

# 確率微分方程式の数値スキームの 安定性

齊藤善弘\*      三井斌友\*\*

\*聖徳学園女子短期大学      \*\*名古屋大学人間情報学研究科

Error Analysis of Numerical Scheme for Sochastic Differential Equation

Yoshihiro Saito\*      Taketomo Mitsui\*\*

\*\*Shotoku Gakuen Women's Junior College

\*\*Graduate School of Human Informatics, Nagoya University

## 1. はじめに

確率微分方程式は偶然に支配される諸現象を記述する方程式である。決定論的微分方程式の場合と同様、様々な数値解法が提案されてきた。また、決定論で数値的安定性の考察がなされているように、確率微分方程式に対しても同じ様な概念が必要になるであろう。本論文では常微分方程式の絶対安定性の概念を確率微分方程式に拡張することがねらいである。

まず、確率微分方程式 (SDE) とその数値スキームについて簡単に述べる (2 節)。そして、3 節で本論である数値的安定性について述べよう。最初に常微分方程式の数値的安定性について述べる (3.1 節)。それから、その確率微分方程式への拡張である *MS*-安定性について紹介しよう (3.2 節)。また、別の安定性である *T*-安定性についても述べる (3.3 節)。最後に今後の課題を述べる (4 節)。

## 2. SDE とその数値スキーム

スカラー自励系 Ito 型確率微分方程式 (SDE) に対する確率初期値問題 (SIVP)

$$\begin{cases} dX(t) = f(X)dt + g(X)dW(t) \\ X(0) = x \end{cases} \quad t \in [0, T] \quad (1)$$

を考える。ここで、 $W(t)$  は標準 Wiener 過程である。標準 Wiener 過程とは次の 3 つの条件を満たす標準 Gauss 過程である。

- (i)  $P(W(0) = 0) = 1$
- (ii)  $E(W(t)) = 0$       all  $t \in [0, \infty)$
- (iii)  $C_W(t, s) = E(W(t)W(s)) = \min(t, s)$

SIVP(1) は次の確率積分方程式と同値になる。

$$X(t) = x + \int_0^t f(X(s))ds + \int_0^t g(X(s))dW(s)$$

ここで、2番目の積分は Ito 型確率積分と呼ばれ、次式で定義される。

$$\int_0^t g(X(s))dW(s) = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} g(X(t_k))\Delta W_k$$

また、 $\Delta W_k = W(t_{k+1}) - W(t_k)$ 、 $h = \max(t_{k+1} - t_k)$  であり、極限は 2 乗平均 (mean-square) の意味にとる。

確率初期値問題 (1) の解  $X(t)$  は確率過程  $X(t, \omega)$  ( $\omega \in \Omega$ ) となる。つまり、時間  $t$  を固定したとき  $X(t, \cdot)$  は確率変数となる。また、標本空間の元  $\omega$  を固定したとき  $X(\cdot, \omega)$  を確率過程  $X(t)$  の軌道 (sample path, trajectory) と呼ぶ。

Fig. 1 に Wiener 過程の 1 つの軌道を示す。

また、SDE の例として、Langevin 方程式

$$dX(t) = -aXdt + b dW(t)$$

がある。ここで  $a$  と  $b$  は正の定数である。

次に数値スキームについて説明する。数値スキームは解  $X(t)$  の軌道の近似列を生成し、収束の態様に応じて、strong, weak, pathwise の 3 種類がある。ここでは strong の場合を考えよう。最も基本的な例として、Euler-Maruyama スキームがあげられる。

例 Euler-Maruyama scheme

$$\begin{aligned}\bar{X}_{n+1} &= \bar{X}_n + f(\bar{X}_n)\Delta t_n + g(\bar{X}_n)\Delta W_n \\ \Delta W_n &= U_n h^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

ここで、 $\Delta t_n$  はステップ幅を表し、以後等間隔  $h$  にとることにする。また、 $\Delta U_n$  は次のような確率変数がとられる。

(i) 正規乱数

$$U_n \in \mathcal{N}(0, 1)$$

(ii) two-point d.r.v.(distributed random variable)

$$P(U_n = \pm 1) = \frac{1}{2}$$

(iii) three-point d.r.v.

$$P(U_n = \pm\sqrt{3}) = \frac{1}{6}$$

$$P(U_n = 0) = \frac{2}{3}$$

この数値例を Fig. 2 に示す。ただし、Fig. 2 にでてくる Heun スキームは 2 段 Heun 法の確率版である。

### 3. 線型安定性解析

この節では確率微分方程式に数値解法を適用したとき、その数値解の安定性を考察する。安定性について、我々は2種類の概念を提案した。まず、初めに常微分方程式に対して行われている線型安定性解析について述べよう。次に我々が提案した *MS*-安定性 ([7]) と *T*-安定性 ([8]) について紹介しよう。

#### 3.1 常微分方程式の線型安定性解析

次のような1次元の常微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2)$$

を考えよう。この初期値問題に対して、もっとも簡単な数値解法として、Euler 法がある。

$$\bar{x}_{n+1} = \bar{x}_n + f(\bar{x}_n)h \quad (3)$$

それでは、この Euler 法の数値的安定性を考察しよう。テスト方程式として、次のような線型の微分方程式を考える。

$$\begin{cases} dx(t) = \lambda x dt \\ x(0) = 1, \quad t \in [0, T], \quad \lambda < 0 \end{cases} \quad (4)$$

この初期値問題の理論解は

$$x(t) = e^{\lambda t}$$

である。このテスト方程式 (4) に Euler 法を適用すると、数値解は

$$\begin{aligned} \bar{x}_{n+1} &= \bar{x}_n + \lambda \bar{x}_n h \\ &= (1 + \lambda h) \bar{x}_n \\ &= R(\lambda h) \bar{x}_n \end{aligned}$$

