

On spin models and triply regular association schemes

François Jaeger (IMAG Grenoble) 述
 生田卓也、川越謙一 (九大・理) 記

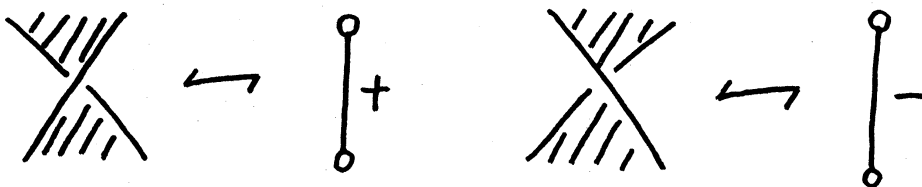
1 Introduction

$G = (V, E)$ を頂点の集合 V 、辺の集合 E とする向きのついていない有限グラフで、多重辺やループをもってもよいとする。 E から \mathbb{C} 上の $n \times n$ 対称行列への写像 W を weight function という。また、 V から $\{1, \dots, n\}$ への写像を state という。state σ が与えられた時、頂点 u と v を端点にもつ辺 e に複素数 $W_e(\sigma(u), \sigma(v))$ を対応させる。そこで全ての辺に関する積を $\langle G|\sigma \rangle$ とかく。この時、 (G, W) の partition function Z を次で定める。

$$Z(G, W) = \sum_{\sigma} \langle G|\sigma \rangle$$

例 1 (spin model) link の diagram L から signed graph $G(L)$ を次のように構成する。

- (1) link の diagram から得られる各領域をチェッカー盤の様に塗る。この時、有界でない領域は白と決めておく。
- (2) 黒い領域に頂点、交点に符号付き辺を下図の様に対応させる。



辺の符号に応じて weight function W_+, W_- を2つ用意する。 W_+, W_- が次の条件を満たす時、3つ組 (X, W_+, W_-) を spin model という。

- (0) $W_+(\alpha, \beta) = W_+(\beta, \alpha), W_-(\alpha, \beta) = W_-(\beta, \alpha)$
- (1) $W_+(\alpha, \beta)W_-(\alpha, \beta) = 1$
- (2) $\sum_x W_+(\alpha, x)W_-(x, \beta) = n\delta(\alpha, \beta)$
- (3) $\sum_x W_+(\alpha, x)W_+(\beta, x)W_-(\gamma, x) = \sqrt{n}W_+(\alpha, \beta)W_-(\beta, \gamma)W_-(\gamma, \alpha)$

但し、 α, β, γ は $\{1, \dots, n\}$ の任意の元、 δ はクロネッカーのデルタとする。この時、 $(\frac{1}{\sqrt{n}})^{|V|}Z(G(L), W)$ は link L の不変量となる。(Jones)

2 Association schemes

定義 2 X を $|X| = n$ の有限集合、 R_i ($i = 0, \dots, d$) を $X \times X$ の部分集合とする。この時、 $\mathcal{X} = (X, \{R_i\}_{i=0, \dots, d})$ が (symmetric) association scheme with classes d とは次の4つの条件を満足するときをいう。

- (i) $R_0 = \{(x, x) | x \in X\}$
- (ii) $R_0 \cup R_1 \cup \dots \cup R_d = X \times X, R_i \cap R_j = \emptyset$ ($i \neq j$)
- (iii) $R_i^T = \{(y, x) | (x, y) \in R_i\} = R_i$
- (iv) 任意の $(x, y) \in R_k$ に対し、 $\{z \in X | (x, z) \in R_i, (z, y) \in R_j\}$ の個数は i, j, k のみによる。この個数を p_{ij}^k と書く。

各 R_i に対し、0 又は 1 を成分にもつ $n \times n$ 行列 A_i を次のようにして対応させる。もし $(x, y) \in R_i$ ならば $A_i(x, y) = 1$ 、 $(x, y) \notin R_i$ ならば $A_i(x, y) = 0$ とする。すると上の条件 (i), ..., (iv) は次と同値である。

$$(i') \quad A_0 = I \text{ (単位行列)}$$

$$(ii') \quad A_0 + A_1 + \dots + A_d = J := \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad A_i \circ A_j = 0 \quad (i \neq j)$$

