

幾何学的手法による Newton 写像の 収束鉢の幅の評価

上智大学 大学院 理工学研究科 数学専攻 藤村 雅代 (Masayo FUJIMURA)
上智大学 理工学部 数学科 西沢 清子 (Kiyoko NISHIZAWA)

Newton 法は、方程式の根の近似を求める有効なアルゴリズムである。ここでは多項式の Newton 写像の性質を複素力学系の立場で考察する。

Newton 写像において、根の直接鉢の無限遠点に伸びる各水路の幅の評価はすでにえられた [NF92] [NF]。しかし、各水路の幅に対する次数のみによる下限は存在しない。すなわち、いくらでも細い水路を持つ直接鉢が存在する。

よって、今回は直接鉢の幅の定義をしなおす必要が生じた。直接鉢の幅を評価するとき、このような細い水路ではなく、ほかの太い水路であるのが自然である。

ここでは、3 次多項式について、その方法を述べる。

最後に、多項式の次数のみで、直接鉢の幅を評価する Manning [Man86] の方法を紹介する。

1. 諸定義

多項式 $p(z)$ の Newton 写像 (Newton map) を

$$N(z) = z - \frac{p(z)}{p'(z)}$$

によって定める。

多項式 p の Newton 写像 N_p において、 p の根 α は (super-)attracting fixed point になる。 N_p の iteration により根 α に収束するような点の集合

$$\{z \in \mathbb{C} \mid N_p^n \rightarrow \alpha, n \rightarrow \infty\}$$

を根 α の収束鉢 (attracting basin) という。また、attracting basin のうち α を含む連結成分を直接鉢 (immediate basin) といひ $B(\alpha)$ と書く。

Newton 写像には、次のような性質がある。

- $B(\alpha)$ は単連結である。 ([Prz89])
- ∞ は $p(z)$ の各根の直接鉢の境界上にある。 ([Fat20])
- $N|_{B(\alpha)}$ の局所次数が s ならば、 $B(\alpha)$ は ∞ に伸びる $s - 1$ 個の水路をもつ。 ([Prz89])

2. Misiurewicz point

2.1. 細い水路をもつ直接鉢

この節では、根 α の直接鉢の境界と、その吸引鉢の境界が交わることがあるか？ということを考える。視覚的な面から簡単にいえば、「直接鉢に、自分と同じ色のコブがつくか？」ということである。もしこのようなことが生じれば、 ∞ にのびるいくらでも細い水路をもつ直接鉢がえられる。従って、直接鉢の水路の幅を、多項式の次数のみで下から評価することは出来ない。

ここでの直接鉢の水路の幅とは、原点を中心とする半径 R の円上に中心を持ち根 α の直接鉢にすっぽりはいるような円の直径のことをさすことにする。(Fig. 1 参照)

定義 1 直接鉢が ∞ にのびるいくつかの水路をもつとき、最も幅の広い水路の幅を、直接鉢の幅 と定義する。

このとき、多項式の次数のみで、直接鉢の幅を下から評価することが出来ないだろうか。

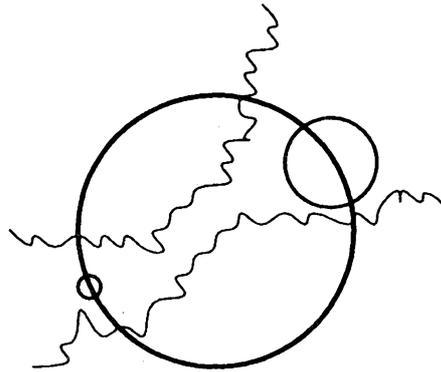


Fig. 1. width of a channel $B(\alpha)$

以下では 3 次多項式に話を限る。共役性により次の Thurston model を用いて一般性を失わない。

$$\{p_\lambda(z) = (z-1)(z + \frac{1}{2} + \lambda)(z + \frac{1}{2} - \lambda)\}$$

$\{p_\lambda\}$ に対する Newton 写像族は次のようになる。

$$\left\{ N_{p_\lambda}(z) = \frac{2z^3 + \lambda^2 - \frac{1}{4}}{3z^2 - (\lambda^2 + \frac{3}{4})} \right\}$$

ここで Λ を、

$$\Lambda : \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \cup \left\{ -\frac{1}{2} + e^{i\theta}; 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{2} + e^{i\theta}; \frac{2\pi}{3} \leq \theta \leq \pi \right\}$$

