

吸収壁を持つ拡散過程のシミュレーションと 確率過程補間

名古屋市立大学・教養部 三澤哲也 (Tetsuya Misawa)

1. 背景と問題設定

吸収壁をともなう拡散過程を用いた確率モデルは、物理、化学、工学等、様々な分野で利用され、それにもとづく計算機シミュレーションも数多く行われている。本稿では、そのようなシミュレーションにおいて生じる、吸収壁到達サンプル数の数え落とし誤差問題とそれを解決するための確率論的な補正法について紹介する。まず始めに問題をクリアにするために、上記の確率モデルの具体例を化学反応論の話題からひとつ挙げる。

いま、ある溶液中にとけ込んでいるある分子（それを AB と表す）に例えば高エネルギー放射線を一時的に当て、それらを各々 2 つの原子 A 、 B に分解する。その後、時間が経ち溶液が冷えてくるにつれて各原子たちが $A+B$ の弱い結合の集まり（クラスター）を形成するが、その中で再び AB 分子が再合成される反応、すなわち、



なる反応を考える。ただし、本稿では簡単のため 1 つのクラスターには A 原子、 B 原子各々 1 つずつ、計 2 つの原子だけが存在すると仮定する。さて、このような反応が発生したか否かを決定する最大の要因は、クラスター内の 2 つの原子の原子間距離であるが、これは溶液中で考えるために時間と共にランダムな振る舞いをする。そこで、それを次の 1 次元確率微分方程式（以下、SDE で表す）に従って変動する拡散過程 X で表そう。

$$(1) \quad dX(t) = b(X(t), t)dt + \sigma(X(t), t)dw(t), \quad X(0) = X_0$$

ここに、 w は、一次元ブラウン運動過程であり、 b （ドリフト関数）、 σ （拡散係数関数）は、ある適当な滑らかな関数とする。さらに、 R という“反応距離”を定義する。もし X の値が R 以下になれば、そのクラスター内の 2 粒子に反応が発生、 AB 分子が再合成されてクラスターは消滅し、同時に X の (1) 式による変動もそこで止まる。そうでなければ反応は発生せずそのクラスターは生き残り、 X は引き続き (1) 式に従って変動する。すなわち、(1) 式の SDE に従う確率過程 X にとっては、 R は“吸収壁”としての意味がある。以上のモデルを用いて化学反応論では“2 原子 A 、 B が $A+B$ のままで残っている、クラスターの個数の時間変化”についての情報を求めようとする。ところで、一般には吸収壁をともなう SDE

を厳密に解くには困難なことが多いので、実際には上記モデルにもとづく計算機シミュレーションが行われる。すなわち、もとのSDE (1) 式を何らかの形で差分化した式—たとえば、Euler-Maruyama の差分式—

$$(2) \quad X_{n+1} = X_n + b(X_n, t_n)\delta t + \sigma(X_n, t_n)\gamma_n\sqrt{\delta t}$$

(ただし、 $t_n = n\delta t$, $X_n = X(t_n)$, γ_n は標準正規乱数) にもとづき、溶液中のクラスター数を考慮して多数のサンプルを走らせ、各時点 t_n ごとに上述の反応距離を用いて各クラスター内で反応が発生したか否かを判定する。以上が化学反応論における吸収壁を持つ拡散過程の確率モデルの一例で、実際にこれらの手続きよるクラスター内の分子合成反応のシミュレーション結果が報告されている[1]。

さて、(2) 式のようなSDEの差分式にもとづくシミュレーションにおいてその結果の精度を上げるには、基本的にはその差分時間幅 δt をどんどん小さくすればよいが、計算量・計算コストの観点からすると、多数のサンプルを扱う必要のあるシミュレーションにおいてそれを実行することは、実際には困難である(計算機の性能等の外的要因にも大きく依存するが)。したがって、そのような場合には、差分時間幅は有る程度までしか小さくできないことになる。このことに留意すると、前のモデルにおいて時刻 t_n , t_{n+1} の間では反応が発生しなかった(壁 R に当たらなかった) と判定される図1のような状況の場合、その判断が誤っている(すなわち、反応発生の数え落としを犯している) 可能性が高いように思われるが、実際、種々のシミュレーション結果を通じて、それが事実であることが指摘されている[1]。

