

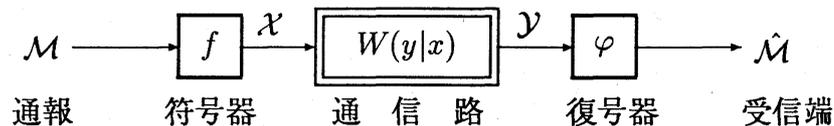
## 情報理論における組合せ論的問題

専修大学 経営学部 佐藤 創 (Hajime Sato)

情報理論は情報源および通信路の確率モデルにもとづき情報伝送率の理論的境界に関して確率的な議論を行なうのが主流であるが、情報伝送におけるエラーを全く許さないという極端な条件を課すると組合せ論的な様相を帯びてくる。本論に先立ち、情報理論の分野ですでに知られている組合せ論的問題を2つ紹介する。

### 1. 通信路のゼロエラー容量

通信路の符号化問題は次のように定式化される。離散定常独立通信路の確率モデルは入力記号、出力記号の有限集合をそれぞれ  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  として、 $x$  が入力されたとき  $y$  が出力される条件付き確率  $W(y|x)$ , ( $x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y}$ ) によって与えられる。



この通信路の符号化は、通報の有限集合  $\mathcal{M}$  を定めてその要素  $m \in \mathcal{M}$  に対して、一定の長さ  $n$  の  $\mathcal{X}$  のある列  $\mathbf{x} = x_1 x_2 \cdots x_n$  を対応させることである。この写像を

$f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{X}^n$  で表し,  $f(m) = x_1 x_2 \cdots x_n$  を  $m$  の符号語と呼ぶ。これらの符号語が通信路の入力列であり, 入力列  $\mathbf{x} \in \mathcal{X}^n$  に対して出力列  $\mathbf{y} = y_1 y_2 \cdots y_n \in \mathcal{Y}^n$  が得られる確率は  $W(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^n W(y_j|x_j)$  である。

通信路の出力列の復号は,  $\mathcal{M}$  を含む有限集合  $\hat{\mathcal{M}}$  を定め, 長さ  $n$  の  $\mathcal{Y}$  の列に対して  $\hat{\mathcal{M}}$  の要素を対応させることである。この写像を  $\varphi: \mathcal{Y}^n \rightarrow \hat{\mathcal{M}}$  で表し, 集合  $\varphi^{-1}(m)$  を通報  $m$  の復号領域と呼ぶ。写像の対  $(f, \varphi)$  をこの通信路に対する長さ  $n$  の符号と呼ぶ。

この伝送系によって通報  $m$  が誤って復号される確率は  $e(m) = 1 - W(\varphi^{-1}(m)|f(m))$  である。その最大値  $e(f, \varphi) = \max_{m \in \hat{\mathcal{M}}} e(m)$  を符号  $(f, \varphi)$  の誤り確率と呼ぶ。一方, すべての通報は等頻度で伝送の必要性が生ずるものと仮定すれば, 1個の通報のもつ情報量は  $\log |\mathcal{M}|$  であるから, この通信路の使用1回あたり  $r(f, \varphi) = \frac{1}{n} \log |\mathcal{M}|$  の情報量が伝送されることになる。これを符号  $(f, \varphi)$  の伝送率と呼ぶ。

実数  $R$  がこの通信路の  $\varepsilon$ -達成可能伝送率であるとは“任意の  $\delta > 0$  と十分大きなすべての整数  $n$  に対して,  $e(f, \varphi) \leq \varepsilon$  かつ  $r(f, \varphi) > R - \delta$  を満たす長さ  $n$  の符号  $(f, \varphi)$  が存在すること”と定義し,  $\varepsilon$ -達成可能伝送率全体の集合を  $\mathcal{R}_\varepsilon(W)$  で表す。そして  $C(W) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\varepsilon > 0} \bigcap \mathcal{R}_\varepsilon(W)$  をこの通信路の容量と呼ぶ。一方,  $C_0(W) \stackrel{\text{def}}{=} \sup \mathcal{R}_0(W)$  をゼロエラー容量と呼ぶ。

Shannon (1948) は通信路の容量  $C(W)$  が  $Q$  を  $\mathcal{X}$  上の確率分布として

$$C(W) = \sum_{x \in \mathcal{X}} \sum_{y \in \mathcal{Y}} Q(x) W(y|x) \log \frac{W(y|x)}{\sum_{x' \in \mathcal{X}} Q(x') W(y|x')} \quad (= \max_Q I(W; Q))$$