のようにすれば、 Λ は、この 3 次 Newton 写像のパラメータ平面の基本領域である [Tan]。すなわち任意の N_p にたいして、共役となる N_{p_λ} , $\lambda \in \Lambda$ が存在する。(Fig. 2 参照)

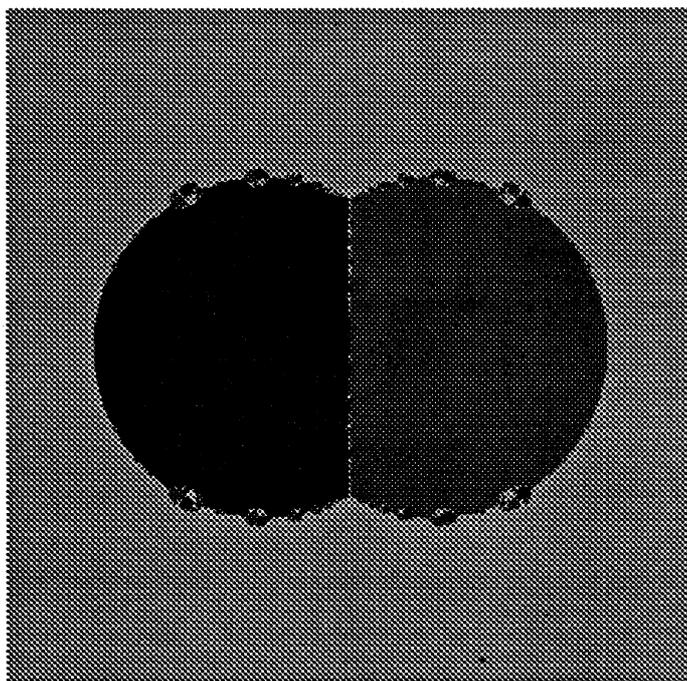


Fig. 2. Parameter plane of Thurston model

Thurston model では族 $\{N_{p_\lambda}\}_\lambda$ に共通に ∞ はいつでも反発的不動点であり、 0 は free critical point である。その critical value $-\frac{\lambda^2-1/4}{\lambda^2+3/4}$ の存在範囲は境界は $x^2 - y^2 > \frac{1}{2}$, ($x > 0$, $z = x + iy$) である。

ここで 0 が前周期点になるようなパラメータ λ 、たとえば、 $0 \rightarrow N_{p_\lambda}(0) \rightarrow \infty$ となる λ と $0 \rightarrow N_{p_\lambda}(0) \rightarrow N_{p_\lambda}(N_{p_\lambda}(0)) \rightarrow \infty$ となる λ を数式処理システム MACSYMA で求めると次のような答えを得る。

$0 \rightarrow N_{p_\lambda}(0) \rightarrow \infty$ について

$$\lambda = \begin{cases} 0 \pm 0.2686733i, \\ \pm(1.05190170 \pm 0.8339091i) \end{cases}$$

$0 \rightarrow N_{p_\lambda}(0) \rightarrow N_{p_\lambda}(N_{p_\lambda}(0)) \rightarrow \infty$ について

$$\lambda = \begin{cases} 0 \pm 0.12156018i, \\ 0 \pm 0.30070562i, \\ 0 \pm 0.44270458i, \\ \pm(0.62110802 \pm 0.9926393i), \\ \pm(1.38840381 \pm 0.4590628i), \\ \pm(0.96875716 \pm 0.8833270i). \end{cases}$$

このパラメータに対する N_p の鉢の様子は Fig. 3 のようになり、直接鉢に、吸引鉢がついている様子がみられる。

方程式の根 λ は、いわゆる Misiurewicz point である。この点において、2 次多項式族 $\{z^2 + c\}$ 。と同じように、この値を中心にしたパラメータ平面は、くり込みに対して自己



Fig. 3. Same colored lumps stick to the immediate basin

相似であることが観察される。同様に、 $N_{p_\lambda}(0)$ を中心にしたダイナミカル平面でも同じことがおこる。

2次写像族では Misiurewicz point で他者相似性があることが知られている [Tan85]。

Thurston model でも Misiurewicz point で Tan Lei [Tan85] の意味で (Hausdorff distance) 他者相似性が観測される。(Fig. 4、Fig. 5 参照。)