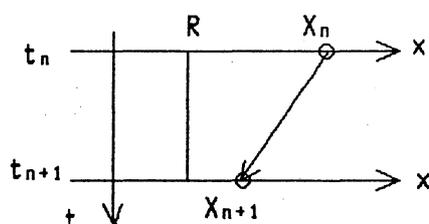


図 1

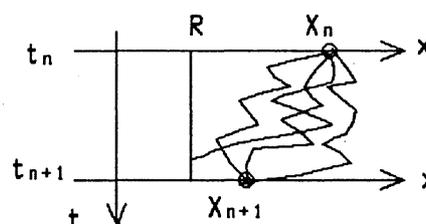


図 2

以上のような問題は、化学反応モデルだけにとどまらず、吸収壁を伴ったSDEにもとづく計算機シミュレーションを実行し、壁に吸収されるサンプル数を数え上げる必要のある数理モデルに不変的につきまとう障害であろう。それゆえ、この問題を解決することは重要かつ有益であると考えられる。この観点から本稿では、このような障害による影響を小さくする方法として、“確率過程補間”の考え方を利用した数え落とし補正法を紹介する[2,3]。その基本方針は次の通りである。

(i) 図1の状況に置いて、いわゆるブラウン橋過程の作り方にならって、SDE (1) 式に従う拡散過程 X から X_n と X_{n+1} の間を補間する確率過程を作る (図2)。

(ii)(i) の補間過程 (実際にはその近似過程) が吸収壁 R に時間幅 δt の間に当たる確率 (到達確率) W を求める。

(iii) 図 1 の場合に当たる各サンプルにたいし、上記 W を計算し、さらに $[0, 1]$ 上の一様乱数 r を発生させる。このとき、 $r \leq W$ なら反応発生と判定し、そのサンプルについてのシミュレーション STOP、 $r > W$ なら反応発生せずと判定、シミュレーションを続行する (すなわち、 W は数え落としの補正確率といえる)。これにより、図 1 の場合の反応数の数え落としが改善される。

以下、(i) の補間過程については第 2 節で、(ii) の補正確率 W については第 3 節で述べ、実際のシミュレーション例による上記補正法の効用の検証を第 4 節で行う。最後に、第 5 節で本稿で得られた結果のまとめを行い、同時にそれに関連する課題・今後の展望等について簡単にふれる。

2. 補間過程

まず、(i) にしたがって、図 1 の X_n と X_{n+1} を結ぶ補間過程 \hat{X} を元の拡散過程 X から構成する。それは、次式で与えられる。

$$(3) \quad \hat{X}(u) = \left(\frac{t-u}{t-s}\right)x + \left(\frac{u-s}{t-s}\right)y + \left(\frac{t-u}{t-s}\right)(X(u) - X(s)) - \left(\frac{u-s}{t-s}\right)(X(t) - X(u))$$

$$s \leq u \leq t,$$

ただし、 X_n 、 X_{n+1} および t_n 、 t_{n+1} を改めておのおの x 、 y および s 、 t とおいた (したがって、差分時間幅 $\delta t = t_{n+1} - t_n = t - s$)。さて、拡散過程 X の従う SDE が (1) 式

$$dX(t) = b(X(t), t)dt + \sigma(X(t), t)dw(t)$$

であることに留意して、上の補間過程を (1) 式に現れるドリフト関数 b および拡散係数関数 σ を用いて書き換える。ところで、補間の立場からすると、二時点 s 、 t での X の情報から間の時点 u での X を考察するのが自然な見方であり、このことから (3) 式の X の増分 $(X(u) - X(s))$ 、 $(X(t) - X(u))$ のうち、前者は時点 s から見た前向き、後者は時点 t から見た後向きの X の増分と解釈すべきであろう。したがって、(3) 式を b や σ で書き換えるにあたっては、前者は通常の Itô 型確率積分で $\int_s^u dX$ とかけるので、これに (1) 式を代入すればよいが、後者の後向き増分 (時間反転増分) が問題となる。これは、Itô の時間反転確率積分の結果 [4] や、Haussmann-Pardoux [5] 等の SDE (1) 式の時間反転表現についての結果を利用することで解決できる。そのあらすじを述べると、(i) $X(-t) = X^-(t)$ を通じて、(1) 式に従う拡散過程 $X(t)$ に対し反転時間についての過程 $X^-(t)$ を定義する。(ii) 上記の後向

