数理解析研究所講究録
第85[illegible]巻 1993年 48-63

コンパクト対称空間の体積

信州大学教養　阿部孝順（Kojun Abe）
―――――――　横田一郎（Ichiro Yokota）

1. 序

コンパクト Riemann 多様体 $M=(M,g)$ に対して，M の体積 $vol(M)$ は

$$vol(M)=\int_M \sqrt{\det(g_{ij})}\, dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n$$

で定義される．この定義より

metric g を ag （$a>0$ は定数）にかえると
$vol(M)$ は $\sqrt{a}^{\dim M} vol(M)$ にかわる．

ことが分かる．このように，体積は M の metric に関係する．これから，コンパクト Lie 群 G とコンパクト対称空間 $M=G/K$ の体積を求めるのであるが，その metric として G の Killing 形式 B から誘導されたものを用いる．すなわち，対称空間 $M=G/K$ に対して，群 G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の標準分解を

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{m}, \qquad \mathfrak{m}\cong T_o(M)$$

とするとき，$\mathfrak{g}$ の Killing 形式 B（正しくは −B）を $\mathfrak{k}$，$\mathfrak{m}$ に制限したものを用いて，G，K，M に metric をいれる．そして，この metric を用いたときの体積をそれぞれ

$$\mu(G), \qquad \mu_G(K), \qquad \mu_G(M)$$

で表すことにする．ただし，metric が退化していると困るので，以下，群 G の単純であると仮定する．さらに，G，M にコンパクトと連結は常に仮定しているので，この用語を省略する．各々の結果は次のようである．

$$S(n) = \frac{2^{(n+4)(n-1)/4}}{1!\cdots[\frac{n-2}{2}]!\;\Gamma(1+\frac{1}{2})\cdots\Gamma([\frac{n-1}{2}]+\frac{1}{2})}\,\pi^{(n+2)(n-1)/4}$$

symbol	space	volume
A_{n-1}	$SU(n)$	$\frac{2^{(n-1)(2n+3)/2}\; n^{n^2/2}}{1!2!\cdots(n-1)!}\pi^{(n-1)(n+2)/2}$
B_n	$Spin(2n+1)$	$\frac{2\cdot 2^{n(4n+5)/2}(2n-1)^{n(2n+1)/2}}{1!3!\cdots(2n-1)!}\pi^{n(n+1)}$
C_n	$Sp(n)$	$\frac{2^{n(3n+1)}\;(n+1)^{n(2n+1)/2}}{1!3!\cdots(2n-1)!}\pi^{n(n+1)}$
D_n	$Spin(2n)$	$\frac{2\cdot 2^{n(3n-1)}\;(n-1)^{n(2n-1)/2}}{1!3!\cdots(2n-3)!(n-1)!}\pi^{n^2}$
G_2	G_2	$\frac{2^{26}\;3^2\;\sqrt{3}}{5}\pi^8$
F_4	F_4	$\frac{2^{52}\;3^{45}}{5^4 7^2 11}\pi^{28}$
E_6	E_6	$\frac{2^{134}\;3^{29}\;\sqrt{3}}{5^5 7^3 11}\pi^{42}$
E_7	E_7	$\frac{2^{156}\sqrt{2}\;3^{111}}{5^{10}7^6 11^3 13^2 17}\pi^{70}$
E_8	E_8	?
AI	$SU(n)/SO(n)$	$\frac{2^{(n-1)(n+3)/2}\; n^{n(n+1)/4}}{1!2!\cdots(n-1)!\;S(n)}\pi^{(n-1)(n+2)/2}$
AII	$SU(2n)/Sp(n)$	$\frac{2^{(n-1)(4n+3)/2}\; n^{n(2n-1)/2}}{2!4!\cdots(2n-2)!}\pi^{n^2-1}$