この λ を少し摂動させて τ とすると N_{p_τ} の free critical point が直接鉢の中に入って ∞ に延びる新たな細い水路ができる。したがって直接鉢は ∞ に延びる2本の水路を持つ。 τ の取り方によってこの水路の幅はいくらでも小さくすることができる。すなわち、前節の鉢の幅がいくらでも0に近づくような例をつくることのできるのである。(Fig. 6 参照。)

このように2本以上の水路がある場合には、 ∞ の近傍で直接鉢のセクターを取るときに太い方を取ることは自然である。直接鉢の水路の幅は、free critical point のある場所によって決まるのではないかと考えられる。

3. Width of basin

ここでは、 d 次多項式として centered な $P_d(1)$ 多項式について考える。任意の多項式はこのような多項式と共役になるので、Newton 法を研究するときには $P_d(1)$ に属する centered な多項式のみを考えれば十分である。

3.1. 直接鉢の水路の幅

Manning [Man86]、Sutherland [Sut90] および [NF93] の結果より、多項式の Newton

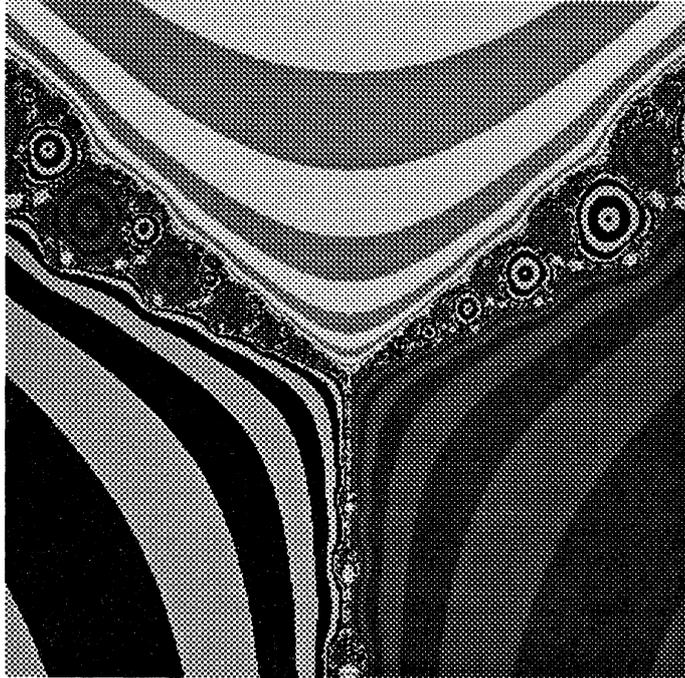


Fig. 4. “Misiurewicz point” of N_p : Parameter plane

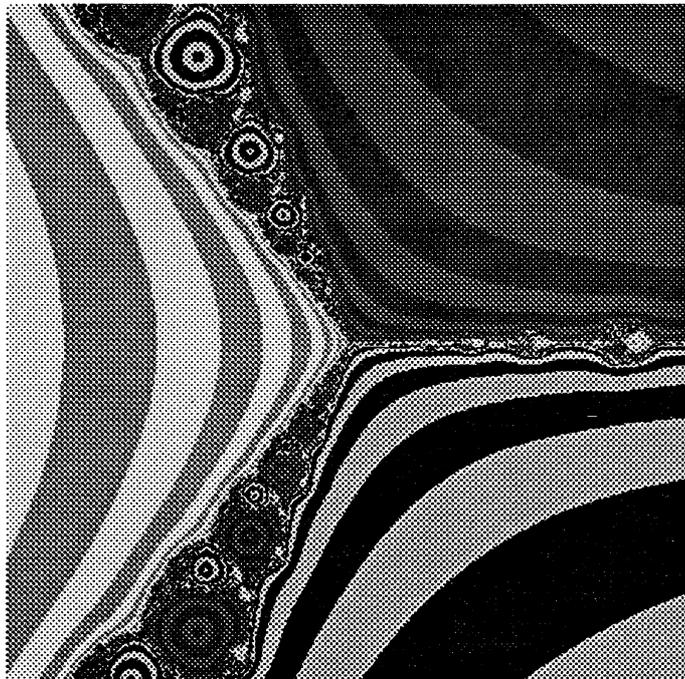


Fig. 5. “Misiurewicz point” of N_p : Dynamical plane

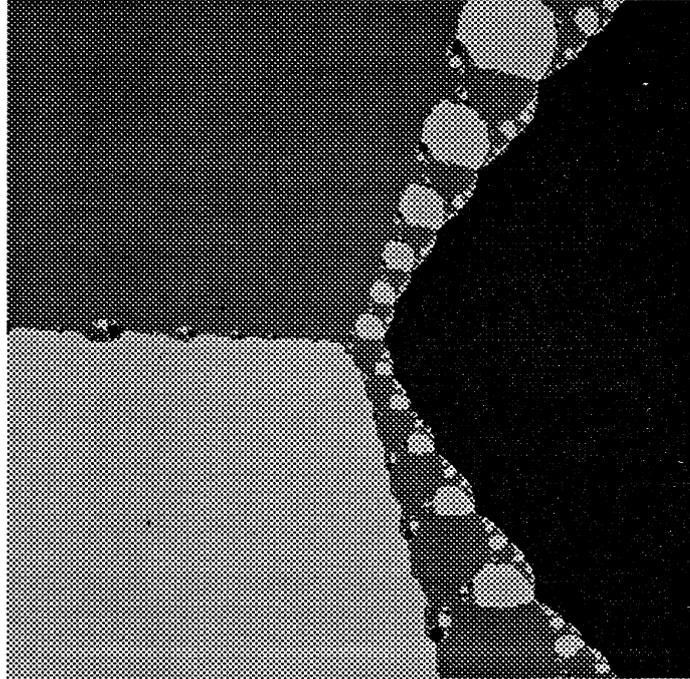


Fig. 6. Immediate basin with a narrow channel

写像の直接鉢の水路の幅の下からの評価が得られている。

Newton 写像に対して、根 α の直接鉢 $B(\alpha)$ は単連結であることが知られている [Prz89]。よって、Riemann の写像定理より単位円板 \mathbf{D} から $B(\alpha) \rightarrow 0$ を α に移すような解析的微分同相写像がある。これを用いて、 $N|_{B(\alpha)}$ とブラシュケ積 M を共役にすることができる [Bur79]。

$$\begin{array}{ccc}
 B(\alpha) & \xrightarrow{N|_{B(\alpha)}} & B(\alpha) \\
 \uparrow h & & \uparrow h \\