き増分（時間反転増分）は $X^-(t)$ の反転時間に関する前向き増分で書ける。そこで、ある reference family の下で、その増分を反転時間に関する $X^-(t)$ の確率積分であらわす（これをもとの時間の向きに直すと Itô の時間反転確率積分となる [4]）。(iii) もとの $X(t)$ が強い解をもち、その確率密度関数がある滑らかさをもてば、反転時間に関する過程 $X^-(t)$ もある SDE に従う拡散過程となり、その各係数は (1) 式の係数 b 、 σ を用いて表現できる [5]。その $X^-(t)$ についての SDE を (ii) の積分に代入し、さらにそれをもとの時間表現にもどす。以上より、結局 (3) 式は

$$(4) \quad \hat{X}(u) = \left(\frac{t-u}{t-s}\right)x + \left(\frac{u-s}{t-s}\right)y \\ + \left(\frac{t-u}{t-s}\right)(\mathcal{F}\text{-}\int_s^u b(X(\tau), \tau)d\tau) + \left(\frac{u-s}{t-s}\right)(\mathcal{G}\text{-}\int_t^u b(X(\tau), \tau)d\tau) \\ + \left(\frac{t-u}{t-s}\right)(\mathcal{F}\text{-}\int_s^u \sigma(X(\tau), \tau)dw(\tau)) + \left(\frac{u-s}{t-s}\right)(\mathcal{G}\text{-}\int_t^u \sigma(X(\tau), \tau)dw(\tau)) \\ - \left(\frac{u-s}{t-s}\right)(\mathcal{G}\text{-}\int_t^u \frac{\partial \sigma}{\partial x} \sigma(X(\tau), \tau)d\tau), \quad s \leq u \leq t.$$

と書ける [2]。ここで、 $\mathcal{F}\text{-}\int$ 、 $\mathcal{G}\text{-}\int$ はおのこのいわゆる Itô の前向き（通常）、後向き（時間反転）確率積分であり、形式的には（非積分過程が連続ならば）各々

$$\mathcal{F}\text{-}\int_s^t Y(\tau)dX(\tau) = \text{l.i.p.} \sum_{|\Delta| \rightarrow 0}^n Y(t_{i-1})(X(t_i) - X(t_{i-1})) \\ \mathcal{G}\text{-}\int_t^s Y(\tau)dX(\tau) = \text{l.i.p.} \sum_{|\Delta| \rightarrow 0}^n Y(t_i)(X(t_{i-1}) - X(t_i))$$

で与えられる積分である。

注 1 : (4) 式で $b=0$ 、 $\sigma=1$ とおき、 w の増分を Gauss 確率変数におきかえると、Lévy のブラウン過程に対する補間公式に帰着する [2,6]。

3. 補正確率

次に、(4) 式の補間過程が吸収壁 R に到達する確率、すなわち、吸収壁到達サンプル数の補正確率 W を求める [3]。ところで、(4) 式は二種類の確率積分で表される項を含むため、このままでは簡単に \hat{X} についての確率情報を取り出せない。そこで、時間幅 $t-s$ （すなわち、SDE を差分化したときの時間刻み幅 δt ）がある程度は小さいという仮定のもとで、二種類の確率積分の定義を考慮して、(4) 式を次式のように近似的に書き換える。

$$(5) \quad \hat{X}(s + \nu \delta t) = (1 - \nu)x + \nu y + \nu(1 - \nu)\delta t(b_1 - b_2 + c) \\ + \sqrt{(1 - \nu)\sigma_1^2 + \nu\sigma_2^2}\delta t(1 - \nu)B\left(\frac{\nu}{(1 - \nu)\delta t}\right), \quad 0 \leq \nu \leq 1,$$