のように書き表すことができる。ここで、 $R(\lambda h)$  は安定性関数と呼ばれる。また、理論解は  $\lambda < 0$  のとき

$$x(t) = e^{\lambda t} \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty)$$

の性質を満たす。よって、数値解  $\bar{x}_n$  がこの性質を満たすためには

$$|1 + \lambda h| < 1$$

が必要十分である。ゆえに

$$-2 < \lambda h < 0$$

が得られた。これは、テスト方程式 (4) の  $\lambda$  に対して、 $-2 < \lambda h < 0$  を満たす  $h$  を採るならば、Euler 法により安定な数値解が得られる。以上をまとめると次の定義は自然であろう。

### 定義

ある  $\lambda h$  に対して安定性関数が  $|R(\lambda h)| < 1$  の条件を満たすならば、数値解法はその  $\lambda h$  について絶対安定という。ある区間  $(\alpha, \beta)$  があって、 $\lambda h \in (\alpha, \beta)$  ならば、数値解法が絶対安定のときその区間を絶対安定区間という。

この内容を裏付ける数値例をあげておく。

### 数値例 1

$$\begin{cases} dx(t) = -100xdt, \\ x(0) = 1, \end{cases} \quad t \in [0, T]$$

$h = 0.015$  ( $\lambda h = -1.5$ ) のときは安定になるが、 $h = 0.025$  ( $\lambda h = -2.5$ ) のときは不安定になる。この様子を Fig. 3 と Fig. 4 に示す。

### 3.2 MS-安定性

さて、常微分方程式に対して行った線型安定性解析を確率微分方程式に拡張しよう。(4) に対応するものとして、次のようなテスト方程式 (supermartingale eq.) を考える。

$$\begin{cases} dX(t) = \lambda X dt + \mu X dW(t) \\ X(0) = 1, \end{cases} \quad t \in [0, T], \quad \lambda < 0, \mu \geq 0. \quad (5)$$

この方程式の理論解は

$$X(t) = \exp\left\{\left(\lambda - \frac{1}{2}\mu^2\right)t + \mu W(t)\right\}$$

である。このとき、次の 2 乗平均ノルム

$$\|X\| = \{E|X|^2\}^{\frac{1}{2}}$$

を導入し、方程式 (5) の解の特性をみると、次のことがわかる。

$$\|X(t)\| \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty) \quad \text{if} \quad 2\lambda + \mu^2 < 0$$

よって、この解の特性に対して、数値スキームが

$$\|\bar{X}_n\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

を満たすかどうか調べよう。この性質を MS-安定性と呼ぶ。数値スキームをテスト方程式 (5) に 1 ステップ適用してできる数値解  $\bar{X}_n$  に対して、2 乗平均すると

$$\bar{Y}_{n+1} = R(\bar{h}, k)\bar{Y}_n$$

が成り立つ。ここで、 $\bar{Y}_n = E|\bar{X}_n|^2$ で、 $\bar{h} = h\lambda$ ,  $k = -\mu^2/\lambda$ である。また、函数  $R$ を安定性函数 (stability function) と呼ぶ。ゆえに、数値解が  $MS$ -安定性の条件を満たすためには

$$|R(\bar{h}, k)| < 1$$

が必要十分になる。数値スキームに対応する安定性函数  $R$ に対して、 $|R(\bar{h}, k)| < 1$  が成り立つとき、 $(\bar{h}, k)$  に対して数値スキームは  $MS$ -安定であるという。また常微分方程式の場合と同様に、この  $(\bar{h}, k)$  の領域  $\mathcal{R}$ 、つまり、

$$\mathcal{R} = \{(\bar{h}, k); |R(\bar{h}, k)| < 1\}$$

を  $MS$ -安定領域と呼ぼう。

次の2つの数値スキームについて考える。

(i) Euler-Maruyama スキーム ( $\beta = 1$ )

$$\bar{X}_{n+1} = \bar{X}_n + f_n h + g_n \Delta W_n \quad (6)$$

(ii) backward Euler スキーム ( $\beta = 1$ )

$$\bar{X}_{n+1} = \bar{X}_n + f_{n+1} h + g_n \Delta W_n \quad (7)$$

これらの数値スキームに対して安定性函数は次のようになる。

(i) Euler-Maruyama スキーム

$$R(\bar{h}, k) = (1 + \bar{h})^2 - k\bar{h} \quad (8)$$

(ii) backward Euler スキーム

$$R(\bar{h}, k) = \frac{1 - k\bar{h}}{(1 - \bar{h})^2} \quad (9)$$

これらの  $MS$ -安定領域の図を Fig. 5 と Fig. 6 に示してある。上にあげた例について、安定性を裏付ける数値実験の結果をあげる。

数値例 2

$$\begin{cases} dX(t) = -100X dt + 10X dW(t), \\ X(0) = 1, \quad t \in [0, T] \end{cases}$$

ステップ幅 (i)  $h = 0.005$  (i.e.  $(\bar{h}, k) = (-0.5, 1)$ ) と (ii)  $h = 0.01$  (i.e.  $(\bar{h}, k) = (-1, 1)$ ) のときの結果を Table 1 に示す。コンピュータは Macintosh SE/30 を使用し、軌道数は 20000 とした。

t	$\ X\ ^2$			
	Euler-Maruyama		backward Euler	
	(i)	(ii)	(i)	(ii)
0.010	0.5660	1.0140	0.4503	0.5090
0.020	0.3289	0.9955	0.2039	0.2527
0.030	0.1680	1.0696	0.0873	0.1295
0.040	0.1020	0.9826	0.0429	0.0652
0.050	0.0444	0.9631	0.0163	0.0303
0.060	0.0305	0.9724	0.0074	0.0150
0.070	0.0137	0.7908	0.0037	0.0079
0.080	0.0132	0.5820	0.0009	0.0042
0.090	0.0008	0.4826	0.0007	0.0016
0.100	0.0001	0.7225	0.0000	0.0009