$AIII$	$\dfrac{SU(m+n)}{S(U(m)\times U(n))}$	$\dfrac{1!2!\cdots(m-1)!\,1!2!\cdots(n-1)!}{1!2!\cdots(m+n-1)!}$ $\times\, 2^{2mn}(m+n)^{mn}\pi^{mn}$
BDI	$\dfrac{SO(m+n)}{SO(m)\times SO(n)}$	$(2(m+n-2))^{mn/2}\dfrac{S(m+n)}{S(m)\,S(n)}$
$DIII$	$SO(2n)/U(n)$	$2^{3n(n-1)/2}\dfrac{1!2!\cdots(n-2)!}{1!3!\cdots(2n-3)!}$ $\times\,(n-1)^{n(n-1)/2}\,\pi^{n(n-1)/2}$
CI	$Sp(n)/U(n)$	$2^{n(3n+1)/2}\,\dfrac{1!2!\cdots(n-1)!}{1!3!\cdots(2n-1)!}$ $\times\,(n+1)^{n(n+1)/2}\,\pi^{n(n+2)/2}$
CII	$\dfrac{Sp(m+n)}{Sp(m)\times Sp(n)}$	$\dfrac{1!3!\cdots(2m-1)!\,1!3!\cdots(2n-1)!}{1!3!\cdots(2m+2n-1)!}$ $\times\,2^{6mn}\,(m+n+1)^{2mn}\,\pi^{2mn}$
G	$\dfrac{G_2}{(Sp(1)\times Sp(1))/\mathbf{Z}_2}$	$\dfrac{2^{13}\,3}{5}\pi^4$
FI	$\dfrac{F_4}{(Sp(1)\times Sp(3))/\mathbf{Z}_2}$	$\dfrac{2^{23}\,3^{23}}{5^3 7^2 11}\,\pi^{14}$
FII	$F_4/Spin(9)$	$\dfrac{2^{17}\,3^{13}}{5^2\,7\,11}\pi^8$
EI	$\dfrac{E_6}{Sp(4)/\mathbf{Z}_2}$	$\dfrac{2^{55}\,3^{15}\sqrt{3}}{5^3 7^2\,11}\pi^{22}$
EII	$\dfrac{E_6}{(Sp(1)\times SU(6))/\mathbf{Z}_2}$	$\dfrac{2^{63}\,3^{13}}{5^4\,7^3\,11}\,\pi^{20}$
$EIII$	$\dfrac{E_6}{(U(1)\times Spin(10))/\mathbf{Z}_4}$	$\dfrac{2^{50}\,3^{11}}{5^3\,7^2\,11}\,\pi^{16}$
EIV	E_6/F_4	$\dfrac{2^{30}\,3^{10}\,\sqrt{3}}{5\cdot 7}\,\pi^{14}$
EV	$\dfrac{E_7}{SU(8)/\mathbf{Z}_2}$	$\dfrac{2^{74}\,3^{55}}{5^7\,7^5\,11^3\,13^2\,17}\,\pi^{35}$
EVI	$\dfrac{E_7}{(SU(2)\times Spin(12))/\mathbf{Z}_2}$	$\dfrac{2^{67}\,3^{51}}{5^6\,7^4\,11^3\,13^2\,17}\,\pi^{32}$
$EVII$	$\dfrac{E_7}{(U(1)\times E_6)/\mathbf{Z}_3}$	$\dfrac{2^{59}\,3^{42}}{5^5\,7^3\,11^2\,13^2\,17}\pi^{27}$
$EVIII$	$E_8/S_s(16)$	?
EIX	$\dfrac{E_8}{(SU(2)\times E_7)/\mathbf{Z}_2}$	?

2. 体積を求めるための補題2つ

体積を求める方法は決して一通りではないが，本講では主として次の補題を用いる．

補題 1. 対称空間 $M = G/K$ に対して

$$\mu(G) = \mu_G(K)\mu_G(M)$$

が成り立つ．

この補題は，G, K, M のうち2つの体積が分かれば，残りの1つの体積が分かることを意味している．例えば，K と M の体積を既知として G の体積を求めることを考えてみよう．K の体積 $\mu(K)$ が既知であるとしても，それは K 自身の Killing 形式を用いた体積であろうから，それを G の Killing 形式を用いた体積 $\mu_G(K)$ に直さなければならない．同様なことが M に対しても起る．この辺の事情を次の例で理解することにしよう．