ただし、 u は、 $u = s + \nu(t - s)$ 、すなわち、 $\nu \equiv (u - s)/(t - s)$ ($0 \leq \nu \leq 1$) なる変数に変換した。また、 b_1, b_2 等は、 $b_1 \equiv b(x, s)$ 、 $b_2 \equiv b(y, t)$ 、 $\sigma_1 \equiv \sigma(x, s)$ 、 $\sigma_2 \equiv \sigma(y, t)$ 、 $c = (\sigma(\partial\sigma/\partial x))(y, t)$ 、すなわち、二時点 s, t 上の各々の値である。以下この近似式を満たす過程 \hat{X} に基づいて W を計算する。そのため、さらに次の空間・時間変数の変換を行う。

$$\tau = \frac{\nu}{(1 - \nu)\delta t}, \quad 0 \leq \tau < \infty$$

$$Z(\tau) = (1 + \tau\delta t)\hat{X}(s + \nu\delta t) - x - (\tau\delta t)R.$$

我々が求めたいのは、 $\hat{X}(s) = x$ から出発した補間過程 \hat{X} が時間幅 $t - s$ の間、すなわち、 $0 \leq \nu \leq 1$ の間に壁 R に到達する確率であるが、上の変数変換式からわかるように、これは、新しい過程 $Z(\tau)$ にとっては、全時間中 ($0 \leq \tau < \infty$) に $Z(0) = 0$ を出た過程が壁 $R - x$ に到達する確率に相当する。したがって、このような到達確率を得るため、 $Z(\tau)$ の満たす Fokker-Planck 方程式を求めると、(Z の generator を計算することにより) 以下のようになる。

$$(6) \quad \frac{\partial \rho}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial z}(\hat{b} \cdot \rho) + \frac{\hat{\sigma}^2}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2}$$

ただし、

$$(7) \quad \hat{b}(z, \tau) = \frac{((\sigma_2/\sigma_1)^2 - 1)\delta t}{2(1 + \tau(\sigma_2/\sigma_1)^2\delta t)(1 + \tau\delta t)} z + \left(1 - \frac{\tau((\sigma_2/\sigma_1)^2 - 1)\delta t}{2(1 + \tau(\sigma_2/\sigma_1)^2\delta t)(1 + \tau\delta t)}\right)(y - R)\delta t \\ + \left(1 - \frac{\tau((\sigma_2/\sigma_1)^2 - 1)\delta t}{2(1 + \tau(\sigma_2/\sigma_1)^2\delta t)}\right) \frac{(b_1 - b_2 + c)(\delta t)^2}{(1 + \tau\delta t)^2},$$

$$(8) \quad \hat{\sigma}(\tau) = \sqrt{\frac{1 + \tau(\sigma_2/\sigma_1)^2\delta t}{1 + \tau\delta t}} \sigma_1 \delta t.$$

この境界条件 $\rho(R - x) = 0$ のもとでの基本解を導けば W が計算できる。しかしながら、(6) 式の係数が時間を含む非同次関数なので、このままでは級数の形でしか基本解は求まらず、よって W の形が複雑になる。これは実用的観点からするとあまり好ましい事ではない。なぜなら、補正確率 W の形が複雑になるとその計算自身に時間がかかり、数え落とし補正を考えた意味がなくなるからである。(計算時間がかかってもよいのなら、時間刻み幅 δt をもっと小さくできるのだから)。したがって、補正確率 W をなるべく簡単な形で求めるために、Fokker-Planck 方程式の各係数 $\hat{b}, \hat{\sigma}$ をその関数形を考慮して、 \hat{b} についてはその長時間平均 $\bar{b} = (y - R)\delta t$ 、 $\hat{\sigma}$ については $\hat{\sigma}(0) = \sigma_1 \delta t$ と $\hat{\sigma}(\infty) = \sigma_2 \delta t$ の相乗平均 $\bar{\sigma} = \sqrt{\sigma_1 \sigma_2} \delta t$ で置き換え、それに対する吸収条件を考慮した基本解を近似基本解として採用する。その結果は以下の様になる。

$$(9) \quad \rho(\tau, z, 0) = q(\tau, z, 0) - \exp\left(-\frac{2(y-R)(x-R)}{\sigma_1\sigma_2\delta t}\right)q(\tau, z, 2(R-x))$$