Table 1

この表を見ると (i) の場合、どちらのスキームも安定に解けているが、(ii) の場合、Euler-Maruyama スキームは安定領域から外れるため、不安定になる。また、このグラフを Fig. 7a, 7b と Fig. 8a, 8b に示しておく。

### 3.3 T-安定性

MS-安定性と同じように次のテスト方程式を考える。

$$\begin{cases} dX(t) = \lambda X dt + \mu X dW(t) \\ X(0) = 1, \quad t \in [0, T] \end{cases} \quad (10)$$

ただし、supermartingale の条件はついていない。もちろん理論解は

$$X(t) = \exp\left\{\left(\lambda - \frac{1}{2}\mu^2\right)t + \mu W(t)\right\}$$

である。この方程式 (10) の解を軌道としてみた場合、次の関係式が成り立つ。

$$|X(t)| \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty) \quad \text{if} \quad \lambda - \frac{1}{2}\mu^2 < 0$$

この定性的性質を数値スキームに考慮した概念が T-安定性である。

定義 1 ある driving process のもとで数値スキームをテスト方程式 (10) に適用したとき、得られた数値解が、

$$|\bar{X}_n| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

を満たすならば、その driving process を備えた数値スキームは T-安定であるという。

この  $T$ -安定性と前節で述べた  $MS$ -安定性の間には次の関係が成り立つ。

$$MS\text{-安定} \Rightarrow T\text{-安定}$$

さて、2節で述べた Euler-Maruyama スキームについて  $T$ -安定性の考察を行う。まず、 $MS$ -安定性と同様、安定性函数に対応するものを導出しよう。 $T$ -安定の場合は次のように考える。

$$\begin{aligned} \bar{X}_{n+1} &= (1 + \lambda h + \mu \Delta W_n) \bar{X}_n \\ &\quad \vdots \\ &= \prod_{i=0}^n (1 + \lambda h + \mu \Delta W_i) \bar{X}_0 \end{aligned}$$

ここで積の平均をとると次のように書き表すことができる。

$$\bar{X}_{n+1} = R(h; \lambda, \mu) \bar{X}_n$$

上式で  $R(h; \lambda, \mu)$  を平均化された安定性函数 (averaged stability function) と呼ぶ。故に  $T$ -安定性は次のように置き換えられる。

$$\bar{X}_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \Leftrightarrow |R(h; \lambda, \mu)| < 1$$

$MS$ -安定と同様、 $T$ -安定領域は次のように定義される。

$$\mathcal{R} = \{(h; \lambda, \mu); |R(h; \lambda, \mu)| < 1\}$$

ここでは例として、two-point d.r.v. を driving process として選んだときを考える。このとき、平均化された安定性函数  $R$  は次のようになる。

$$\begin{aligned} R^2(h; \lambda, \mu) &= (1 + \lambda h + \mu \sqrt{h})(1 + \lambda h - \mu \sqrt{h}) \\ &= (1 + \lambda h)^2 - \mu^2 h \end{aligned}$$

よって、(a)  $\lambda = 0, \mu > 0$  のとき、平均化された安定性函数は

$$R^2(h; 0, \mu) = 1 - \mu^2 h$$

となる。よって、この場合 Euler-Maruyama スキームが  $T$ -安定となる条件は

$$|R(h; 0, \mu)| < 1 \Leftrightarrow 0 < h < \frac{2}{\mu^2}$$

となる。次に、(b)  $\lambda \neq 0$  のとき、平均化された安定性函数は

$$R^2(\bar{h}, k) = (1 + \bar{h})^2 - k \bar{h}, \quad k = \frac{\mu^2}{\lambda}, \quad \bar{h} = \lambda h$$

となる。(b) に対する安定領域の図を Fig. 9a と Fig. 9b に示す。最後に、この安定性を裏付ける数値例をあげる。

数値例 3

(1)

$$\begin{cases} dX &= 2XdW(t) & h = 0.2, 0.4 & \text{安定} \\ X(0) &= 1 & h = 0.6 & \text{不安定} \end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} dX &= -2Xdt + 2XdW(t) \\ X(0) &= 1 \end{cases}$$

$$h = 0.25, 1.8 \quad \text{安定} \quad (\bar{h}, k) = (-0.5, -2), (-3.6, -2)$$

$$h = 0.5, 2 \quad \text{不安定} \quad (\bar{h}, k) = (-1, -2), (-4, -2)$$

(3)

$$\begin{cases} dX &= 3Xdt + 3XdW(t) \\ X(0) &= 1 \end{cases}$$

$$h = 0.2 \quad \text{安定} \quad (\bar{h}, k) = (0.6, 3)$$

$$h = 0.5 \quad \text{不安定} \quad (\bar{h}, k) = (1.5, 3)$$

(1), (2) と (3) に対するグラフをそれぞれ (1) Fig. 10a, 10b, 10c, (2) Fig. 11a, 11b, 11c, 11d, (3) Fig. 12a, 12b に示す。

#### 4. 今後の課題

確率微分方程式の線型安定性解析について、 $MS$ -安定性と  $T$ -安定性の2つを紹介した。ただし、多次元 SDE に対してこれらの安定性の考察が残っている。また、 $T$ -安定性では、大域収束次数 2 のスキームに対して、また、driving process として Wiener 過程を採用した場合について解析することが今後の課題である。

## 参考文献

- [1] T.C. Gard, *Introduction to Stochastic Differential Equations*, Marcel Dekker, New York, 1988.
- [2] J. R. Klauder and W. P. Petersen, *Numerical integration of multiplicative-noise stochastic differential equations*, SIAM J. Numer. Anal. **22**(1985), 1153–1166.
- [3] P.E. Kloeden and E. Platen, *A survey of numerical methods for stochastic differential equations*, J. Stoch. Hydrol. Hydraulics, **3**(1989), 155–178.

