

## 独立確率変数列を用いて構成された 確率微分方程式の近似解について

山梨大学教育学部 金川 秀也 (Shuya KANAGAWA)

### はじめに

伊藤型確率微分方程式 (SDE) の解をコンピュータシミュレーションによって近似的に再現するには、Euler-Maruyamaの近似解やこれを改良したいくつかの近似解が用いられる (詳しくは Kloeden-Platen (1992)を参照)。一般に近似解は一様疑似乱数からつくられる正規分布に従う確率変数列「正規疑似乱数」によって構成されるが、疑似乱数を用いる限り、これらの変数が完全な独立性と完全な正規分布を持つことは不可能である。本報告では、特に正規性が少し崩れた場合に、最も基本的な近似解である Euler-Maruyamaの近似解と真の解との誤差を考察する。SDEは簡単のために1次元の場合を考えるが、多次元の場合もほぼ同様である。

### 1. Euler-Maruyamaの近似解

伊藤型 SDE を考える。

$$(1.1) \quad \begin{cases} dX(t) = \sigma(t, X(t))dB(t) + b(t, X(t))dt, & 0 \leq t \leq 1 \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

ここで、 $\{B(t), 0 \leq t \leq 1\}$  は標準ブラウン運動、 $\sigma(t, x)$  と  $b(t, x)$  は可測関数とする。  $\sigma(t, x)$  と  $b(t, x)$  が Lipschitz 条件と linear growth の条件を満たすとき SDE (1.1) は唯一の真の解  $\{X(t), 0 \leq t \leq 1\}$  を持つが、その近似解として以下のように確率変数列  $\{y_k, k \geq 1\}$  を用いて Euler-Maruyama の近似解と呼ばれる 2 つのタイプの  $D[0, 1]$  上の確率過程  $\{Y_n(t), 0 \leq t \leq 1\}$  と  $\{Z_n(t), 0 \leq t \leq 1\}$  が構成される。

$$y_k := X_0 + \sum_{j=1}^k \sigma\left(\frac{j-1}{n}, y_{j-1}\right) \eta_j + \sum_{j=1}^k b\left(\frac{j-1}{n}, y_{j-1}\right) / n, \quad k=0, 1, \dots, n,$$

とおく。ここで、 $\{\eta_k\}$  は i.i.d. 確率変数列で、

$$\eta_k := B\left(\frac{k}{n}\right) - B\left(\frac{k-1}{n}\right), \quad k=1, \dots, n.$$

$$(1.2) \quad \begin{cases} Y_n(t) := y_k, & k/n \leq t < (k+1)/n, \quad k=0, \dots, n-1 \\ Y_n(1) := y_n, \end{cases}$$

$$(1.3) \quad Z_n(t) := X_0 + \int_0^t \sigma_n(u) dB(u) + \int_0^t b_n(u) du, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

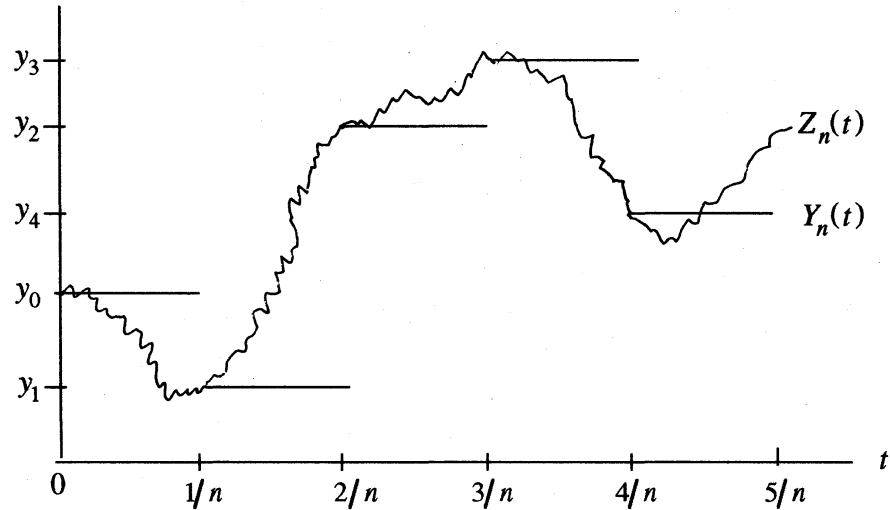
ただし、

$$\sigma_n(t) := \sigma_n\left(\frac{k-1}{n}, y_{k-1}\right) \quad k/n \leq t \leq (k+1)/n, \quad k=0, \dots, n-1,$$

$$b_n(t) := b_n\left(\frac{k-1}{n}, y_{k-1}\right) \quad k/n \leq t \leq (k+1)/n, \quad k=0, \dots, n-1.$$