ただし、

$$(10) \quad q(\tau, z, \hat{z}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1\sigma_2(\delta t)^2\tau}} \exp\left(-\frac{(z-\hat{z}-\tau(y-R)\delta t)^2}{2\sigma_1\sigma_2(\delta t)^2\tau}\right)$$

(9)、(10)式をもとに、補正確率 W を計算すると、最終的に次式を得る。

$$(11) \quad W = \exp\left(-\frac{2(x-R)(y-R)}{\sigma_1\sigma_2\delta t}\right)$$

ただし、 $x = X_n$, $y = X_{n+1}$, $\sigma_1 = \sigma(X_n, t_n)$, $\sigma_2 = \sigma(X_{n+1}, t_{n+1})$ である。

注2. (11)式からわかるように、時間幅 δt が小さくなれば、あるいは、 $y-R$ 、 $x-R$ が大きい、すなわち、二点 $x = X_n$ 、 $y = X_{n+1}$ が吸収壁から遠ければ、上の補正確率 W は小さくなり、その効果は小さくなる。

注3. Clifford と Green らは、いわゆるブラウン橋過程を補間過程として採用し、それにもとづいて以下のような補正公式を導いている [7]。

$$(12) \quad W = \exp\left(-\frac{2(x-R)(y-R)}{\sigma^2\delta t}\right)$$

ただし、 $x = X_n$, $y = X_{n+1}$, $\sigma = \sigma(X_n, t_n)$ 。これと (11) 式とを比較すればわかるように、新しい公式が拡散係数関数 σ の二時点での値を含むのにたいし、この公式はそれの一時点での値しか含んでいない。すなわち、(11) 式のほうが、もとの SDE がもつ情報をより一層反映しており、良い補正結果が期待できる。同時に、(11)、(12) 式の形から、拡散係数関数が定数の場合には二つの結果は全く一致し、そうでない場合でも、時間幅 δt が小さいほど、ふたつの公式の差異が顕著ではなくなっていくこともわかる。

4. 計算機実験

さて、以上で得られた結果の効果を実際の計算機実験で確かめてみる [8]。初めに、第1節で述べたクラスター内2原子の反応問題でよく取り扱われる次の SDE を取り上げる [1]。

$$(13) \quad dX(t) = \frac{2}{X}dt + \sqrt{2}dw(t)$$

$$(14) \quad dX(t) = \left(\frac{2}{X} + \frac{c}{X^2}\right)dt + \sqrt{2}dw(t)$$

ただし、 c は定数で、一般には $|c| \ll 1$ 。(13) 式は、反応をおこす 2 原子が互いに独立なブラウン運動 (3次元) に従って溶液中を漂うとき、その原子間距離 X が従う SDE であり、その式でさらに 2 原子間距離に関係するポテンシャル関数 $U = c/X$ の影響を考慮したのが (14) 式である。とくに後者の SDE は、 I_2 分子の再合成反応のシミュレーションで用いられている。以下、これらの SDE をもちいて補正公式 (11) 式の効果をみる。

まず、設定であるが、サンプル数 2000、初期値 0.5、吸収壁 0.2、 $c = 0.1$ に取り、SDE の離散化には Euler-Maruyama 法による差分式を利用した。そして、(13)、(14) 式の差分式において時間刻み幅 δt を各々 10^{-1} 、 10^{-2} 、 10^{-3} 、 10^{-4} にとって X を変動させ、第 1 節で述べた方針に従って各時点ごとに生き残りサンプル数を計算した。その結果は、SDE (13) 式については図 3、SDE (14) 式については図 4 のようになった。これをみると、いずれの場合も、時間刻み幅 10^{-1} で補正公式 (11) 式をもちいた結果は、刻み幅 10^{-4} の結果に近いものとなった。また、計算時間については、刻み幅 10^{-1} のときの計算時間を 1 とすると、刻み幅 10^{-4} のときは 1000 程度になり、非常に時間がかかるのに対し、刻み幅 10^{-1} で補正をかけたときの計算時間は、せいぜい 3 程度で収まった。補正効果は注 2 で述べた初期値や吸収壁の値、さらには SDE の形等にも依存していると考えられるので、シミュレーション結果だけからその定量的な評価を下すのはむずかしいが、補正の定性的な有効性については以上の事実から認めることができよう。