- [4] P.E. Kloeden and E. Platen, *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*, Springer, Berlin, 1992.
- [5] 三井斌友, 数值解析入門, 朝倉書店, 東京, 1985.
- [6] 齊藤善弘, 三井斌友, 確率微分方程式の離散近似, 日本応用数理学会論文誌, 2(1992), 1-16.
- [7] Y. Saito and T. Mitsui, *Stability analysis of numerical schemes for stochastic differential equations*, submitted.
- [8] Y.Saito and T. Mitsui, *T-stability of numerical scheme for stochastic differential equations*, in World Scientific Series in Applicable Analysis, vol. 2 "Contributions in Numerical Mathematics" (ed. by R.P.Agarwal), 1993, pp333-344.
- [9] D. Talay, *Simulation and numerical analysis of stochastic differential systems*, INRIA Report 1313, 1990.

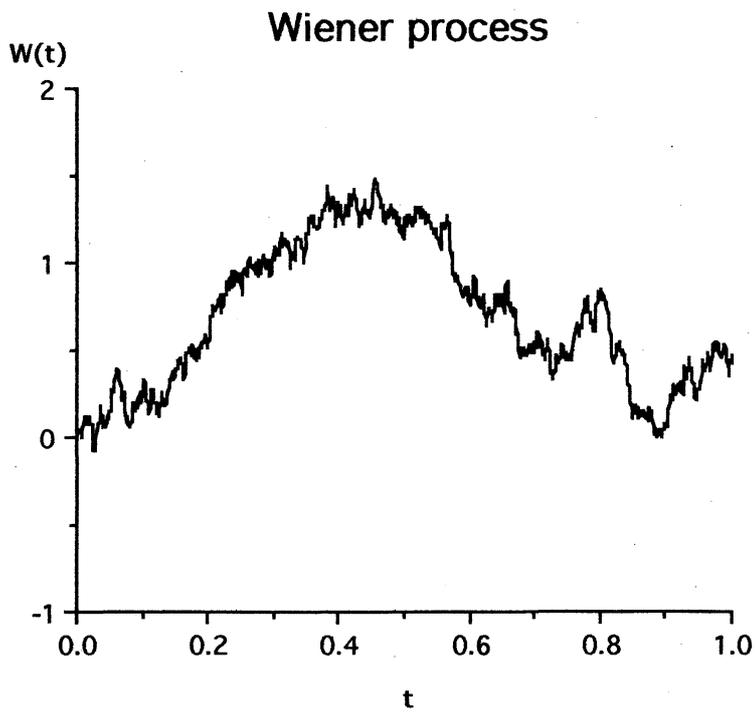


Fig. 1

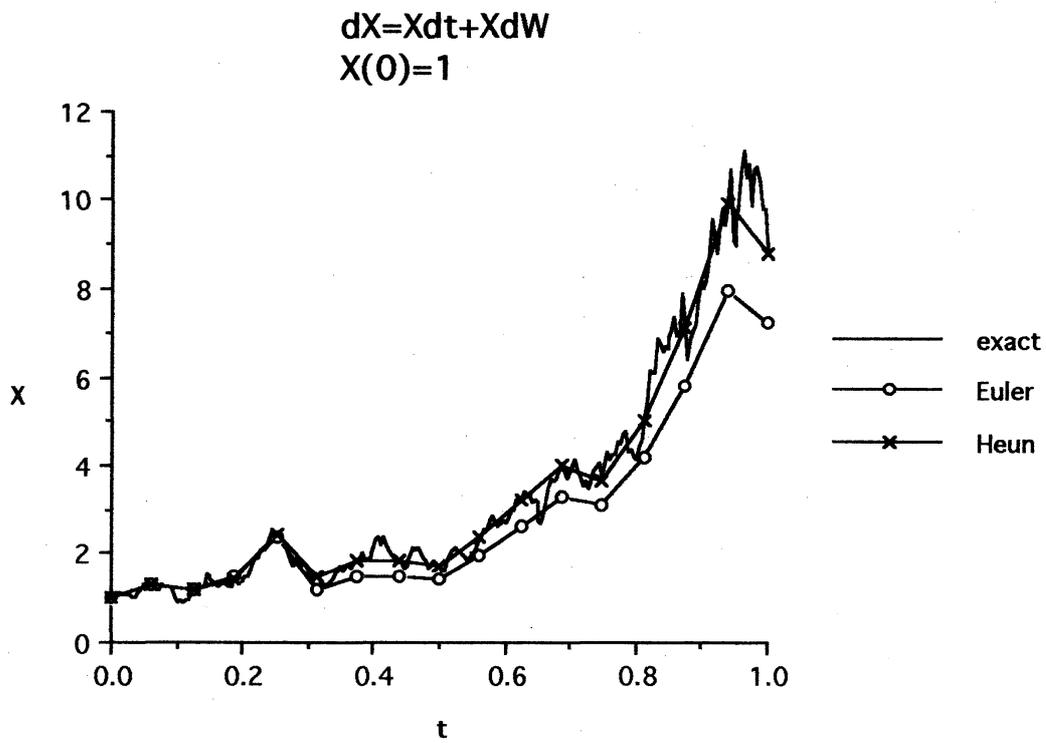


Fig. 2

Euler method ( $h=0.015$ )