$$(iii') \quad A_i^T = A_i$$

$$(iv') \quad A_i A_j = \sum_{k=0}^d p_{ij}^k A_k$$

但し、 $A \circ B = (a_{ij}) \circ (b_{ij}) := (a_{ij} b_{ij})$ と定義し、この積を Hadamard 積という。 \mathbb{C} 上の代数 $\mathcal{A} = \langle A_0, A_1, \dots, A_d \rangle$ を association scheme \mathcal{X} の Bose-Mesner algebra という。 \mathcal{A} は普通の行列の積と Hadamard 積の 2 つの積について閉じている。以後 weight function W により定まる行列 W_e は \mathcal{A} に属すると仮定する。即ち、

$$W_e = \sum_{i=0}^d t_i^{(e)} A_i$$

ここで G を固定すると $Z_G = Z(G, W)$ は W_e に関する多重線形写像となる。

$$Z_G : \mathcal{A} \otimes \dots \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$W_{e_1} \otimes \dots \otimes W_{e_m} \mapsto Z(G, W) = (W_{e_1}, \dots, W_{e_m})$$

特に次のことが成り立つ。

$$Z \circlearrowleft_M = \sum_{\sigma} M(\sigma(v), \sigma(v)) = \text{Tr}(M)$$

$$Z \circ \underline{M} \circ = \sum_{\sigma} M(\sigma(u), \sigma(v)) = \tau(M)$$

ここで $\theta = \frac{1}{n} \text{Tr}$, $\theta^* = \frac{1}{n} \tau$ とおくと $M \in \mathcal{A}$ となる任意の M に対して

$$I \circ M = M \text{ の対角成分} = \theta(M) I$$

$$J M = M \text{ の行、又は列の和} = \theta^*(M) J$$

となるので次が成り立つ。

$$Z \circlearrowleft_e = \theta(W_e) Z \circlearrowleft$$

$$Z \circ \underline{e} \circ = \theta^*(W_e) Z \circ$$

よって

$$Z \circlearrowleft \circ = Z \circlearrowleft \circ (id^{\otimes m-1} \otimes \theta)$$

$$Z \circ \circ \underline{} \circ = Z \circ \circ \underline{} \circ (id^{\otimes m-1} \otimes \theta^*)$$

が成り立つ。但し、線形写像のテンソル積の順序に注意する必要があるが、簡単のため順序は無視する。普通の行列の積を $\mu : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ 、Hadamard 積を $\mu^* : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ とおくと

$$Z \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \circ \quad \circ \\ \text{---} \\ \circ \quad \circ \\ \diagdown \quad \diagup \\ M \quad N \end{array} = Z \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \circ \quad \circ \\ \text{---} \\ \circ \quad \circ \\ \diagdown \quad \diagup \\ MN \end{array}$$

$$\sum_x M(\alpha, x)N(x, \beta) = \mu(M \otimes N)(\alpha, \beta)$$

$$Z \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \circ \quad \circ \\ \text{---} \\ \circ \quad \circ \\ \diagdown \quad \diagup \\ M \quad N \end{array} = Z \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \circ \quad \circ \\ \text{---} \\ \circ \quad \circ \\ \diagdown \quad \diagup \\ M \circ N \end{array}$$

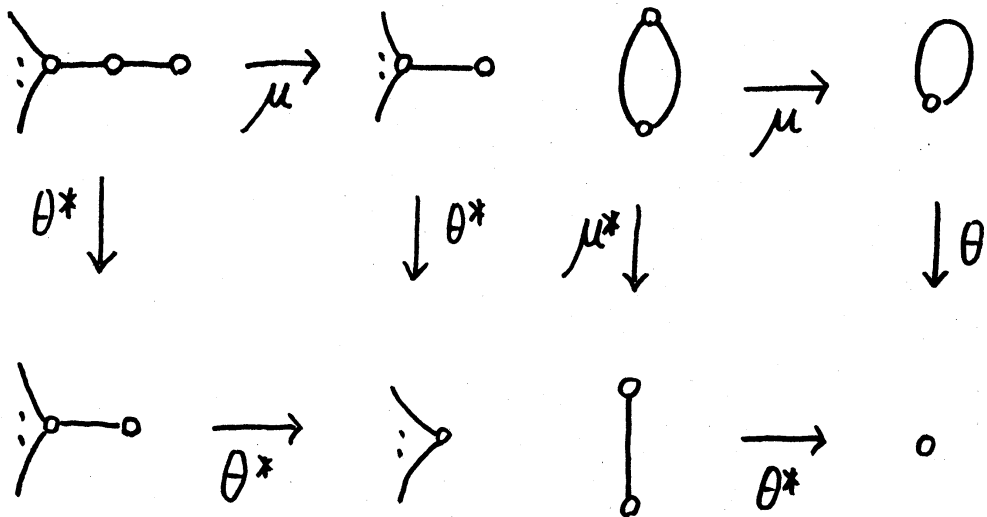
$$M(\alpha, \beta) \circ N(\alpha, \beta) = \mu^*(M \otimes N)(\alpha, \beta)$$