で与えられることを示した。しかし, ゼロエラー容量  $C_0(W)$  を求める問題は未解決である。

長さ  $n$  の符号  $(f, \varphi)$  についてゼロエラー  $e(f, \varphi) = 0$  であることは, 任意の通報の対

$m, m' \in \mathcal{M}$  ( $m \neq m'$ ) に対して  $\forall \mathbf{y} \in \mathcal{Y}^n$   $W(\mathbf{y}|f(m))W(\mathbf{y}|f(m')) = 0$  のことであるから、条件付き確率  $W$  から  $\mathcal{X}^n$  上のグラフ  $G_W^n$  を

$$(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \in G_W^n \Leftrightarrow \exists \mathbf{y} \in \mathcal{Y} \ W(\mathbf{y}|\mathbf{x})W(\mathbf{y}|\mathbf{x}') > 0$$

と定義すれば、 $f(\mathcal{M})$  がこのグラフの安定集合であることを意味する。またグラフ  $G_W^n$  は、集合  $\mathcal{X}$  上で定義されるグラフ  $G_W (= G_W^1)$  の“正則積”の意味における  $n$  乗である ( $G_W^n = (G_W)^n$ )。ここにグラフ  $G$  と  $H$  の正則積  $GH$  は

$$(u_1v_1, u_2v_2) \in GH \Leftrightarrow ((u_1, u_2) \in G \vee u_1 = u_2) \wedge ((v_1, v_2) \in H \vee v_1 = v_2) \wedge (u_1v_1 \neq u_2v_2)$$

で定義されるものとする。 $G_W$  は確率  $W(y|x)$  のゼロが非ゼロかだけに依存し、確率の値の大小にはよらない。結局、ゼロエラー容量  $C_0(W)$  の計算は次のような組合せ論的な問題となる (Shannon, 1956)。グラフ  $G$  の安定数を  $\alpha(G)$  とする。

$$C_0(W) = \log \Theta(G_W) \quad \text{ここに,} \quad \Theta(G) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{n>0} \sqrt[n]{\alpha(G^n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\alpha(G^n)}.$$

一般のグラフ  $G$  に対して  $\Theta(G)$  を計算する問題は未解決である。 $\Theta(G)$  はグラフ  $G$  の“Shannon 容量”と呼ばれ、 $G$  のクリーク被覆数を  $\theta(G)$  とすれば

$$\alpha(G) \leq \sqrt[n]{\alpha(G^n)} \leq \Theta(G) \leq \sqrt[n]{\theta(G^n)} \leq \theta(G)$$

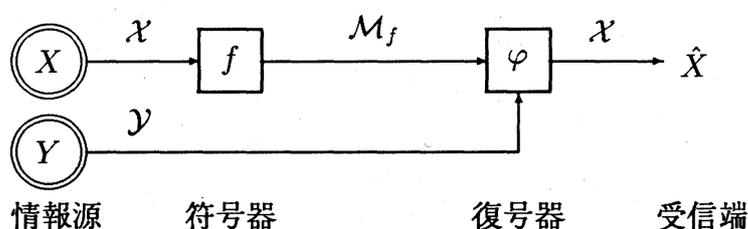
の関係がある。例えば  $C_n$  を  $n$  点閉路グラフとすれば、 $\Theta(C_{2n}) = n$  は自明、 $\Theta(C_5) = \sqrt{5}$  (Lovász, 1979)、 $\Theta(C_7)$  は不明である。明らかに、 $\alpha(G) = \theta(G)$  ならば、 $\Theta(G) = \alpha(G)$  である。例えば完全グラフ、完全2部グラフに関して  $\Theta(K_n) = 1$ 、 $\Theta(K_{m,n}) = \max\{m, n\}$  である。さらに、グラフ  $G$  のすべての部分グラフ  $G_A$  について  $\alpha(G_A) = \theta(G_A)$  であるようなグラフは  $\alpha$ -完全グラフと呼ばれ、詳しく研究されている (例えば, Berge and Chvatal, 1984)。

例.  $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ,  $W(y|x) > 0 \Leftrightarrow (y = x) \vee (y = x + 1 \pmod{5})$  とすれば,  
 $G_W = C_5$ ,  $C_0(W) = \log \Theta(C_5) = \frac{1}{2} \log 5$  である。具体的な符号は次のように構成される。

$m$	$f(m)$	$\varphi^{-1}(m)$
0	00	00, 10, 01, 11
1	12	12, 22, 13, 23
2	24	24, 34, 20, 30
3	31	31, 41, 32, 42
4	43	43, 03, 44, 04

## 2. 補助情報源をもつ情報源のゼロエラー圧縮限界

補助情報源をもつ情報源の符号化問題は次のように定式化される。互いに相関をもつ  
 2つの離散定常独立情報源  $X, Y$  の確率モデルはそれぞれのアルファベットを  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  とし  
 て、対  $(x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$  の発生する確率分布  $P(x, y)$ , ( $x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y}$ ) によって与えられる。