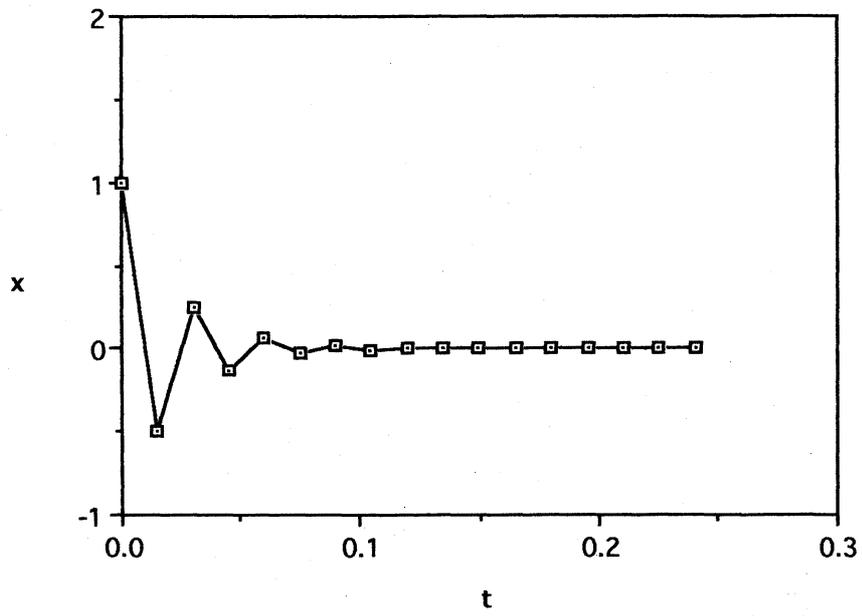


Fig. 3

Euler method ( $h=0.025$ )

