(n-2p^s)1_G+p^s\lambda+p^s\overline{\lambda}$$

とできる．ここで，λ は $\lambda(g)=\omega$ なる G の 1 次指標である．よって，(G,χ) は normalized L-sharp より，$\chi=\lambda$ または $\chi=\lambda+\overline{\lambda}$ を得る．□

なお，定理 4 のこの証明は (Cameron–Kiyota の) 定理 1 の別証明にもなっている．実際，(G,χ) の rank を r とし

$$|G|={p_1}^{e_1}{p_2}^{e_2}\cdots{p_m}^{e_m} \qquad (p_1,p_2,\ldots,p_m \text{ は異なる素数})$$

とおくと，定理 4 の仮定の下で

$$r=(e_1+1)(e_2+1)\cdots(e_m+1)-1$$

が成り立つ．したがって，$r = 1$ ならば，$|G| = p$(p は素数) となるからである．

References

[A] D. Alvis, *On finite groups admitting certain sharp characters with irrational values*, Comm. Algebra (to appear).

[AKLN] D. Alvis, M. Kiyota, H. Lenstra and S. Nozawa, *Sharp characters with only one rational value*, Comm. Algebra (to appear).

[AKN] D. Alvis, M. Kiyota and S. Nozawa, *Sharp characters of rank two*, (unpublished).

[AN] D. Alvis and S. Nozawa, *Sharp characters with one class of irrational values*, (submitted).

[B] H. F. Blichfeldt, *A theorem concerning the invariants of linear homogeneous groups, with some applications to substitution-groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **5** (1904), 461–466.

[CKaK] P. J. Cameron, T. Kataoka and M. Kiyota, *Sharp characters of finite groups of type* $\{-1, 1\}$, J. Algebra **152** (1992), 248–258.

[CK] P. J. Cameron and M. Kiyota, *Sharp characters of finite groups*, J. Algebra **115** (1988), 125–143.

[KN] M. Kiyota and S. Nozawa, *Sharp characters whose values at non-identity elements are 0 and a family of algebraic conjugates*, J. Algebra (to appear).

[N1] S. Nozawa, *Sharp characters of finite groups having prescribed values*, Tsukuba J. Math. **16** (1992), 269–277.

[N2] ———, *Sharp characters of rank three*, (preprint).