例 2. $$SO(n+1)/SO(n) = S^n \qquad (n \geq 3)$$

は対称空間であるから，補題 1 より

$$\mu(SO(n+1)) = \mu_{SO(n+1)}(SO(n))\,\mu_{SO(n+1)}(S^n)$$

が成り立つ．$\mu(SO(n))$ を既知として $\mu_{SO(n+1)}(SO(n))$ を求めよう．$SO(n+1)$ の Lie 環 $\mathfrak{so}(n+1) = \{ X \in M(n+1, \mathbf{R}) \mid {}^tX = -X \}$ を

$$\mathfrak{so}(n+1) = \mathfrak{so}(n) \oplus \mathfrak{s}^n$$

に標準分解する. $\mathfrak{so}(n+1)$ の Killing 形式 B は

$$B(X, Y) = 2(n-1)\,tr(XY)$$

である. さて, $X \in \mathfrak{so}(n) \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} \in \mathfrak{so}(n+1)$ であるから

$$\mu_{SO(n+1)}(SO(n)) = \sqrt{\frac{2(n-1)}{2(n-2)}}^{\frac{n(n-1)}{2}} \mu(SO(n))$$

である. 球面 S^n の体積は, $S^n \subset R^{n+1}$ とみて, R^{n+1} の metric を用いて

$$\mu(S^n) = \frac{n+1}{\Gamma(\frac{n+1}{2}+1)} \pi^{\frac{n+1}{2}} .$$

であることはよく知られている. さて, 上記の $\mathfrak{s}^n$ は

$$\mathfrak{s}^n = \left\{ X = \begin{pmatrix} 0 & x_1 \cdots x_n \\ -x_1 & \\ \vdots & 0 \\ -x_n & \end{pmatrix} \in \mathfrak{so}(n+1) \;\middle|\; x_i \in R \right\}$$

であるから, $X \in \mathfrak{s}^n$ に対して

$$-B(X, X) = 2(n-1)(x_1^2 + \cdots + x_n^2)$$

である. よって

$$\mu_{SO(n+1)}(S^n) = \sqrt{2(n-1)}^{\,n} \mu(S^n)$$

となる. 以上より

$$\mu(SO(n+1)) = \sqrt{\frac{n-1}{n-2}}^{\frac{n(n-1)}{2}} \sqrt{2(n-1)}\,\mu(SO(n))\mu(S^n)$$

となる. $\mu(SO(3)) = 2^4\sqrt{2}\,\pi^2$ を既知とすると, 帰納的に

$$\mu(SO(n+1)) = \sqrt{2(n-1)}^{\frac{n(n+1)}{2}}\mu(S^1)\mu(S^2)\cdots\mu(S^n)$$

を得る.

次の補題もしばしば用いるだろう.

補題3. 群 $\tilde{G}$ が群 G の次数 m の被覆群であれば

$$\mu(\tilde{G}) = m\mu(G)$$

が成り立つ.

例えば

$$\mu(Spin(n)) = 2\mu(SO(n))$$

である.

3. 基礎となる対称空間

前節2の説明から分かるように, 群 G の体積を求めるには, 対称空間 S^n, $\mathbf{C}P_n$, HP_n, $\mathfrak{C}P_2$, $\mathfrak{C}^C P_2$, $EVII$ の体積を知ればよい. これらの空間は G/K の形で次のように表示される.

$$SO(n+1)/SO(n) = S^n$$

$$SU(n+1)/(U(1)\times SU(n))/Z_n = \mathbf{C}P_n$$

$$Sp(n+1)/(Sp(1)\times Sp(n)) = HP_n$$

$$F_4/Spin(9) = \mathfrak{C}P_2 \quad (= FII)$$

$$E_6/(U(1)\times Spin(10))/Z_4 = \mathfrak{C}^C P_2\ (=EIII)$$
$$E_7/(U(1)\times E_6)/Z_3 = EVII$$
$$G_2/SU(3) = S^6$$

最後にあげた $G_2/SU(3)=S^6$ は対称空間ではないが，体積に関しては上記と同様に取り扱うことができる．

4. 求体積の簡単な歴史

前節3にある対称空間のうち，射影空間 RP_n, CP_n, HP_n, $\mathfrak{C}P_2$ の体積は Berger により求められている．その方法は Jacobi 場を用いるものである．(別法として，これらの空間の胞体分割を用いると，体積の定義に戻って計算することもできる)．RP_n, CP_n, HP_n の体積を知ると，補題 1 を用いて，例 2 のようにすると，古典群 A_n, B_n, C_n, D_n の体積が求められる．この方法で実際に実行したのは Broughton (Algebras, Groups and Geometries (1987)) である．しかし，A_n, D_n はよいが，B_n, C_n のそれは違っている．