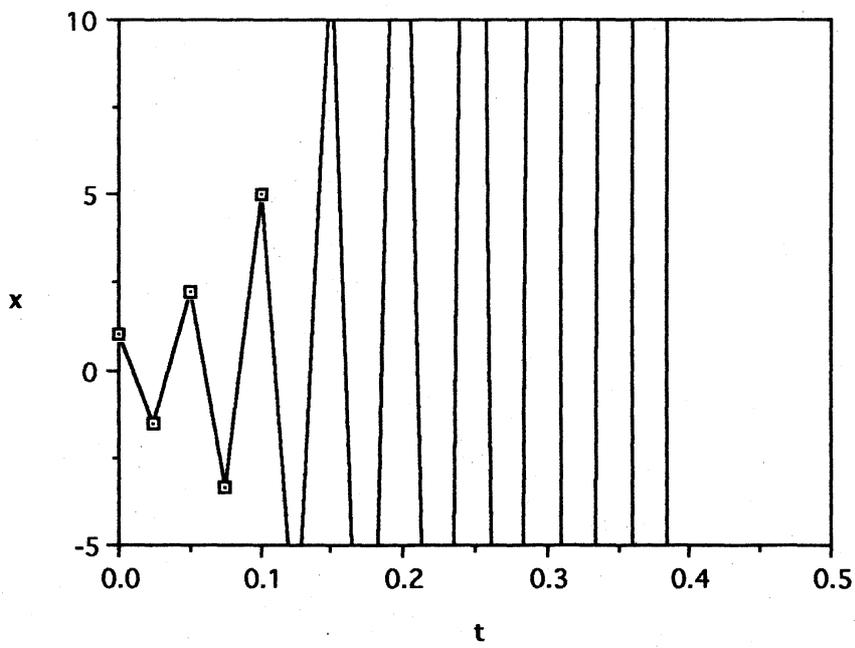


Fig. 4

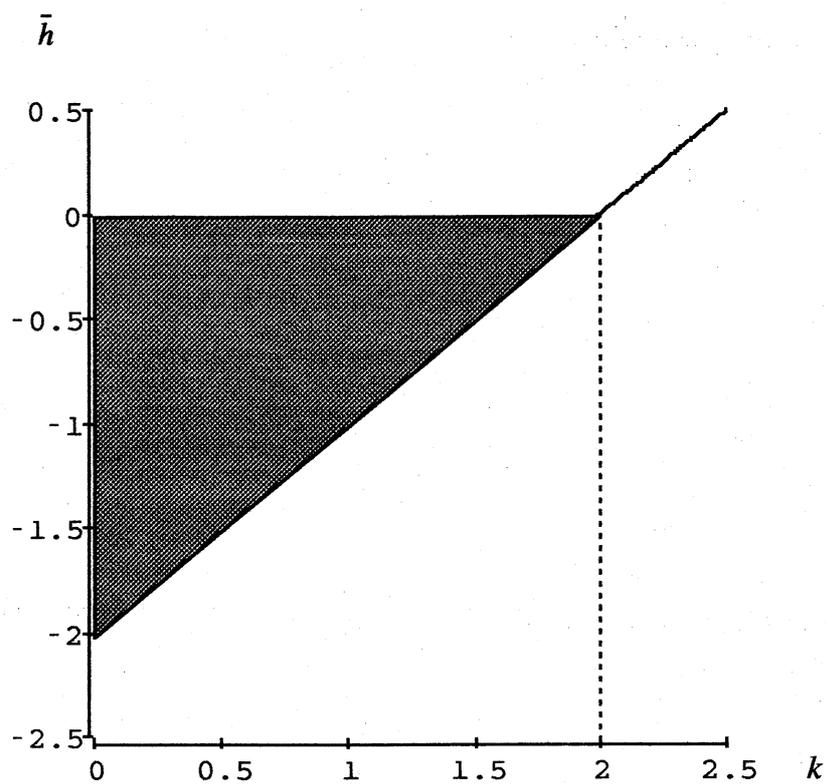


Fig. 5

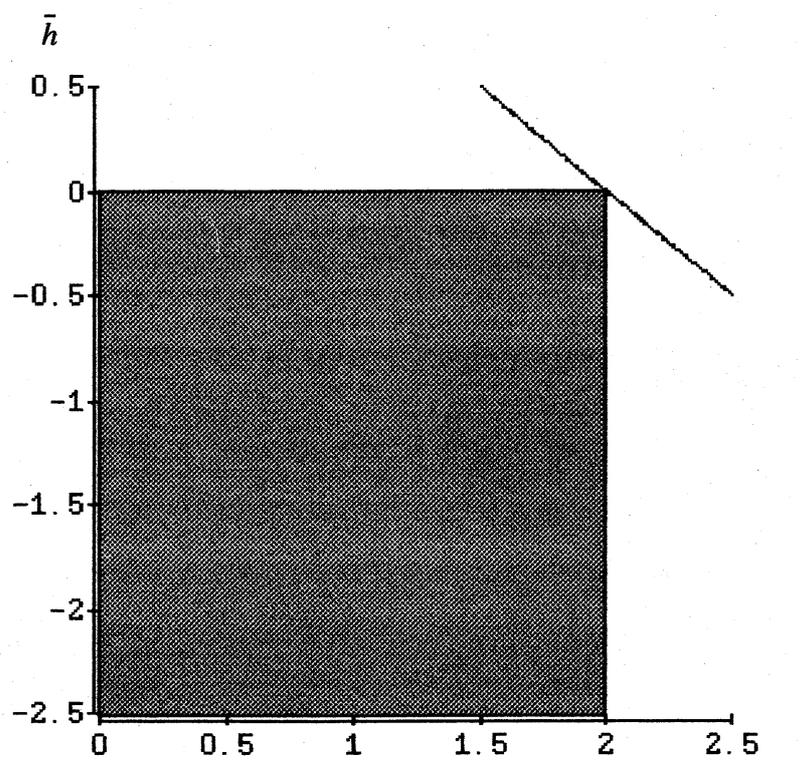


Fig. 6

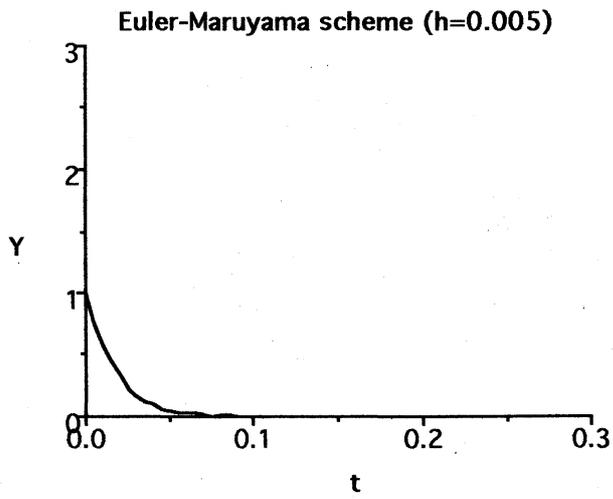


Fig. 7a

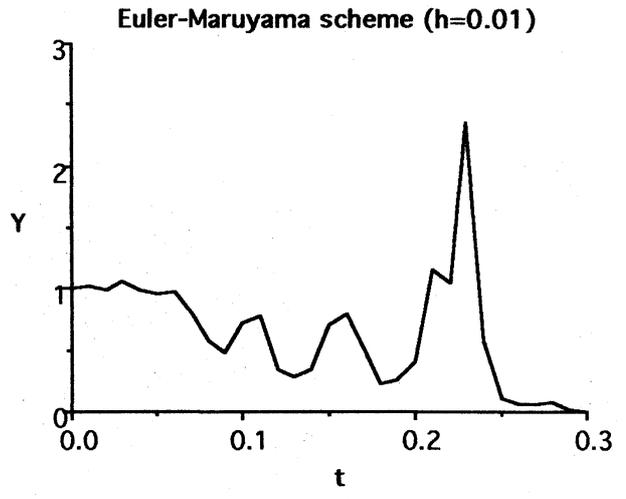


Fig. 7b

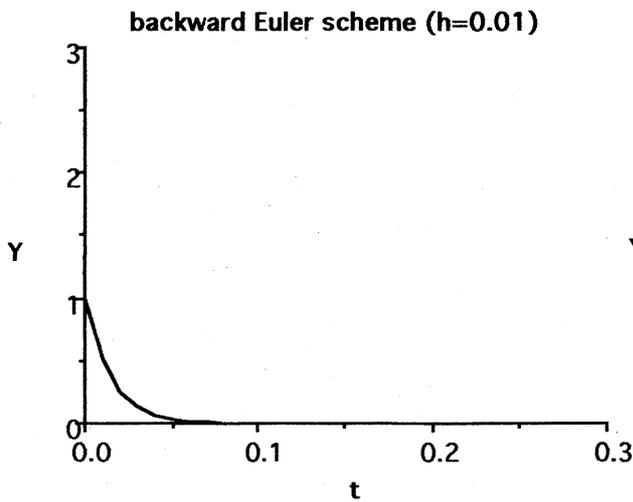


Fig. 8a

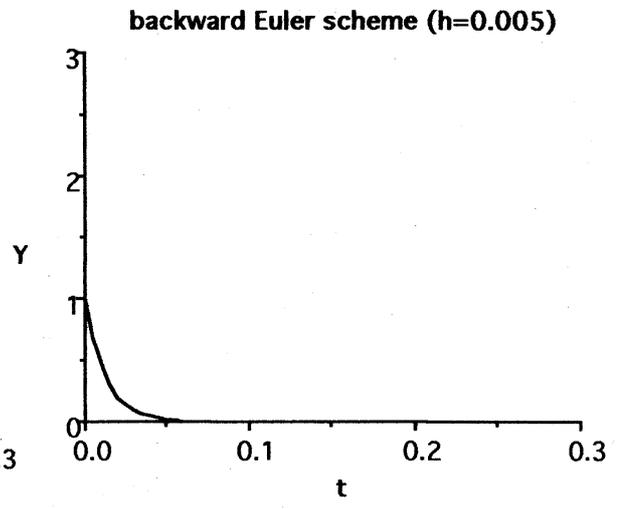


Fig. 8b