情報源  $X$  の符号化は一定の長さ  $n$  の  $\mathcal{X}$  の各列  $\mathbf{x}$  を有限集合  $\mathcal{M}_f$  の要素に対応させることである。この写像を  $f: \mathcal{X}^n \rightarrow \mathcal{M}_f$  で表し、 $\mathcal{M}_f$  の上への写像であることを仮定する。補助情報源  $Y$  の下での復号は、確率  $P(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \prod_{j=1}^n P(x_j, y_j)$  で発生する対  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  に関して、写像  $\varphi: \mathcal{M}_f \times \mathcal{Y}^n \rightarrow \mathcal{X}^n$  で与えられる。長さ  $n$  の符号  $(f, \varphi)$  の誤り確率を  $e(f, \varphi) = \Pr\{\varphi(f(X^n), Y^n) \neq X^n\}$ , 情報源  $X$  の圧縮率を  $r(f, \varphi) = \frac{1}{n} \log |\mathcal{M}_f|$  と定義する。

実数  $R$  が  $\varepsilon$ -達成可能圧縮率であるとは“任意の  $\delta > 0$  と十分大きなすべての整数  $n$  に対して、 $e(f, \varphi) \leq \varepsilon$  かつ  $r(f, \varphi) < R + \delta$  を満たす長さ  $n$  の符号  $(f, \varphi)$  が存在すること”と定義し、 $\varepsilon$ -達成可能圧縮率全体の集合を  $\mathcal{R}_\varepsilon(X)$  で表す。そして  $R(X) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{\varepsilon > 0} \bigcap \mathcal{R}_\varepsilon(X)$  を補助情報源  $Y$  をもつ情報源  $X$  の圧縮限界と呼ぶ。一方、 $R_0(X) \stackrel{\text{def}}{=} \inf \mathcal{R}_0(X)$  をゼロエラー圧縮限界と呼ぶ。

Slepian と Wolf (1973) は

$$R(X) = - \sum_{x \in \mathcal{X}} \sum_{y \in \mathcal{Y}} P(x, y) \log \frac{P(x, y)}{\sum_{x' \in \mathcal{X}} P(x', y)} \quad (= H(X|Y))$$

であることを示した。しかし、ゼロエラー圧縮限界  $R_0(X)$  を求める問題は未解決である。

長さ  $n$  の符号  $(f, \varphi)$  についてゼロエラー  $e(f, \varphi) = 0$  であることは、任意の列の対  $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathcal{X}^n$  ( $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}'$ ) に対して  $\exists \mathbf{y} \in \mathcal{Y}^n P(\mathbf{x}, \mathbf{y})P(\mathbf{x}', \mathbf{y}) > 0 \Rightarrow f(\mathbf{x}) \neq f(\mathbf{x}')$  のことであるから、同時確率分布  $P$  から  $\mathcal{X}^n$  上のグラフ  $G_X^n$  を

$$(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \in G_X^n \Leftrightarrow \exists \mathbf{y} \in \mathcal{Y}^n P(\mathbf{x}, \mathbf{y})P(\mathbf{x}', \mathbf{y}) > 0$$

と定義すれば、写像  $f$  がグラフ  $G_X^n$  の配色であることを意味する。またグラフ  $G_X^n$  は、 $G_X (= G_W^1)$  の正則積の意味における  $n$  乗である ( $G_X^n = (G_X)^n$ )。  $G_X$  は正の確率  $P(x, y) > 0$  の値には無関係で集合  $\mathcal{P} = \{(x, y); P(x, y) > 0\}$  にのみ依存して決定される。したがって、ゼロエラー圧縮限界  $R_0(X)$  の計算は次のような組合せ論的な問題となる (Witsenhausen, 1976)。グラフ  $G$  の彩色数を  $\gamma(G)$  とする。

$$R_0(X) = \log \Gamma(G_X) \quad \text{ここに,} \quad \Gamma(G) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{n > 0} \sqrt[n]{\gamma(G^n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\gamma(G^n)}.$$

一般のグラフ  $G$  に対して  $\Gamma(G)$  を計算する問題は未解決である。グラフ  $G$  のクリー

ク数を  $\omega(G)$  とすれば

$$\omega(G) = \sqrt[n]{\omega(G^n)} \leq \Gamma(G) \leq \sqrt[n]{\gamma(G^n)} \leq \gamma(G)$$

の関係がある。例えば、 $\Gamma(C_{2n}) = 2$  は自明、 $\Gamma(C_5) = \sqrt{5}$ 、 $\Gamma(C_7)$  は不明である。明らかに、 $\gamma(G) = \omega(G)$  ならば  $\Gamma(G) = \gamma(G)$  である。例えば、 $\Gamma(K_n) = n$ 、 $\Gamma(K_{m,n}) = 2$  である。さらに、グラフ  $G$  のすべての部分グラフ  $G_A$  について  $\gamma(G_A) = \omega(G_A)$  であるようなグラフは  $\gamma$ -完全グラフと呼ばれ、 $\alpha$ -完全グラフと等価であることが証明されている (Lovás, 1972)。