補題1は，対称空間 $M=G/K$ の体積は，群 G, K の体積より求められることを示している．すなわち，群 G の体積が分かるとすべてが解決する．そして Freudenthal は彼の著書 linear Lie groups で，G が center-free である条件のもとで，G の体積公式を次式で与えている．

$$\mu(G) = \frac{k 2^r m! \sqrt{D^{-1}}}{l! (\Pi q_i) \tau} \pi^{l+r}$$

ここに，k = Weyl 群の位数，r = 次元，l = 階数，$m = \frac{1}{2}(r-l)$，$D = \det((\rho_i, \rho_j))$ （$\rho_1, \dots, \rho_l$ は simple ルート），$q_1, \dots, q_l$ は最大ルートの係数であり，さらに

$$\tau = (-1)^m \sum (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}) \dots (\alpha_{i_{2m-1}}, \alpha_{i_{2m}})$$

（Σ はすべてのルート $\alpha_1, \dots, \alpha_{2m}$ の置換を亘る）である．$k, r, l, m, D, \Pi q_i$ は容易に求められる量であるので，τ の値が問題である．そして Freudenthal は A_1, A_2, B_2, G_2 の τ を求めている．今は computer があるので，更に

$$A_3, \quad B_3, \quad C_3, \quad A_4 \text{（要24時間）}$$

が求められる．しかし，F_4 の τ を直接求めると10年〜100年かかると概算される．さて，上記の Freudenthal の体積公式には miss がある．正しくは次のようである．$\tilde{G}$ を単連結であるとして，体積公式をかくと

$$\mu(G) = \frac{c k 2^r m! \sqrt{D^{-1}}}{\tau} \pi^{l+r}$$

（c = 中心の位数）となる（三石和之による）．（注．$\mu(\tilde{G})$ の体積公式をもう少し変形すると，F_4 の体積を computer で10分で計算されるようになったが，E_8 の体積は computer を用いても計算できそうでないと思われる??）．

5. 基本的対称空間の実現と体積

3節で与えた対称空間 $RP_n, CP_n, HP_n, \mathfrak{C}P_2, \mathfrak{C}^C P_2, EVI$ の定義を与えよう．注目すべきことは，これらはすべて同じ式（少なくとも形式的には）で表されることである．射影空間の代表として Cayley 射影平面 $\mathfrak{C}P_2$ について述べよう．（RP_n, CP_n, HP_n は $\mathfrak{C}$ の代りにそれぞれ R, C, H とし，3 の代りに $n+1$ に置き換えるとよい）．

$\mathfrak{C}$ を Cayley 代数とし

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{J}(3, \mathfrak{C}) = \{X \in M(3, \mathfrak{C}) \mid X^* = X\}$$

とし，$\mathfrak{J}$ に Jordan 積 $X \circ Y$，内積 (X, Y) をそれぞれ

$$X \circ Y = \frac{1}{2}(XY + YX), \quad (X, Y) = tr(X \circ Y)$$

で与え，さらに Freudenthal 積 $X \times Y$ を

$$X \times Y = \frac{1}{2}(2X \circ Y - tr(X)Y - tr(Y)X + (tr(X)tr(Y) - (X, Y))E)$$

で与える．そして

$$\mathfrak{C}P_2 = \{A \in \mathfrak{J} \mid A \times A = 0,\ A \neq 0\}/R^*$$

（$/R^*$，すなわち，$A \sim B$ は $B = \lambda A$, $\lambda \in R$ とする）で定義する．

$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とし，点 $o = [E_1] \in \mathfrak{C}P_2$ における接空間 $T_o(\mathfrak{C}P_2)$ は

$$T_o(\mathfrak{C}P_2) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x_3 & \overline{x_2} \\ \overline{x_3} & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_i \in \mathfrak{C} \right\}$$