次に、注 3 で述べた Clifford と Green (以下、CG) らの補正公式 (12) 式と本稿の公式 (11) 式とを比較し、その効果の違いを確かめる。そのためには拡散係数が定数でなく関数の形をした SDE を用意する必要があるので、本稿では、上記反応モデルの話題には直接には関係しないが、(13) 式の原子間距離 X の二乗 $Y = X^2$ が満たすつぎの SDE を例として取り上げる。

$$(15) \quad dY(t) = 6dt + 2\sqrt{2Y(t)}dw(t)$$

この式にもとづき、前と同様のシミュレーションを行ない (ただし、初期値 0.25、吸収壁 0.04 にとった)、 10^{-1} 、 10^{-2} 刻みの場合に上記二種の補正を行った。その結果が図 5、図 6 である。まず、図 5 を見ると、 10^{-1} 刻みに対する (11) 式の補正結果のほうが、同じ刻みにたいする (12) 式の結果よりも 10^{-3} 刻みの結果に近い。すなわち、本稿の公式 (11) 式のほうが CG の公式 (12) よりもよい補正効果を与えていることがわかる。また、図 6 から、補正をかける対象の時間刻み幅が小さくなると、この両者の補正効果の差が縮まることが確認される。これらの事実は、注 3. で述べた考察の正当性を裏付けている。なお、この例では図 3、4 の二例と異なり、 10^{-1} 刻みに対する補正の効果は、本稿の公式 (11) 式の場合でも小さく、 10^{-4} 刻みの結果とのギャップが認められる。しかしながら、図 5、6 をあわせ見ると、

10^{-2} 刻みに対する補正の場合には良い効果が認められ、CGらの場合で 10^{-4} 刻み、本稿の場合で 10^{-5} 刻みの結果と同程度の効果が見込まれる（後者については、シミュレーションの初めの短い時間範囲で見るとこの通りであり、現在さらに図5、6で扱った程度の時間範囲でこれを確認中である）。

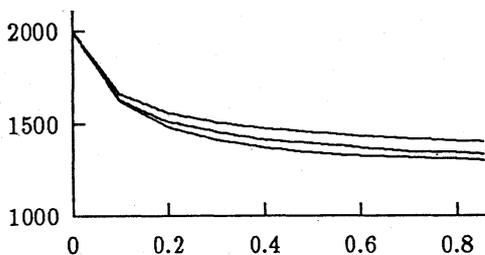


図3：(13)式の場合。上から 10^{-3} 刻み、 10^{-1} 刻みで補正あり、 10^{-4} 刻み。たて軸生き残りサンプル数、よこ軸時間（以下同様）。