例.  $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ,  $P(x, y) > 0 \Leftrightarrow (y = x) \vee (y = x + 1 \pmod{5})$  とすれば、 $G_X = C_5$ ,  $R_0(X) = \log \Gamma(C_5) = \frac{1}{2} \log 5$  である。具体的な符号は次のように構成される。

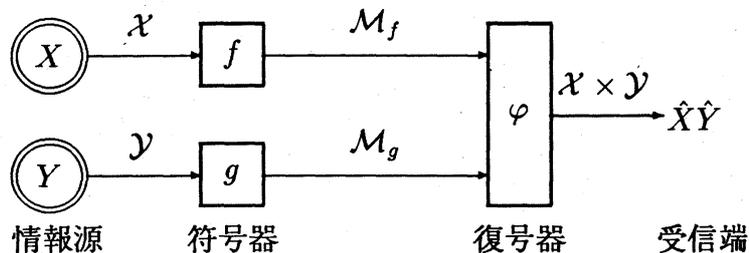
$x_1 x_2$	$z = f(x_1 x_2)$
00 12 24 31 43	0
01 13 20 32 44	1
02 14 21 33 40	2
03 10 22 34 41	3
04 11 23 30 42	4

$$x_1 x_2 = \varphi(z, y_1 y_2)$$

$z$	$y_1 y_2$	00	01	02	03	04	10	11	12	13	14	20	21	22	23	24	30	31	32	33	34	40	41	42	43	44			
0		00	00	43	43	00	00	12	12	24	24	12	12	24	24	31	31	24	24	31	31	43	43	00	00	43	43		
1		44	01	01	44	01	01	13	13	20	20	13	13	20	20	32	32	44	44	01	01	13	13	20	20	32	32	44	
2		40	02	02	40	02	02	14	14	21	21	14	14	21	21	33	33	40	40	02	02	14	14	21	21	33	33	40	
3		41	03	03	41	03	03	10	10	22	22	10	10	22	22	34	34	41	41	03	03	10	10	22	22	34	34	41	
4		04	04	11	11	04	04	11	11	23	23	04	04	11	11	23	23	30	30	04	04	11	11	23	23	30	30	42	42

### 3. 2-情報源のゼロエラー圧縮率領域

前節の問題の一般化を試みる（むしろ前節は本節の特殊な場合に過ぎない）。情報源に関する前節のような確率モデルを2-情報源と呼ぶ。今度は情報源  $Y$  も情報源  $X$  と同様に上への写像  $g: \mathcal{Y}^n \rightarrow \mathcal{M}_g$  によって符号化され、復号は写像  $\varphi: \mathcal{M}_f \times \mathcal{M}_g \rightarrow \mathcal{X}^n \times \mathcal{Y}^n$  で与えられる。



長さ  $n$  の符号  $(f, g; \varphi)$  の誤り確率を  $e(f, g; \varphi) = \Pr\{\varphi(f(X^n), g(Y^n)) \neq (X^n, Y^n)\}$ ,

2-情報源  $(X, Y)$  の圧縮率ベクトルを  $r(f, g; \varphi) = \left(\frac{1}{n} \log |\mathcal{M}_f|, \frac{1}{n} \log |\mathcal{M}_g|\right)$  と定義する。

実数の対  $(R_X, R_Y)$  が  $\varepsilon$ -達成可能圧縮率ベクトルであるとは“任意の  $\delta > 0$  と十分大きなすべての整数  $n$  に対して、 $e(f, g; \varphi) \leq \varepsilon$  かつ  $r(f, g; \varphi) < (R_X + \delta, R_Y + \delta)$  を満たす長さ  $n$  の符号  $(f, g; \varphi)$  が存在すること”と定義し、 $\varepsilon$ -達成可能圧縮率ベクトル全体の集合を  $\mathcal{R}_\varepsilon(X, Y)$  で表す。そして集合  $\mathcal{R}(X, Y) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{R}_\varepsilon(X, Y)$  を圧縮領域と呼ぶ。一方、 $\mathcal{R}_0(X, Y)$  をゼロエラー圧縮領域と呼ぶ。

先にあげた Slepian と Wolf (1973) の結果は

$$\mathcal{R}(X, Y) = \{(R_X, R_Y); R_X \geq H(X|Y), R_Y \geq H(Y|X), R_X + R_Y \geq H(XY)\}$$

という一般化された形で与えられている ( $H(XY) \stackrel{\text{def}}{=} -\sum_{x,y} P(x,y) \log P(x,y)$ )。しかし、