となるので，$T_o(\mathcal{L}P_2)$における内積を$\frac{1}{2}(X,Y)$で与える．次に$\mathcal{L}^C P_2$に移ろう．$\mathfrak{J}^C$を$\mathfrak{J}$の複素化とし，$\mathfrak{J}^C$にエルミート内積$\langle X,Y\rangle$を

$$\langle X,Y\rangle=(\tau X,Y)$$

で与える（ここに，τは$\mathfrak{J}^C$における複素共役である）．そこで

$$\mathcal{L}^C P_2=\{A\in\mathfrak{J}^C \mid A\times A=0,\ A\neq 0\}/C^*$$

で定義する．$o=[E_1]\in\mathcal{L}^C P_2$における接空間$T_o(\mathcal{L}^C P)$は$T_o(\mathcal{L}P_2)$の複素化になっており，$T_o(\mathcal{L}^C P_2)$の内積を$\mathrm{Re}\langle X,Y\rangle$で与える．最後に，$\mathfrak{P}^C=\mathfrak{J}^C\oplus\mathfrak{J}^C\oplus C\oplus C$とし

$$EVII=\{P\in\mathfrak{P}^C \mid P\times P=0,\ P\neq 0\}/C^*$$

で定義する（しかし，$P\times P$の定義は省略する）．$o=[(0,0,1,0)]\in EVII$における接空間$T_o(EVII)$は$\mathfrak{J}^C$と同一視できるので，その内積を$\mathrm{Re}\langle X,Y\rangle$で与える．

次に，これらの内積から誘導されたmetricを用いたときの体積の表を記しておく．

	体積	metric
CP_n	$\frac{1}{n!}\pi^n$	$\frac{1}{2}(X,Y)$
HP_n	$\frac{1}{(2n+1)!}\pi^{2n}$	$\frac{1}{2}(X,Y)$
$\mathcal{L}P_2$	$\frac{3!}{11!}\pi^8$	$\frac{1}{2}(X,Y)$

$\mathfrak{C}^{C}P_2$	$\dfrac{78}{16!}\pi^{16}$	$\mathrm{Re}\langle X, Y\rangle$
EVII	$\dfrac{13110}{27}\pi^{27}$	$\mathrm{Re}\langle X, Y\rangle$

次節で,これらの空間,主として $\mathfrak{C}^{C}P_2 = \mathrm{EIII}$ の体積を求める方法を述べることにしよう.

(以上 横田記)

6. EIII の体積

コンパクト例外群 E_6 は

$$E_6 = \{\alpha \in Iso_C(\mathfrak{J}^C) \mid \alpha X \times \alpha Y = \tau\alpha\tau(X \times Y),$$
$$\langle \alpha X, \alpha Y\rangle = \langle X, Y\rangle\}$$

で与えられ，又そのリー環 $\mathfrak{e}_6$ は

$$\mathfrak{e}_6 = \{\phi \in Hom_C(\mathfrak{J}^C, \mathfrak{J}^C) \mid (\phi X, X \times X) = 0, \langle \phi X, Y\rangle + \langle X, \phi Y\rangle = 0\}$$

で与えられる。

C-線型写像 $\sigma: \mathfrak{J}^C \longrightarrow \mathfrak{J}^C$ を

$$\sigma\begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \overline{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 & -x_3 & -\overline{x}_2 \\ -\overline{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ -x_2 & \overline{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix} \qquad (\xi_k \in C,\ x_k \in \mathfrak{C})$$

と定義すると，$\sigma \in E_6$，$\sigma^2 = 1$。 又 E_6 の involution $\tilde{\sigma}$ を $\tilde{\sigma}(\alpha) = \sigma \circ \alpha \circ \sigma$ $(\alpha \in E_6)$ で与えると

$$(E_6)^\sigma = \{\alpha \in E_6 \mid \sigma\alpha\sigma = \alpha\} = U(1)\,Spin(10) \cong (U(1) \times Spin(10))/\mathbb{Z}_4.$$

(「例外型単純リー群」横田一郎著，現代数学社，才III章を参照)。 例外型対称空間 EIII は

$$EIII = \{A \in \mathfrak{J}^C \mid A \times A = 0,\ A \neq 0\}/\sim$$
$$;\ A \sim B \underset{def}{\rightleftarrows} \exists\lambda \in C\ (\lambda \neq 0) \mid \lambda A = B$$

で与えられる。 E_6 は EIII に推移的に作用して

$$EIII \cong E_6/(E_6)^\sigma \cong E_6/U(1)\cdot Spin(10).$$

σ はリー環 $\mathfrak{e}_6$ の involution $\tilde{\sigma}$ も自然に引起こし，また

$$\mathfrak{k} = \{\alpha \in E_6 \mid \tilde{\sigma}(\alpha) = \alpha\},$$

$$\mathfrak{m} = \{\alpha \in E_6 \mid \tilde{\sigma}(\alpha) = -\alpha\}$$

とすると，標準分解 $\mathfrak{e}_6 = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ を与える。