 \mathbf{D} & \xrightarrow{M} & \mathbf{D}
 \end{array}$$

$$M(z) = ze^{i\theta} \prod_{j=1}^s \frac{z - \mu_j}{1 - \bar{\mu}_j z}$$

$M(z)$ は 0 を吸引的不動点として持ち、単位円上の ξ_1, \dots, ξ_s を反発的不動点として持つ。特に α が単根で $B(\alpha)$ が free critical point を含まないとき、 $M(z) = z^2$ になる。

定理 1 ([NF93]) ξ を $M(z)$ の不動点とすると、 $B(\alpha)$ は、すくなくとも、中心が $t_\xi \in B(\alpha)$, ($|t_\xi| = R > 2(d+1)/(d-1)$), で半径

$$\frac{(R-2)}{3d(1 + \sqrt{(M'(\xi))})}$$

の円を含む。

3.2. Blaschke Product の性質

定理 2 (Lucas test for Blaschke product)

$$M(z) = ze^{i\theta} \prod_{j=1}^s \frac{z - \mu_j}{1 - \bar{\mu}_j z}$$

のとき $M(z)$ の単位円内のすべての critical point は根の convex hull $\langle \{\mu_j\} \rangle$ に含まれている。

証明

$$\begin{aligned} M'(z) &= e^{i\theta} \prod_{j=1}^s \frac{z - \mu_j}{1 - \bar{\mu}_j z} + ze^{i\theta} \sum_{k=1}^s \frac{1 - |\mu_k|^2}{(1 - \bar{\mu}_k z)^2} \prod_{j \neq k} \frac{z - \mu_j}{1 - \bar{\mu}_j z} \\ &= \frac{1}{z} M(z) + M(z) \sum_{k=1}^s \frac{1 - |\mu_k|^2}{1 - \bar{\mu}_k z} \frac{1}{z - \mu_k} \end{aligned}$$

convex hull の外側の β で、 $M'(\beta) = 0$ になるものが存在したとする。

$M(\beta) \neq 0$ より

$$(*) \quad \frac{1}{\beta} + \sum_{k=1}^s \frac{1 - |\mu_k|^2}{1 - \bar{\mu}_k \beta} \frac{1}{\beta - \mu_k} = 0$$