ゼロエラー圧縮領域  $\mathcal{R}_0(X, Y)$  を求める問題は未解決である。

長さ  $n$  の符号  $(f, g; \varphi)$  についてゼロエラー  $e(f, g; \varphi) = 0$  であることは、任意の列  $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathcal{X}^n, \mathbf{y}, \mathbf{y}' \in \mathcal{Y}^n$  に対して

$$(P(\mathbf{x}, \mathbf{y})P(\mathbf{x}', \mathbf{y}') > 0) \wedge ((\mathbf{x}, \mathbf{y}) \neq (\mathbf{x}', \mathbf{y}')) \Rightarrow (f(\mathbf{x}), g(\mathbf{y})) \neq (f(\mathbf{x}'), g(\mathbf{y}'))$$

のことである。したがって、領域  $\mathcal{R}_0(X, Y)$  は集合  $\mathcal{P}$  のみから決定され、それを求めることは前節より複雑な組合せ論的問題となる。

前節の考察をさらに進めれば次の事実を得ることができる。

$$\text{定理 1} \quad (R_X, \log |\mathcal{Y}|) \in \mathcal{R}_0(X, Y) \Leftrightarrow R_X \geq \log \Gamma(G_X),$$

$$(\log |\mathcal{X}|, R_Y) \in \mathcal{R}_0(X, Y) \Leftrightarrow R_Y \geq \log \Gamma(G_Y).$$

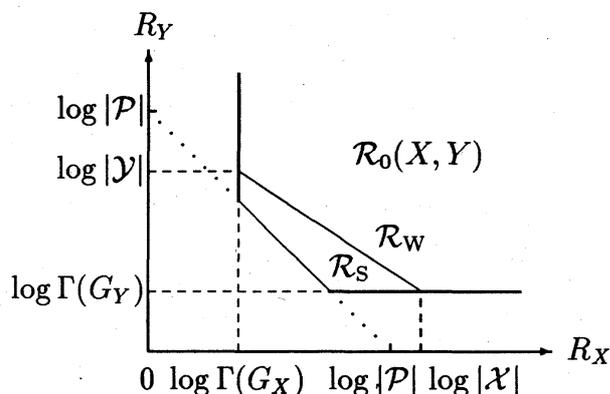
$$\text{系 1} \quad \mathcal{R}_S \stackrel{\text{def}}{=} \{(R_X, R_Y); R_X \geq \log \Gamma(G_X), R_Y \geq \log \Gamma(G_Y), R_X + R_Y \geq \log |\mathcal{P}|\},$$

$$\mathcal{R}_W \stackrel{\text{def}}{=} \{(R_X, R_Y); R_X \geq \log \Gamma(G_X), R_Y \geq \log \Gamma(G_Y),$$

$$\frac{R_X - \log \Gamma(G_X)}{\log |\mathcal{X}| - \log \Gamma(G_X)} + \frac{R_Y - \log \Gamma(G_Y)}{\log |\mathcal{Y}| - \log \Gamma(G_Y)} \geq 1\}$$

(ただし、第3の条件は分母が0のときは分子が非負であることを意味する)

とおけば、 $\mathcal{R}_W \subset \mathcal{R}_0(X, Y) \subset \mathcal{R}_S$  である。



系 2  $(\log \Gamma(G_X), \log \Gamma(G_Y)) \in \mathcal{R}_0(X, Y)$  ならば

$$\mathcal{R}_0(X, Y) = \{(R_X, R_Y); R_X \geq \log \Gamma(G_X), R_Y \geq \log \Gamma(G_Y)\}.$$

定理2.  $G_X$  が完全グラフならば  $\Gamma(G_X) = |\mathcal{X}|$ , したがって

$$\mathcal{R}_0(X, Y) = \{(R_X, R_Y); R_X \geq \log |\mathcal{X}|, R_Y \geq \log \Gamma(G_Y)\}.$$

系  $G_X, G_Y$  が完全グラフならば

$$\mathcal{R}_0(X, Y) = \{(R_X, R_Y); R_X \geq \log |\mathcal{X}|, R_Y \geq \log |\mathcal{Y}|\}.$$

集合  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  がそれぞれ  $\tau$  個の部分集合の直和で表され ( $\mathcal{X} = \bigcup_{i=1}^{\tau} \mathcal{X}_i, \mathcal{Y} = \bigcup_{i=1}^{\tau} \mathcal{Y}_i$ ), 集合  $\mathcal{P}$  が  $\tau$  個の直積の直和で表される ( $\mathcal{P} = \bigcup_{i=1}^{\tau} (\mathcal{X}_i \times \mathcal{Y}_i)$ ) とき, その2-情報源  $(X, Y)$  を対角型と呼ぶ (この情報源の同時確率分布の行列表現は, 行列の既約分解と同様に, 行や列の置換により非ゼロ要素の長方形が主対角線上に並んだ形にすることができる)。

定理3 2-情報源  $(X, Y)$  が対角型であって,

$$\mathcal{P} = \bigcup_{i=1}^{\tau} (\mathcal{X}_i \times \mathcal{Y}_i), \quad M = \max_{1 \leq i \leq \tau} |\mathcal{X}_i|, \quad N = \max_{1 \leq i \leq \tau} |\mathcal{Y}_i|$$