$x \in \mathfrak{C}^C$ に対して

$$F_2(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \bar{x} \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 \end{pmatrix},\ F_3(x) = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ \bar{x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_2(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\bar{x} \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_3(x) = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ -\bar{x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とおく。接空間 $T_0(E\mathrm{III})$ は

$$T_0(E\mathrm{III}) = \{F_2(x_2) + F_3(x_3) \mid x_2, x_3 \in \mathfrak{C}^C\}$$

と表される。$p: E_6 \longrightarrow E\mathrm{III}$ を自然な射影とし $p_*: \mathfrak{e}_6 \longrightarrow T_0(E\mathrm{III})$ を p から誘導された写像とする。$Z = A_2(z_2) + A_3(z_3)$，$Z^\# = F_2(z_2) + F_3(z_3)$，$W = F_2(w_2) + F_3(w_3)$ ($z_2, z_3, w_2, w_3 \in \mathfrak{C}$) とし $\tilde{Z}, \tilde{W}: \mathfrak{J}^C \longrightarrow \mathfrak{J}^C$ を $\tilde{Z}(X) = ZX - XZ$，$\tilde{W}(X) = W \circ X$ ($X \in \mathfrak{J}^C$) とおく。このとき $p_*(\tilde{Z} + 2i\tilde{W}) = Z^\# + iW$ が成立する。

$X_{kj} = \frac{1}{\sqrt{2}} F_k(e_j)$ ($k=2,3,\ j=0,1,\cdots,7$) とおくと $\{X_{kj} \mid k=2,3,\ j=0,1,\cdots 7\}$ は $T_0(E\mathrm{III})$ の C-基底でかつ正規直交系になっている。対称空間 $E\mathrm{III}$ の C-係数コホモロジー群 $H^*(E\mathrm{III}, C)$ は $T_0(E\mathrm{III})$ 上の $U(1)\cdot Spin(10)$-不変な微分形式の集合とみなされる。Hermite 対称空間 $E\mathrm{III}$ の第1 Chern 形式 c_1 は $T_0(E\mathrm{III})$ を $\mathfrak{m}$ と同一視したとき，$\mathfrak{m}$ 上では $\mathfrak{e}_6$ の括弧積の計算されることから，具体的に c_1 を次の様に求めることができる。

$\{X_{kj},\ iX_{kj} \mid k=2,3,\ j=0,1,\cdots,7\}$ は $T_o(E\text{III})$ の $\mathbb{R}$ 上正規直交基となるが，この双対基を $\{dx_{kj},\ dx'_{kj} \mid k=2,3,\ j=0,1,\cdots,7\}$ とする．このとき $o\in E\text{III}$ における第1 Chern 形式 c_1 は，$c_1=-\frac{12}{\pi}\sum_{k=2}^{3}\sum_{j=0}^{7} dx_{kj}\wedge dx'_{kj}$ と表されることが分かる．

Toda-Watanabe によって $E\text{III}$ の整係数コホモロジー群は $H^*(E\text{III})=\mathbb{Z}[t,w]/(\rho_1,\rho_2)$ $(t\in H^2,\ w\in H^8,\ \rho_1=t^9-3w^2t,\ \rho_2=w^3+15w^2t^4-9wt^8)$ となることが知られている．これより $m=\frac{1}{78}t^{16}$ が $H^{32}(E\text{III})$ の生成元となっていることが分かる．又 Borel-Hirzebruch [1], §16 により，2-形式 $\frac{1}{12}c_1$ は $H^2(E\text{III})$ の生成元となっている。