より次が成り立つ。

$$Z \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \circ \quad \circ \\ \text{---} \\ \circ \quad \circ \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} = Z \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \circ \quad \circ \\ \text{---} \\ \circ \quad \circ \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \circ (id^{\otimes m-1} \otimes \mu)$$

$$Z \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \circ \quad \circ \\ \text{---} \\ \circ \quad \circ \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} = Z \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \circ \quad \circ \\ \text{---} \\ \circ \quad \circ \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \circ (id^{\otimes m-1} \otimes \mu^*)$$

上のことより下図は可換となる。



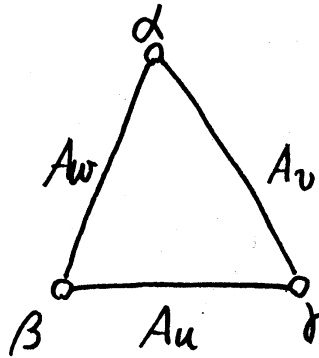
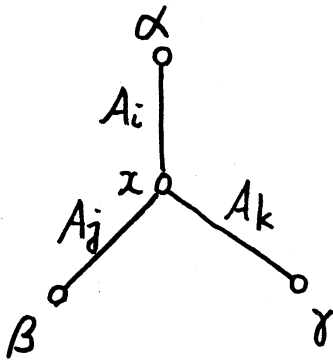
φ を基底 $X = \{1, \dots, n\}$ をもつベクトル空間とする。2つの写像 $\pi, \pi^* : A \otimes A \otimes A \rightarrow \varphi \otimes \varphi \otimes \varphi$ を次で定義する。

$$\begin{aligned}\pi(A \otimes B \otimes C) &:= \sum_{\alpha, \beta, \gamma} \sum_x A(\alpha, x) B(\beta, x) C(\gamma, x) \alpha \otimes \beta \otimes \gamma \\ \pi^*(A \otimes B \otimes C) &:= \sum_{\alpha, \beta, \gamma} A(\beta, \gamma) B(\gamma, \alpha) C(\alpha, \beta) \alpha \otimes \beta \otimes \gamma\end{aligned}$$

定義 3 association scheme $\mathcal{X} = (X, \{R_i\}_{i=0, \dots, d})$ が triply regular とは任意の i, j, k, u, v, w に対し次のような定数 $K_{ijk, uvw}$ が存在することである。

$(\alpha, \beta) \in R_w, (\beta, \gamma) \in R_u, (\gamma, \alpha) \in R_v$ となる任意の $\alpha, \beta, \gamma \in X$ に対し

$$K_{ijk, uvw} = |\{x \in X \mid (\alpha, x) \in R_i, (\beta, x) \in R_j, (\gamma, x) \in R_k\}|$$



ここで A が triply regular とすると

$$\begin{aligned}& \sum_{\alpha, \beta, \gamma} \sum_x A_i(\alpha, x) A_j(\beta, x) A_k(\gamma, x) \alpha \otimes \beta \otimes \gamma \\ &= \sum_{\alpha, \beta, \gamma} \sum_{u, v, w} A_u(\beta, \gamma) A_v(\gamma, \alpha) A_w(\alpha, \beta) K_{ijk, uvw} \alpha \otimes \beta \otimes \gamma\end{aligned}$$