とすれば

$$\mathcal{R}_0(X, Y) = \{(R_X, R_Y); R_X \geq \log M, R_Y \geq \log N, R_X + R_Y \geq \log |\mathcal{P}|\}.$$

とくに,  $|\mathcal{S}| \leq MN$  のときはこの領域は次の形になる:

$$\mathcal{R}_0(X, Y) = \{(R_X, R_Y); R_X \geq \log M, R_Y \geq \log N\}.$$

例1.  $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  の分割がそれぞれ  $\mathcal{X}_1 = \{1, 2, 3\}, \mathcal{X}_2 = \{4, 5\}; \mathcal{Y}_1 = \{1, 2\}, \mathcal{Y}_2 = \{3, 4, 5\}$  であり,  $\mathcal{P} = (\mathcal{X}_1 \times \mathcal{Y}_1) \cup (\mathcal{X}_2 \times \mathcal{Y}_2)$  とする。  $M = |\mathcal{X}_1| = 3, N = |\mathcal{Y}_2| = 3, S = |\mathcal{X}_1||\mathcal{Y}_1| + |\mathcal{X}_2||\mathcal{Y}_2| = 12$  であるから,

$$\mathcal{R}_0(X, Y) = \{(R_X, R_Y); R_X \geq \log 3, R_Y \geq \log 3, R_X + R_Y \geq \log 12\}$$

である。

例2. 前節と同じ2-情報源に関して

$$\mathcal{R}_W = \{(R_X, R_Y); R_X \geq \frac{1}{2} \log 5, R_Y \geq \frac{1}{2} \log 5, R_X + R_Y \geq \frac{3}{2} \log 5\},$$

$$\mathcal{R}_S = \{(R_X, R_Y); R_X \geq \frac{1}{2} \log 5, R_Y \geq \frac{1}{2} \log 5, R_X + R_Y \geq \log 10\}$$

である。 $\mathcal{R}_W$  の外側にある点  $(\frac{1}{2} \log 13, \frac{1}{2} \log 9)$  を達成する符号を下に示す。

$$f: \mathcal{X}^2 \rightarrow \{1, \dots, 13\}$$

$$g: \mathcal{Y}^2 \rightarrow \{1, \dots, 9\}$$

$x_1$	$x_2$	0	1	2	3	4
0	0	3	4	11	8	2
1	1	7	6	12	7	1
2	2	4	11	5	8	3
3	3	6	12	9	10	2
4	4	10	13	1	5	9

$y_1$	$y_2$	0	1	2	3	4
0	0	8	6	5	9	3
1	1	7	9	7	4	6
2	2	3	1	8	5	2
3	3	4	2	6	7	1
4	4	5	3	1	4	2

$$\varphi: \{1, \dots, 13\} \times \{1, \dots, 9\} \rightarrow \mathcal{X}^2 \times \mathcal{Y}^2$$

$i$	$j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	42,42	14,24	14,20	42,43	42,02	14,14	14,10	-	42,03
2	2	34,34	34,44	04,04	34,30	34,40	04,14	04,10	04,00	-
3	3	24,34	24,24	24,20	24,30	-	00,01	00,10	00,00	00,11
4	4	20,21	20,31	20,20	20,30	01,02	01,01	01,12	-	01,11
5	5	-	43,44	43,04	43,43	22,23	22,32	22,33	22,22	43,03
6	6	11,21	30,31	30,41	30,30	30,40	-	11,12	11,22	11,11
7	7	10,21	13,24	10,20	13,13	13,23	13,14	10,10	-	10,11
8	8	23,34	23,24	03,04	03,13	23,23	03,14	23,33	-	03,03
9	9	32,42	44,44	44,04	32,43	44,40	32,32	32,33	44,00	-
10	10	33,34	33,44	40,41	33,43	40,40	40,01	33,33	40,00	-
11	11	21,21	21,31	-	02,13	02,02	21,32	02,12	21,22	02,03
12	12	31,42	31,31	31,41	12,13	12,23	31,32	12,12	12,22	-
13	13	41,42	-	41,41	-	41,02	41,01	-	-	-

符号の長さ  $n = 2$  におけるゼロエラー圧縮率ベクトル  $r(f, g; \varphi)$  の下限をなす点は次

の7点である。

$$(\frac{1}{2} \log 5, \frac{1}{2} \log 25), (\frac{1}{2} \log 8, \frac{1}{2} \log 16), (\frac{1}{2} \log 9, \frac{1}{2} \log 13), (\frac{1}{2} \log 12, \frac{1}{2} \log 12),$$

$$(\frac{1}{2} \log 13, \frac{1}{2} \log 9), (\frac{1}{2} \log 16, \frac{1}{2} \log 8), (\frac{1}{2} \log 25, \frac{1}{2} \log 5).$$