上記のことより $\frac{1}{78\pi^{16}}16!\ dx_{20}\wedge dx'_{20}\wedge\cdots\wedge dx_{37}\wedge dx'_{37}$ は $H^{32}(E\text{III})$ の生成元を代表している．

$$\therefore\ 1=\int_{E\text{III}}\frac{1}{78\pi^{16}}16!\ dx_{20}\wedge\cdots\wedge dx'_{37}=\frac{16!}{78\pi^{16}}vol(E\text{III}).$$

$$\therefore\ vol(E\text{III})=\frac{78}{16!}\pi^{16}.$$

注：例外型対称空間 EVII についても同様の方法で，その体積を求めることができる．

7　E_6の体積

前節で述べたことより $\tilde{A}_3(1)\in \mathfrak{e}_6$ でまた $p_*(\tilde{A}_3(1)) = -F_3(1)\in T_0(E\mathrm{III})$ をみたす。又 E_6の Killing form B_{E_6} の計算より $B_{E_6}(\tilde{A}_3(1), \tilde{A}_3(1)) = -96$ が示される。5節で導入された $T_0(E\mathrm{III})$ の内積から導かれる $E\mathrm{III}$ 上のリーマン計量を g_c と表すことにすると $g_c(F_3(1), F_3(1)) = 2$ をみたす。

$$\therefore\ \mu(E\mathrm{III}) = 48^{16}\,\mathrm{vol}(E\mathrm{III}) = 2^{65}\cdot 3^{17}\cdot 13/16!\cdot\pi^{16}.$$

[6], 第III章により包含写像

$$\phi : U(1) \longrightarrow U(1)\times_{\mathbb{Z}_4} Spin(10) \hookrightarrow E_6$$

は

$$\phi(\theta)\begin{pmatrix}\xi_1 & x_3 & \bar{x}_2\\ \bar{x}_3 & \xi_2 & x_1\\ x_2 & \bar{x}_1 & \xi_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\theta^4\xi_1 & \theta x_3 & \theta\bar{x}_2\\ \theta\bar{x}_3 & \theta^{-2}\xi_2 & \theta^{-2}x_1\\ \theta x_2 & \theta^{-2}\bar{x}_1 & \theta^{-2}\xi_3\end{pmatrix}, \quad \theta\in U(1),$$

$x_k\in\mathfrak{L}^C$, $\xi_k\in C$ $(k=1,2,3)$ で与えられる．$\phi_* : \mathfrak{u}(1)\to\mathfrak{e}_6$ を ϕ の誘導写像とし，$\alpha = \phi_*(i)$ とする $(\mathfrak{u}(1)\cong i\mathbb{R})$．
このとき $B_{E_6}(\alpha,\alpha) = -288$ となる．

$$\therefore\ \mu_{E_6}(\phi(U(1))) = 2^3\cdot\sqrt{2}\cdot 3\pi.$$

$$\therefore\ \mu_{E_6}\left(U(1)\times_{\mathbb{Z}_4} Spin(10)\right) = \frac{2^{84}\cdot 3^{18}\cdot\sqrt{3}}{5^2\cdot 3}\,\pi^{26}.$$

$$\therefore\ \mu(E_6) = \mu_{E_6}\left(U(1)\times_{\mathbb{Z}_4} Spin(10)\right)\cdot\mu(E\mathrm{III}) = \frac{2^{149}\cdot 3^{35}\cdot\sqrt{3}\cdot 13}{5^2\cdot 7\cdot 16!}\,\pi^{42}.$$

注　6，7節の方法により，同様に $\mu(E_7)$ が計算される．

References

[1] A. Borel and F. Hirzebruch, *Characteristic classes and homogeneous spaces*, Amer. J. Math., 80(1958), 458-538.

[2] T. Imai and I. Yokota, *Simply connected compact simple Lie group $E_{7(-133)}$ of type E_7*, J. Math. Kyoto Univ., 21(1981), 383-395.

[3] H. Toda and T. Watanabe, *The integral cohomology ring of F_4/T and E_6/T*, J. Math. Kyoto Univ., 14(1974), 257-286.

[4] T. Watanabe, *The integral cohomology ring of the symmetric space EVII*, J. Math. Kyoto Univ., 15(1975), 363-385.

[5] I. Yotoka, *Simply connected compact simple Lie group $E_{6(-78)}$ of type E_6 and involutive autommorphisms*, J. Math. Kyoto Univ., 20(1980), 447-472.

[6] 横田一郎, 例外型単純リー群, 現代数学社, (1990).

[7] K. Abe and I. Yokota, *Volumes of compact hermitian symmetric spaces EIII and EVII.* preprint.

[8] ____________ , *Volumes of compact symmetric spaces*, in preperation .

(以上 阿部記)