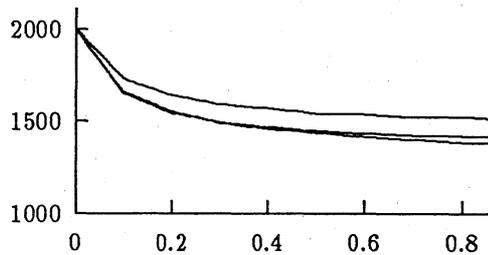


図4：(14)式の場合。上から 10^{-3} 刻み、 10^{-1} 刻みで補正あり、 10^{-4} 刻み。

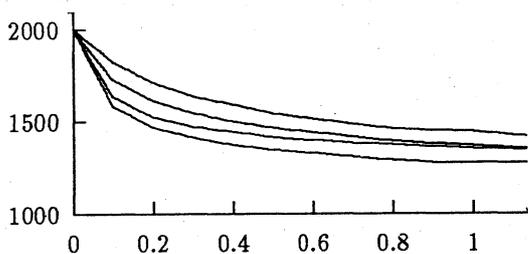


図5：(15)式の場合。上から 10^{-1} 刻みのCG補正、本稿の補正、 10^{-3} 刻み、 10^{-4} 刻み。

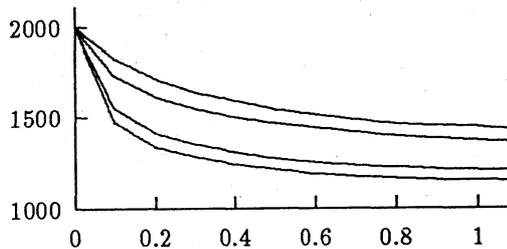


図6：(15)式で、上から 10^{-1} 刻みのCG補正、本稿の補正、 10^{-2} 刻みのCG補正、本稿の補正。

5. 結語

本稿では、吸収壁をともなう拡散過程のシミュレーションにおいて生じる吸収壁到達サンプル数の数え落とし問題を解決するために、“確率過程補間”の考え方をを用いて数え落とし誤差を補正する公式を近似的に導いた。さらに、具体的なシミュレーションを通じて、得られた補正公式の有効性を確認した。ここで、本稿の内容に関する注意・今後の展望等について（多少願望を交えながら）述べてみたい。

まず、本稿では Euler-Maruyama 法の場合のみ紹介したが、例えば Runge-Kutta 法[9]の場合でも補正公式を用いる効果は（Euler-Maruyama 法ほどではないにせよ）認められる[8]。このように種々のSDE離散化方法にたいし補正公式の効果を確かめることは、今後当

然扱われるべき課題であろう。また、吸収壁ではなく反射壁の場合の補正公式の導出とその効果の確認も興味深い問題である。なお、本稿の補正公式の効果を向上させるためには、それを導出するさいの近似計算を改良が必要であるが、これについては、Fokker-Planck 方程式 (6) - (8) 式の摂動計算による近似解精度の向上とそれに基づく補正公式の改良を検討中である。

最後に、本稿で用いた確率過程の補間に関する今後の展開について。良く知られているように、数値解析の分野においては、“補間”の概念は非常に幅広く用いられ、かつ重要な役割を果たしている（例えば、スプライン補間、有限要素法など）。この事実を考慮すると、確率数値解析において確率論的補間法の概念を確立することは、数学的にも応用上も重要かつ興味深い研究課題であろう。この観点から、現在、いわゆる非因果確率積分[10]の枠組みでの確率論的補間法の定式化を考察中である。これは“補間”が時間について“非因果”な概念であることからすると自然なことであり、特に第2節で求めた補間過程の表現 (4) 式もその枠組みで簡単に導出できる可能性がある。今後、この方向での基礎的研究を進めると同時に、通常の数値解析における補間の応用にならって、確率数値解析における確率論的補間の応用・新展開についての可能性も模索してみたい。

REFERENCES

1. P. Clifford, N. J. B. Green and M. J. Pilling, *J. R. Statist. Soc. B* **49** (1987), 266.
2. T. Misawa, *J. Math. Phys.* **34** (1993), 775.
3. T. Misawa. to appear in *Phys. Lett. A*.
4. K. Itô, *Extension of stochastic integrals*, "Proc. Intern. Symp. SDE, Kyoto 1976", (K. Itô, ed.) Wiley, New York, 1978, 95.
5. U. G. Haussmann and E. Pardoux, *Ann. of Prob.* **14** (1986), 1188.
6. P. Lévy, "Mémor. Sci. Math.", Fasc. 126, Gauthier-Villars, Paris, 1954.
7. P. Clifford and N. J. B. Green, *Molecular Phys.* **57** (1986), 123.
8. T. Misawa and H. Itakura. in preparation.
9. J. P. Klauder, *SIAM J. Numer. Anal.* **22** (1985), 1153.
10. S. Ogawa, *Japan J. Appl. Math.* **2** (1985), 229.