$Z_n(t)$  は Maruyama (1955) において SDE の解の存在とその一意性を示すために導入されたもので、確率積分で表現されているため直接

コンピュータシミュレーションに用いることはできない。一方  $Y_n(t)$  は各区間  $[(k-1)/n, k/n]$  で定値にしてシミュレーションに使えるようにしたもので、 $Y_n(t)$  と  $Z_n(t)$  は  $t=k/n, k=0, \dots, n$  で一致する。



(図 1)

$Y_n(t)$ ,  $Z_n(t)$  共に平均収束の意味で  $X(t)$  に収束し、その収束の速さも良く知られている (Gihman-Skorohod (1979), Shimizu (1984), Kanagawa (1988)).

定理 1.  $\sigma(t, x)$ ,  $b(t, x)$  に対して

$$(1.4) \quad |\sigma(t, x) - \sigma(s, y)|^2 + |b(t, x) - b(s, y)|^2 \leq K_1 (|x - y|^2 + |t - s|^2)$$

$$(1.5) \quad |\sigma(t, x)|^2 + |b(s, y)|^2 \leq K_2$$

を仮定する。ただし、 $K_1, K_2$  はある正の定数。このとき、任意の  $p \geq 2$  に対して

$$(1.6) \quad E \left( \max_{0 \leq t \leq 1} |X(t) - Y_n(t)|^p \right) = o \left( n^{-p/2} (\log n)^\varepsilon \right) \quad \text{as } n \rightarrow \infty$$

*for some  $\varepsilon > p/2$ ,*

$$(1.7) \quad E \left( \max_{0 \leq t \leq 1} |X(t) - Z_n(t)|^p \right) = O \left( n^{-p/2} \right) \quad \text{as } n \rightarrow \infty.$$

次に近似解が正規分布に従わない確率変数列  $\{\xi_k\}$  によって構成される場合を考える。Kanagawa (1989) は  $\{\xi_k\}$  が i.i.d. で、単に  $2+\delta$  次モーメントを持つ場合に収束の速さを調べた。

定理 2.  $\{\xi_k, k \geq 1\}$  は i.i.d. で

$$E(\xi_1) = 0, E(\xi_1^2) = 1, E(\xi_1^{2+\delta}) < \infty \quad \text{for some } \delta > 0.$$

また確率変数列  $\{x_k, k \geq 1\}$  を

$$x_k := X_0 + \sum_{j=1}^k \sigma \left( \frac{j-1}{n}, x_{j-1} \right) \xi_j / \sqrt{n} + \sum_{j=1}^k b \left( \frac{j-1}{n}, x_{j-1} \right) / n, \quad k=0, 1, \dots, n$$

とおき、 $\{x_k\}$  より近似解  $\{X_n(t), 0 \leq t \leq 1\}$  を次のように定義する。

$$\begin{cases} X_n(t) := x_k, & k/n \leq t < (k+1)/n, \quad k=0, \dots, n-1 \\ X_n(1) := x_n. \end{cases}$$

このとき、新たな確率空間上に  $\{X_n(t), 0 \leq t \leq 1\}$  と  $\{X(t), 0 \leq t \leq 1\}$  を以下が成立するように再構成できる。任意の  $p \geq 2$  に対して

$$(1.8) \quad E \left( \max_{0 \leq t \leq 1} |X(t) - X_n(t)|^p \right) = o \left( n^{-p\delta/2(2+\delta)} (\log n)^\varepsilon \right) \quad \text{as } n \rightarrow \infty$$

for any  $\varepsilon > (2+\delta)^2 / 2(3+\delta)$ ,

ただし、 $0 < \delta \leq 1$ とする。ここで  $n$  のオーダーは best possible である。

定理 2 では、 $\xi_1$  のモーメントの条件だけを仮定しているために、 $\xi_1$  の分布が正規分布に十分近くても収束の速さは改善されない。そこで、次に  $\xi_1$  の分布と正規分布の差を用いた評価を示す。 $\Phi(\cdot)$  を標準正規分布の分布関数、 $F(\cdot)$  を  $\xi_1$  の分布関数とする。