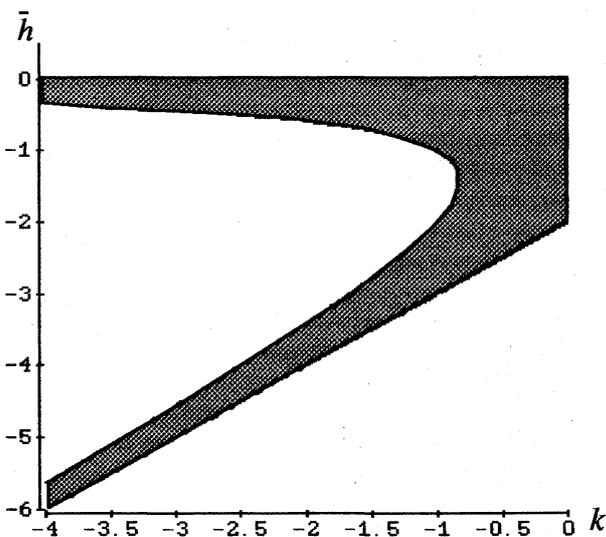


Fig. 9a

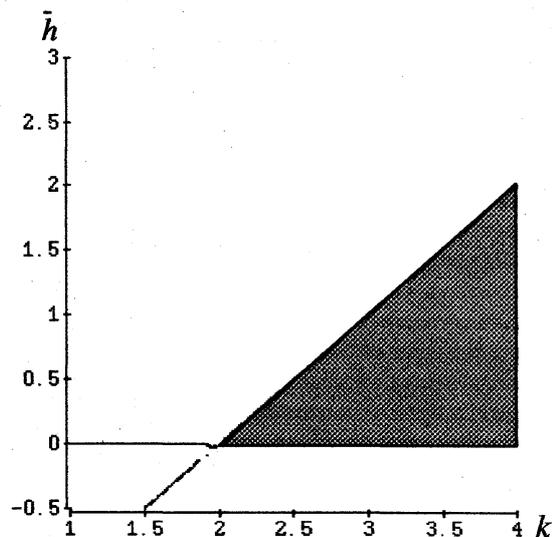


Fig. 9b

TEST1 (h=0.2)

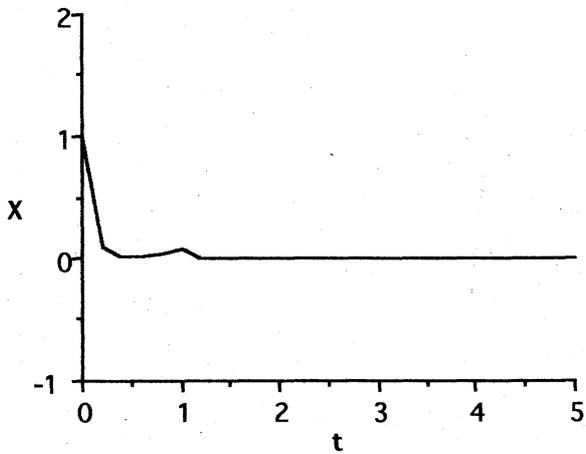


Fig. 10a

TEST1 (h=0.4)

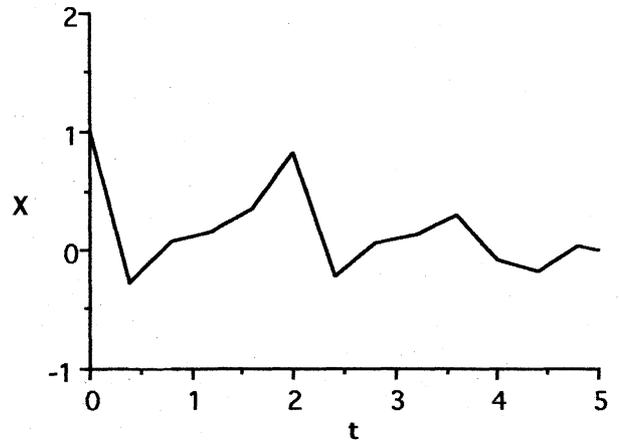


Fig. 10b

TEST1 (h=0.6)

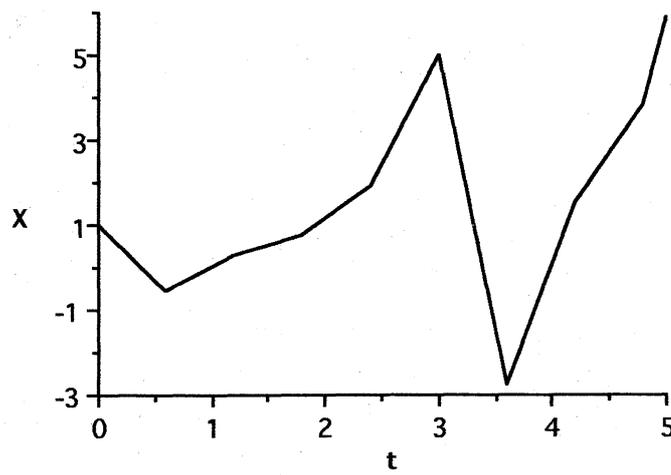


Fig. 10c

TEST2 (h=0.25)

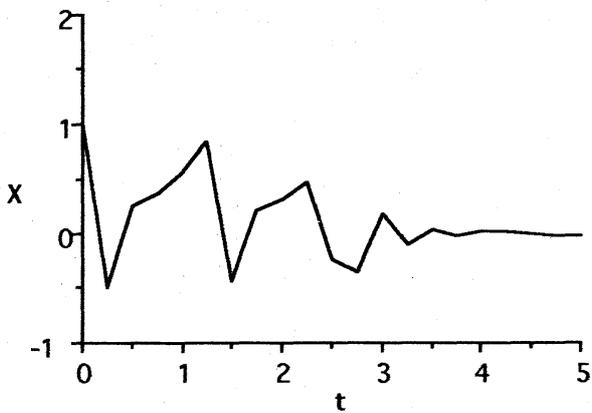


Fig. 11a

TEST2 (h=1.8)