この情報源に関して領域  $\mathcal{R}_0(X, Y)$  を決定する問題は未解決である。

例3. 比較的規模の小さい2-情報源について、集合  $\mathcal{P}$  のパターンを枚挙し、そのゼロエラー圧縮率領域  $\mathcal{R}_0(X, Y)$  の決定を試みた。その結果を次に続く2ページに示す。 $|\mathcal{X}| \times |\mathcal{Y}| \leq 9$  ( $|\mathcal{Y}| \geq |\mathcal{X}| \geq 2$ ) の範囲で、領域  $\mathcal{R}_0(X, Y)$  の決定できないものが1つ見いだされた。それは  $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \{1, 2, 3\}$ ;  $\mathcal{P} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3)\}$  (13番目のもの) であり、これまでの考察から、

$$\mathcal{R}_W = \{(R_X, R_Y); R_X \geq 1, R_Y \geq 1, R_X + R_Y \geq \log 6\}$$

$$\mathcal{R}_S = \{(R_X, R_Y); R_X \geq 1, R_Y \geq 1, R_X + R_Y \geq \log 5\}$$

である。いまのところ、 $\mathcal{R}_0(X, Y)$  の点はすべて  $\mathcal{R}_W$  の中にある。

#### 4. 今後の課題

2-情報源  $X, Y$  のゼロエラー圧縮率領域  $\mathcal{R}_0(X, Y)$  を決定する問題は3節で述べたように部分的にしか解決されていない。しかも解かっている限りこの領域は  $\mathcal{R}_W$  か  $\mathcal{R}_S$  に等しい。領域  $\mathcal{R}_0(X, Y)$  が  $\mathcal{R}_W$  や  $\mathcal{R}_S$  に等しい2-情報源  $X, Y$  を特徴づける問題が残されている。そうでないタイプの2-情報源を発見することも興味ある探求である。

3節における符号化は固定長符号化と呼ばれるもので情報源からの出力列を一定の長さの符号語に変換するものであったが、可変長符号化への拡張を考えることができる。情報源からの出力列の長さが有限の範囲ではよく知られている Huffman 符号化法 (圧縮率最小の符号を構成する“組合せ論的”アルゴリズム) の2次元化問題となる。可変長符号化によるゼロエラー圧縮率領域は確率  $P(x, y)$  の値そのものに依存することになり、重み付きのグラフが考察の対象となる。

2-情報源の集合  $\mathcal{P}$  のパターンの枚挙 ( $|\mathcal{X}| \times |\mathcal{Y}| \leq 9, |\mathcal{Y}| \geq |\mathcal{X}| \geq 2$ )\*印が  $\mathcal{P}$  の点を表す。△印の点は  $\mathcal{P}$  に追加されても領域  $\mathcal{R}_0(X, Y)$  は変化しない。