定理 3.  $\{\eta_k, k \geq 1\}$  は i.i.d. で  $E(\eta_1) = 0$ ,  $E(\eta_1^2) = 1$  とする。また、

$$v(F, \Phi) := \int_0^1 |F^{-1}(x) - \Phi^{-1}(x)| dx,$$

ただし、 $F^{-1}(x) := \inf \{s: F(s) > x\}$ ,  $\Phi^{-1}(x) := \inf \{s: \Phi(s) > x\}$  とする。このとき、新たな確率空間上に  $\{X_n(t), 0 \leq t \leq 1\}$  と  $\{X(t), 0 \leq t \leq 1\}$  を次が成立するように再構成できる。十分大きな  $n$  及び任意の  $p \geq 2$ ,  $\varepsilon > p/2$  に対して

$$(1.9) \quad E \left( \max_{0 \leq t \leq 1} |X(t) - X_n(t)|^p \right) = \max \left\{ K_3 v(F, \Phi)^{p/2}, K_4 n^{-p/2} (\log n)^\varepsilon \right\},$$

ただし、 $K_3, K_4$  は正の定数。

## 2. 定理 3 の証明

$k/n \leq t < (k+1)/n$ ,  $k=0, 1, \dots, n-1$  に対して、

$$(2.1) \quad E \left( \max_{0 \leq u \leq t} |X(u) - X_n(u)|^p \right)^{1/p} \leq E \left( \max_{0 \leq u \leq t} |X(u) - Y_n(u)|^p \right)^{1/p} \\ + E \left( \max_{0 \leq u \leq t} |X_n(u) - Y_n(u)|^p \right)^{1/p},$$

ただし、 $Y_n(t)$ は(1.2)で定義された近似解。さて $X_n(t)$ と $Y_n(t)$ の定義から、 $k/n \leq t < (k+1)/n$ ,  $k=0, 1, \dots, n-1$  に対して、

$$(2.2) \quad E \left( \max_{0 \leq u \leq t} |X_n(u) - Y_n(u)|^p \right) \leq E \left( \max_{1 \leq i \leq k} |x_i - y_i|^p \right) \\ \leq K_5 E \left( \max_{1 \leq i \leq k} \left| \sum_{j=1}^i \sigma \left( \frac{j-1}{n}, x_{j-1} \right) \frac{\xi_j}{\sqrt{n}} - \sum_{j=1}^i \sigma \left( \frac{j-1}{n}, y_{j-1} \right) \eta_j \right|^p \right) \\ + K_6 E \left( \max_{1 \leq i \leq k} \left| \sum_{j=1}^i b \left( \frac{j-1}{n}, x_{j-1} \right) / n - \sum_{j=1}^i b \left( \frac{j-1}{n}, y_{j-1} \right) / n \right|^p \right) \\ \leq K_7 E \left( \max_{1 \leq i \leq k} \left| \sum_{j=1}^i \sigma \left( \frac{j-1}{n}, x_{j-1} \right) \left( \frac{\xi_j}{\sqrt{n}} - \eta_j \right) \right|^p \right) \\ + K_8 E \left( \max_{1 \leq i \leq k} \left| \sum_{j=1}^i \left\{ \sigma \left( \frac{j-1}{n}, x_{j-1} \right) - \sigma \left( \frac{j-1}{n}, y_{j-1} \right) \right\} \eta_j \right|^p \right) \\ + K_6 E \left( \max_{1 \leq i \leq k} \left| \sum_{j=1}^i b \left( \frac{j-1}{n}, x_{j-1} \right) / n - \sum_{j=1}^i b \left( \frac{j-1}{n}, y_{j-1} \right) / n \right|^p \right) \\ =: I_1 + I_2 + I_3,$$

とおく。ただし、 $K_5 \sim K_8$ は $n, t$ に無関係な正の定数せある。また以

後の  $K$  も同様とする.