$\mu_0 = 0$ において、

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^s \frac{1 - |\mu_k|^2}{1 - \bar{\mu}_k \beta} \frac{1}{\beta - \mu_k} &= 0 \\ \frac{1 - |\mu_k|^2}{1 - \bar{\mu}_k \beta} \frac{1}{\beta - \mu_k} &= \frac{1 - |\mu_k|^2}{1 - |\mu_k \beta|^2} \frac{1 - \mu_k \bar{\beta}}{\beta - \mu_k} \end{aligned}$$

ここで $|\beta| < 1$ なら

$$0 < \frac{1 - |\mu_k|^2}{1 - |\mu_k \beta|^2} \leq 1$$

よって

$$\frac{1 - \mu_k \bar{\beta}}{\beta - \mu_k}$$

の存在範囲を調べればよいが、ここでその逆数

$$\frac{\beta - \mu_k}{1 - \mu_k \bar{\beta}}$$

を考える。

β と convex hull を分離する単位円の直交円をとる。それを $\frac{\beta - z}{1 - \bar{\beta}z}$ で写せば、Fig. 7 のようになり、

$$\frac{\beta - \mu_k}{1 - \mu_k \bar{\beta}} > 0$$

よって (*) に矛盾。 ■

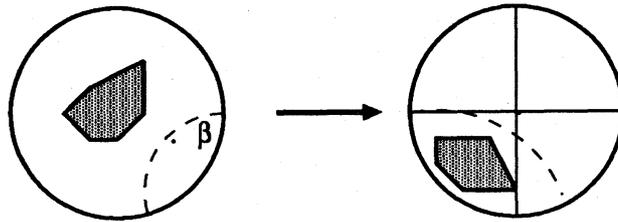


Fig. 7.

命題 1 (Blaschke product の fixed point の eigenvalue の評価)

$$M(z) = ze^{i\theta} \prod_{j=1}^s \frac{z - \mu_j}{1 - \bar{\mu}_j z}$$

のとき $M(z)$ の単位円上の不動点 ξ_i , ($i = 0, 1, \dots, s$) の eigenvalue は

$$M'(\xi_i) = 1 + \sum_{k=1}^s \frac{1 - |\mu_k|^2}{|\xi_i - \mu_k|^2}$$

で与えられる。

証明

ξ_1, \dots, ξ_s が単位円上の不動点であることから

$$M(\xi_i) = \xi_i e^{i\theta} \prod_{j=1}^s \frac{\xi_i - \mu_j}{1 - \bar{\mu}_j \xi_i} = \xi_i$$

ここで

$$M'(z) = e^{i\theta} \prod_{j=1}^s \frac{z - \mu_j}{1 - \bar{\mu}_j z} + ze^{i\theta} \sum_{k=1}^s \frac{1 - \mu_k \bar{\mu}_k}{(1 - \bar{\mu}_k z)^2} \prod_{j \neq k} \frac{z - \mu_j}{1 - \bar{\mu}_j z}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} M'(\xi_i) &= 1 + \sum_{k=1}^s \xi_i e^{i\theta} \left(\prod_{j=1}^s \frac{\xi_i - \mu_j}{1 - \bar{\mu}_j \xi_i} \right) \frac{1 - \mu_k \bar{\mu}_k}{1 - \bar{\mu}_k \xi_i} \frac{1}{\xi_i - \mu_k} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^s \xi_i \frac{1 - |\mu_k|^2}{(1 - \bar{\mu}_k \xi_i)(\xi_i - \mu_k)} \end{aligned}$$

$\xi_i \bar{\xi}_i = 1$ より

$$\begin{aligned} &= 1 + \sum_{k=1}^s \frac{1 - |\mu_k|^2}{(\bar{\xi}_i - \bar{\mu}_k)(\xi_i - \mu_k)} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^s \frac{1 - |\mu_k|^2}{|\xi_i - \mu_k|^2} \end{aligned}$$

ゆえに

$$M'(\xi_i) = 1 + \sum_{k=1}^s \frac{1 - |\mu_k|^2}{|\xi_i - \mu_k|^2}$$

ξ_i の方向でのセクターが大になるためには $M'(\xi_i)$ が小であることが必要である。すなわち、 $|1 - \bar{\mu}_j \xi_k|^2$ が大でなければならない。