①

$x \backslash y$	1	2
1	*	
2		*

②

$x \backslash y$	1	2
1	*	*
2	*	△

③

$x \backslash y$	1	2	3
1	*	*	
2			*

④

$x \backslash y$	1	2	3
1	*	*	
2		*	*

⑤

$x \backslash y$	1	2	3
1	*	*	*
2	*	△	△

⑥

$x \backslash y$	1	2	3	4
1	*	*	*	
2				*

⑦

$x \backslash y$	1	2	3	4
1	*	*		
2			*	*

⑧

$x \backslash y$	1	2	3	4
1	*	*	*	
2		△	*	*

⑨

$x \backslash y$	1	2	3	4
1	*	*	*	*
2	*	△	△	△

⑩

$x \backslash y$	1	2	3
1	*		
2		*	
3			*

⑪

$x \backslash y$	1	2	3
1	*	*	
2			*
3			*

⑫

$x \backslash y$	1	2	3
1	*	*	
2	*		
3			*

⑬

$x \backslash y$	1	2	3
1	*	*	
2		*	*
3			*

⑭

$x \backslash y$	1	2	3
1	*	*	
2	*	*	
3			*

⑮

$x \backslash y$	1	2	3
1	*	*	*
2	*	△	
3			*

⑯

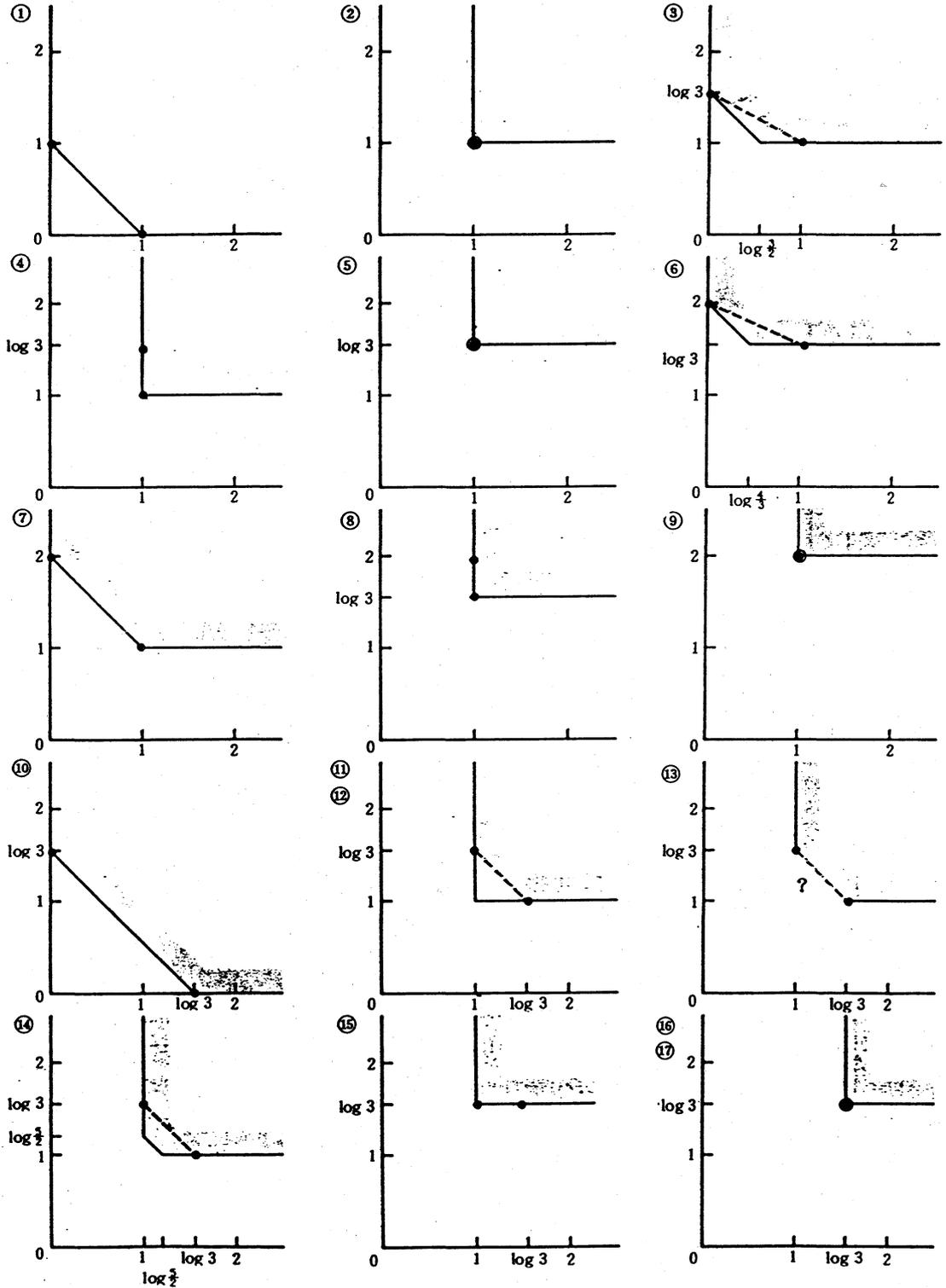
$x \backslash y$	1	2	3
1	*	*	*
2	*	△	△
3	*	△	△

⑰

$x \backslash y$	1	2	3
1	*	*	△
2	*	△	*
3	△	*	*

2-情報源の領域  $\mathcal{R}_0(X, Y)$

●印は領域  $\mathcal{R}_w$  の2つの端点を表す (○はその重複を示す)。



## 参考文献

- Berge, C. and Chvatal, V. eds.(1984), "Topics on perfect graphs," Annals of Discrete Mathematics, vol. 21, North-Holland Mathematics Studies, vol. 88, Elsevier.
- Huffman, D. A. (1952), "A method for the construction of minimum redundancy code," Proc. IRE, vol.40, pp.1098-1101.
- Lovász, L. (1972), "Normal hypergraphs and the perfect graph conjecture," Discrete Math. vol.2, pp.253-267.
- Lovász, L. (1979), "On the Shannon capacity of a graph," IEEE IT-25, no.1, pp.1-7.
- Shannon, C. E. (1948), "A mathematical theory of communication," Bell System Technical J., vol.27, pp.379-423 (Part 1), pp.623-656 (Part 2).
- Shannon, C. E. (1956), "The zero error capacity of a noisy channel," IRE IT-2, pp.8-19.
- Slepian, D. and Wolf, J. K. (1973), "Noiseless coding of correlated information sources," IEEE IT-19, no.4, pp.471-480.
- Witsenhausen, H. S. (1976), "The zero-error side information problem and chromatic numbers," IEEE IT-22, no.5, pp.592-593.