$$P\{\Phi^{-1}(F(\xi_k)) < x\} = P\{F(\xi_k) < \Phi(x)\} = \Phi(x)$$

より、改めて  $\eta_k$  をいわゆる quantile transformation を用いて

$$(2.3) \quad \eta_k := \frac{1}{\sqrt{n}} \Phi^{-1}(F(\xi_k)), \quad k=1, 2, \dots, n$$

とおくと、 $\{\eta_k\}$  は i.i.d. で  $N(0, 1/n)$  に従う確率変数列で、もとの  $\{\xi_k\}$  と同じ結合分布を持つ。さて

$$S_k := \sum_{j=1}^k \sigma\left(\frac{j-1}{n}, x_{j-1}\right) \left(\frac{\xi_j}{\sqrt{n}} - \eta_j\right)$$

とおくと、 $\{S_k\}$  は  $\mathcal{F}_k := \sigma\{\xi_1, \dots, \xi_k\}$ -adapted マルチンゲールであるから、Doob の不等式及び (1.5) より

$$(2.4) \quad I_1 = K_7 E\left(\max_{1 \leq i \leq k} |S_i|^p\right)$$

$$\leq K_9 \left\{ E\left( \sum_{j=1}^k E\left( \left| \sigma\left(\frac{j-1}{n}, x_{j-1}\right) \left(\frac{\xi_j}{\sqrt{n}} - \eta_j\right) \right|^2 \mid \mathcal{F}_{j-1} \right) \right) \right\}^{p/2}$$

$$\leq K_{10} \left\{ \sum_{j=1}^k E\left( \left| \frac{\xi_j}{\sqrt{n}} - \eta_j \right|^2 \right) \right\}^{p/2}$$

また、(2.3) より

$$(2.5) \quad E \left( \left| \frac{\xi_j}{\sqrt{n}} - \eta_j \right|^2 \right) = \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} |u - \Phi^{-1}(F(u))|^2 dF(u) \\ = \frac{1}{n} \int_0^1 |F^{-1}(u) - \Phi^{-1}(u)|^2 du = \frac{1}{n} v(F, \Phi).$$

(2.4) と (2.5) より

$$(2.6) \quad I_1 \leq K_{10} v(F, \Phi)^{p/2}.$$

また

$$(2.7) \quad I_2 \leq K_{11} \int_0^t E \left( \max_{0 \leq u \leq s} |X_n(u) - Y_n(u)|^p \right) ds,$$

$$(2.8) \quad I_3 \leq K_{12} \int_0^t E \left( \max_{0 \leq u \leq s} |X_n(u) - Y_n(u)|^p \right) ds.$$

(2.2)、(2.6) - (2.8) より任意の  $0 \leq t \leq 1$  に対して

$$E \left( \max_{0 \leq u \leq t} |X_n(u) - Y_n(u)|^p \right) \leq K_{10} v(F, \Phi)^{p/2} \\ + K_{13} \int_0^t E \left( \max_{0 \leq u \leq s} |X_n(u) - Y_n(u)|^p \right) ds.$$

ゆえに、Gronwallの補題によって

$$(2.9) \quad E \left( \max_{0 \leq u \leq t} |X_n(u) - Y_n(u)|^p \right) \leq K_{14} v(F, \Phi)^{p/2}.$$

また定理 1 の(1.6)及び(2.1)、(2.9)より定理 3 が証明される。

### 参考文献

Gihman, I. I. and Skorohod, A. V., *The Theory of Stochastic Processes III*, Springer-Verlag, Berlin, 1979.



- Kanagawa, S. (1988), On the rate of convergence for Maruyama's approximate solutions of stochastic differential equations, *Yokohama Math. J.*, **36**, 79-85.
- Kanagawa, S. (1989), The rate of convergence for approximate solutions of stochastic differential equations, *Tokyo J. Math.*, **12**, 33-48.
- Kloeden, P. E. and Platen, E., *Numerical Solutions of Stochastic Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- Maruyama, G. (1955), Continuous Markov processes and stochastic equations, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **4**, 48-90.
- Shimizu, A. (1984), Approximation solutions for stochastic differential equations, *Proc. Symp. on Stochastic differential Equations for Population Genetics*, 201-210 (in Japanese).