これにより、各 μ_i との距離が一番遠い ξ を選べば、そこでのセクターが最大であることがわかる。Fig. 8、Fig. 9 参照。

3.3.3 次方程式の直接鉢の幅

まず、 $p(z)$ の根 α が単根で、その直接鉢に free critical point を1つ含むときを考える。

N_p と共役なブラシュケ積は次のような形をしている。

$$M(z) = z^2 \frac{z - \mu}{1 - \bar{\mu}z}$$

この $M(z)$ の単位円上での不動点を計算すると、

$$\xi_1 = ib + \sqrt{1 - b^2}, \quad \xi_2 = ib - \sqrt{1 - b^2}, \quad \text{ただし } \mu = a + ib$$

となる。そこでの固有値を計算すると

$$M'(\xi_1) = 2 + \frac{1 - a^2 - b^2}{(\sqrt{1 - b^2} - a)^2}, \quad M'(\xi_2) = 2 + \frac{1 - a^2 - b^2}{(-\sqrt{1 - b^2} - a)^2}$$

ここで、 $a > 0$ なら $3 \geq M'(\xi_1) > M'(\xi_2)$

したがって、セクターを考えるとき、 ξ_2 に対する方が opening modulus が大きいことがわかる。この大きいほうの modulus の最小値は $\frac{\pi}{\log 3}$ となる。また free critical point を含まない直接鉢のセクターの opening modulus は $\frac{\pi}{\log 2}$ である。すなわち $\frac{\pi}{\log 3} < \frac{\pi}{\log 2}$ である。

定理1の R として $R > 3$ と取れる。

いま、 $R = 3, d = 3, M'(\xi) = 3$ として、 $\frac{2}{9(1 + \sqrt{3})}$ を得る。

∞ にのびるいくつかの水路のうちで最も幅の広い水路の幅をもって、その直接鉢の幅とすれば次の定理を得る。

定理3 3つの相異なる根を持つ centered な3次多項式を $P \in \mathcal{P}_d(1)$ とするとき、中心 $t, |t| = 3$ 上の直接鉢の幅は、 $\frac{1}{9(2 + \sqrt{3})}$ である。

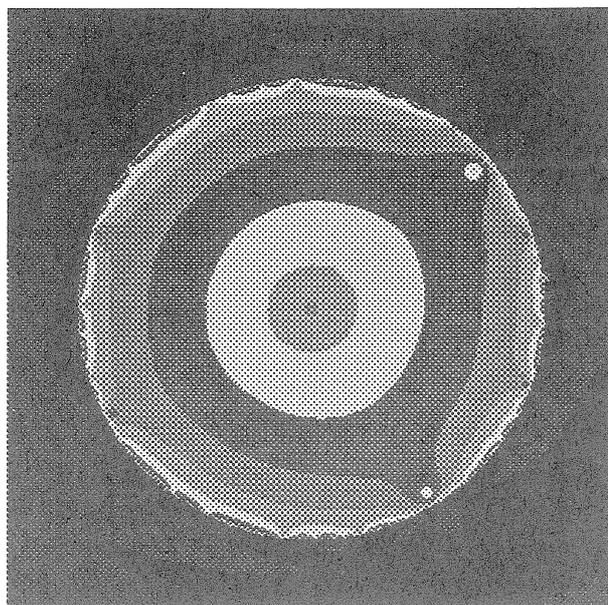


Fig. 8. Blaschke product of $M(z) = z^2 \frac{z-\lambda}{1-\lambda z} \frac{z-\mu}{1-\mu z}$ $\lambda = 0.6 - 0.8i$, $\mu = 0.7 + 0.6i$