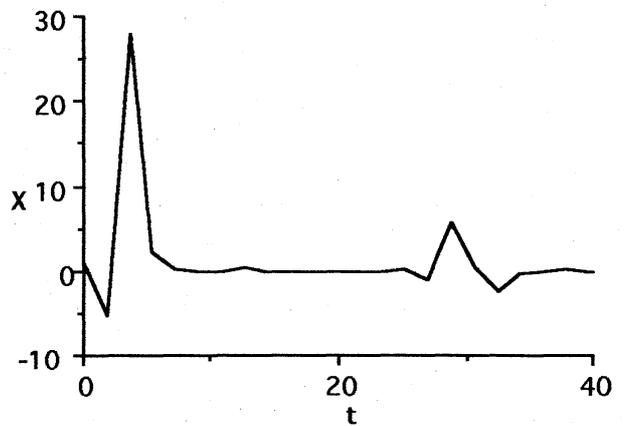


Fig. 11b

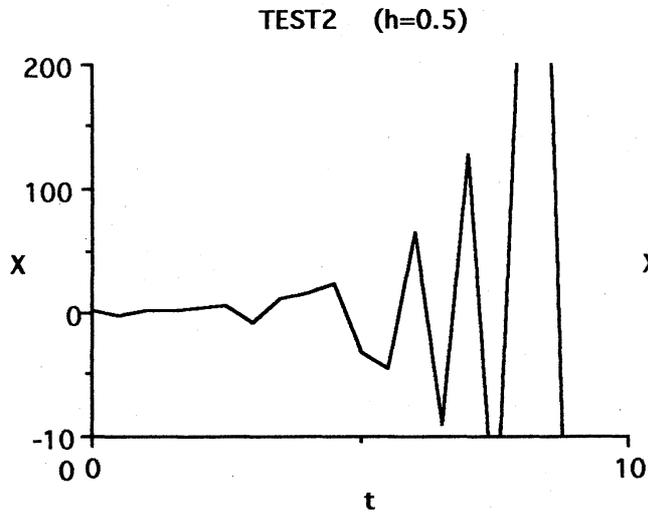


Fig. 11c

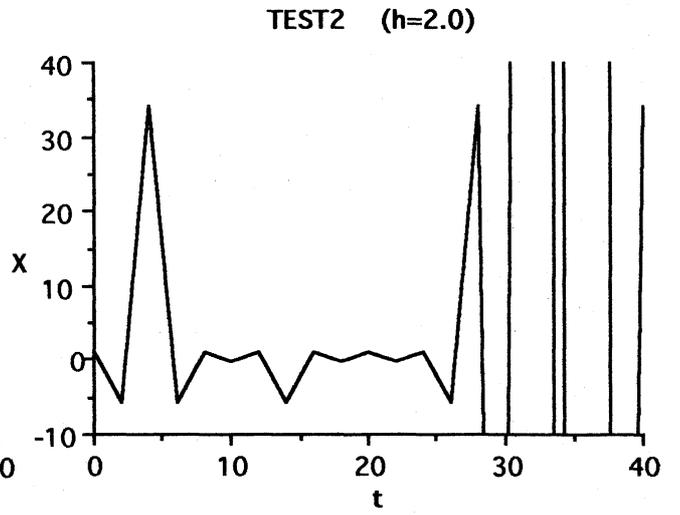


Fig. 11d

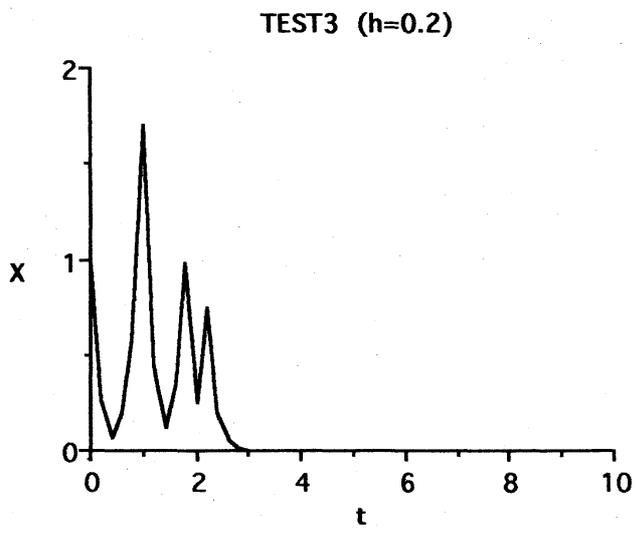


Fig. 12a

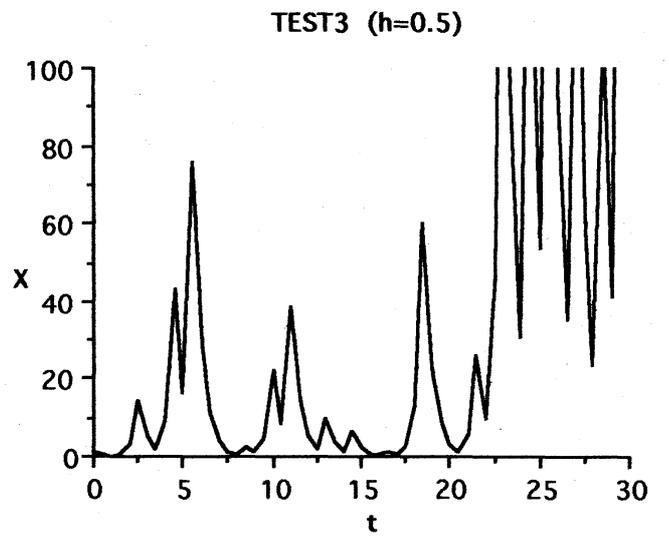


Fig. 12b