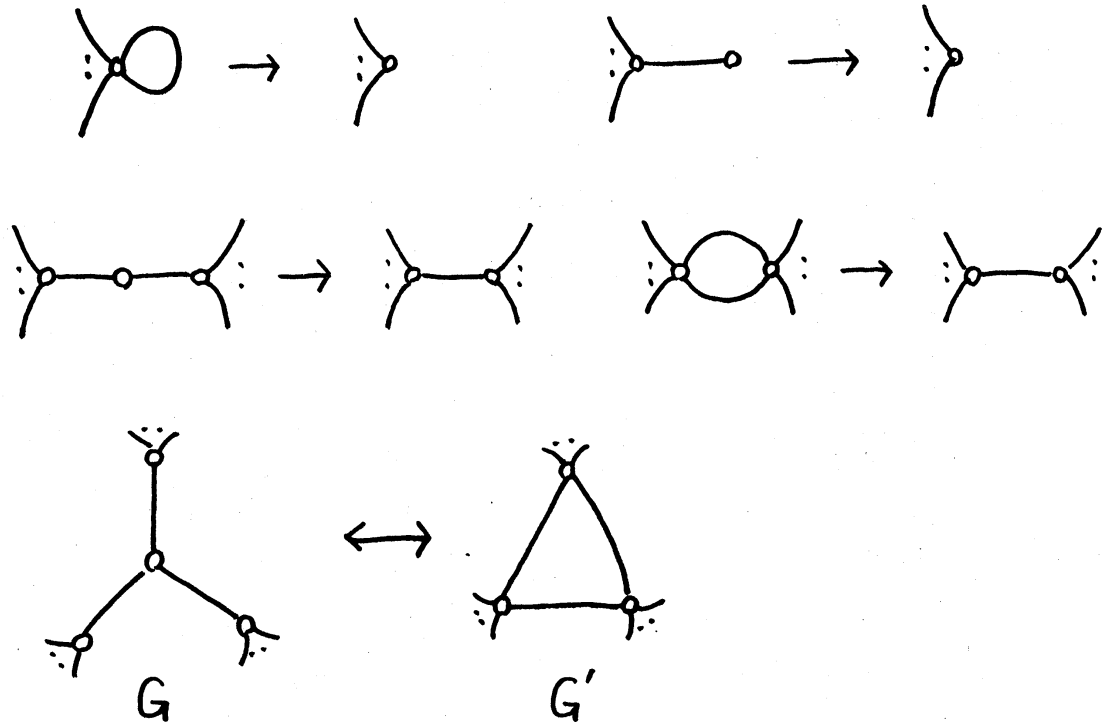
となるので次が成り立つ。

$$\begin{aligned}\pi(A_i \otimes A_j \otimes A_k) &= \sum_{u, v, w} K_{ijk, uvw} \pi^*(A_u \otimes A_v \otimes A_w) \\ &= \pi^*\left(\sum_{u, v, w} K_{ijk, uvw} A_u \otimes A_v \otimes A_w\right) \\ &= \pi^*(K(A_u \otimes A_v \otimes A_w))\end{aligned}$$

但し、 $K : A \otimes A \otimes A \rightarrow A \otimes A \otimes A$ は線形写像。この逆も成り立つので次の命題を得る。

命題 4 \mathcal{A} が triply regular であるための必要十分条件は $\pi = \pi^* \circ K$ を満たす線形写像 $K : \mathcal{A}^{\otimes 3} \rightarrow \mathcal{A}^{\otimes 3}$ が存在することである。

定理 5 (Epifanov, Grünbaum, Truemper) 任意の平面グラフは次の 5 つの操作で 1 点へ移る。



この定理を用いて Z_G を帰納的に計算するためには $Z_{G'} = Z_G \circ (K^* \otimes id)$ となる写像 $K^* : \mathcal{A}^{\otimes 3} \rightarrow \mathcal{A}^{\otimes 3}$ が必要となる。そのためには $Im\pi = Im\pi^*$ であればよい。

定義 6 \mathcal{A} が exactly triply regular とは $Im\pi = Im\pi^*$ が成立する時にいう。

\mathcal{A} が triply regular ならば常に $Im\pi \subseteq Im\pi^*$ が成り立つことに注意。

定理 7 G を平面グラフ、 \mathcal{A} を exactly triply regular とする。この時、 Z_G は extended $\Delta - Y$ transformation により計算可能である。

系 8 この時、 Z_G は \mathcal{A} の parameter $(n, \theta, \theta^*, \mu, \mu^*, K, K^*)$ のみによる。

3 examples and applications

例 9 strongly regular な subconstituents をもつ strongly regular graph は triply regular 。

例 10 [3] において link の不変量の構成の時に用いられる distance regular graph は triply regular 。

応用 11 \mathcal{A} を exactly triply regular、 $W_+, W_- \in \mathcal{A}$ を link の spin model とする。この時、extended $\Delta - Y$ transformation を用いて link の不変量は計算できる。例えば extended $\Delta - Y$ transformation を diagram 表示すると下図のようになる。

$$\text{Diagram 1} = \sum K_{ijk, uvw} \text{Diagram 2}$$

参考文献

- [1] E.Bannai and T.Ito, Algebraic Combinatorics I: Association Schemes, Benjamin/Cummings, Menlo, CA, 1984.
- [2] V.F.R.Jones, On knot invariants related to some statistical mechanical models, Pacific. J. Math., **137**(1989), 311-334.
- [3] K.Nomura, Spin models constructed from Hadamard matrices, preprint.