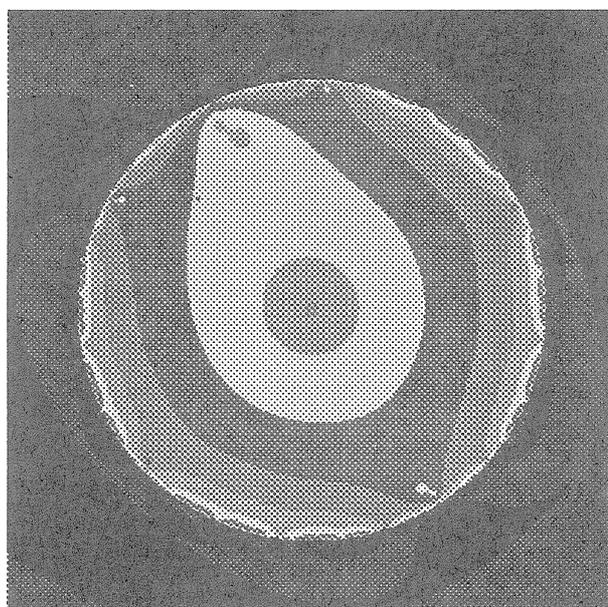


Fig. 9. Blaschke product of $M(z) = z^2 \frac{z-\lambda}{1-\lambda z} \frac{z-\mu}{1-\mu z}$ $\lambda = -0.3 + 0.75i$, $\mu = 0.4 + 0.8i$

4. Manning の アルゴリズム

次の結果は、Manning による、多項式の次数のみによって決まる直接鉢の幅である。
 定理 ([Man86]) $p \in \mathcal{P}_d(1)$ を次数 $d (> 10)$ の centered な多項式とし、 α を p の exposed root とする。このとき、

$|t| \leq d$, $|N^{-1}(t)| > d$ をみたす t が存在して、 $B(\alpha)$ は中心 t 、半径

$$\frac{0.0738|t|}{d \log d}$$

の円板を含む。

これをもとにした、Manning のアルゴリズムを紹介する。

アルゴリズム

$$p(z) = z^d + a_{d-2}z^{d-2} + \cdots + a_0, \quad d \geq 10, |a_i| \leq 1$$

$\varepsilon > 0$

Put $R = (19.2d \log d + 2)\pi$

$$\omega = \exp\left(\frac{2\pi i}{R}\right)$$

$$\rho = 1 - \frac{2\pi}{R}$$

$$\text{Array } A \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \rho^j d \omega^k; 0 \leq j < -\left(\frac{R}{2\pi}\right) \log\left(1 - \frac{1}{d} - \frac{2}{d^2}\right) + 1, 0 \leq k < R \right\}$$

各 (j, k) に対し、 $w = N^l(\rho^j d \omega^k)$, $1 \leq l \leq d \log \frac{d^3}{\varepsilon}$ を計算

If $|w - N(w)| < \frac{\varepsilon}{d}$ Then w が根である。

Else 次の (j, k) を計算。

このアルゴリズムから、Newton 法の計算回数としては、多くても

$$cd^2 (\log d)^2 \log\left(\frac{d^3}{\varepsilon}\right)$$

となるような、 $c < 800$ が存在する。

参 考 文 献

- [Bur79] R. Burckel. An Introduction to Classical Complex Analysis, 1979. Academic Press, New York.
- [Fat20] P. Fatou. Sur les Equations fonctionnelles. *Bull. Soc. Math. France*, 48:208–304, 1920.
- [Man86] A. Manning. How to be Sure of Solving a Complex Polynomial using Newton's Method, 1986. preprint, Math.Inst., Univ. Warwick.
- [NF] K. Nishizawa and M. Fujimura. Global Convergence Behavior of Newton's Method. 数理解析研究所講究録 (京都大学), to appear.

- [NF92] K. Nishizawa and M. Fujimura. Families of Rational Maps and Convergence Basins of Newton's Method. *Proc. Japan Acad.*, 68(6), 1992.
- [NF93] K. Nishizawa and M. Fujimura. Families of Rational Maps and Geometric Method in Newton Map. In *Chaotic Dynamical Systems*, S. Ushiki, editor, World Scientific Pub., 1993. to appear.
- [Prz89] F. Przytycki. Remarks on the Simple Connectedness of basins of Sinks for Iterations of Rational Maps. *Dynamical Systems and Ergodic theory*, PWN-Polish Scientific Pub., pages 229–235, 1989.
- [Sut90] S. Sutherland. Finding Roots of Complex Polynomials with Newton's Method, 1990. Preprint # 1990/7, SUNY Stony Brook.
- [Tan] L. Tan. Cubic Newton's method of Thurston's type. preprint.
- [Tan85] L. Tan. Ressemblance entre l'Ensemble de Mandelbrot et l'Ensemble de Julia au Voisinage d'un Point de Misiurewicz. In *Étude Dynamique des Polynômes Complexes*, A. Douady and J. H. Hubbard, editors, pages 139–154. Publications Mathématiques d'Orsay, 1985.