数理解析研究所講究録
第 856 巻 1994 年 25-33

CR invariants of weight five in the Bergman kernel

平地健吾（阪大理）小松　玄（阪大理）中沢則之（東北大理）
(K. Hirachi, G. Komatsu, and N. Nakazawa)

1．序

複素領域 Ω に付随する Bergman 核 K^B は，Ω 上の L^2 正則関数のなす Hilbert 空間における完全正規直交系 $\{h_j\}_j$ を用いて $K^B(z)=\sum|h_j(z)|^2$ によって定義される．C^∞ 級の境界を持つ有界強擬凸領域 $\Omega\subset\mathbf{C}^2$ に対して，Bergman 核の漸近展開に関する不変式論を考える．

Ω の定義関数 $r\in C^\infty(\overline{\Omega})$，$r>0$，をひとつ指定すれば，Bergman 核の特異性は

$$\frac{\pi^2}{2}K^B(z)=\frac{\varphi^B(z)}{r(z)^3}+\psi^B(z)\log r(z)\quad\text{near}\quad\partial\Omega \tag{1.1}$$

という形に書かれる（Fefferman [F1]）．但しここで φ^B,ψ^B は境界まで込めて C^∞ 級であって，$\varphi^B|_{\partial\Omega}=J[r]_{\partial\Omega}>0$ が成り立つ．$J[r]$ は Levi の行列式であって

$$J[r]=\det\begin{pmatrix} r & \partial r/\partial\overline{z_k}\\ \partial r/\partial z_j & \partial^2 r/\partial z_j\,\partial\overline{z_k}\end{pmatrix}$$

によって定義される．関数 φ^B,ψ^B は定義関数 r の選び方に依存する．また，$\varphi^B \bmod O(r^3)$ と $\psi^B \bmod O(r^\infty)$ は，任意に指定された境界点の近傍で局所的にきまる．特に

$$J[r^F]=1+O(r^3)$$

をみたす定義関数 $r=r^F$（Fefferman [F2] によって構成された）を採用すれば $\varphi^B=1+O(r^3)$ が成り立つ（Graham [G1]）．さらに，$\psi^B \bmod O(r^2)$ の仕組は[G1] と [HKN1] によって完全にわかっている．本稿では $\psi^B \bmod O(r^3)$ の仕組について解説する（詳細は [HKN2] に発表予定）．ここまでが，定義関数 r^F を用いてできる議論の限界である．

2．複素 Monge-Ampère 境界値問題

Fefferman によって構成された $r^F \in C^\infty(\overline{\Omega})$ は複素 Monge-Ampère 境界値問題

$$(2.1)\qquad \begin{gathered} J[u] = 1 \text{ in } \Omega, \quad u > 0 \text{ in } \Omega, \\ u = 0 \text{ on } \partial\Omega \end{gathered}$$

の C^∞ 近似解である．この境界値問題は一意的な解 $u = u^{MA}$ を持つことが知られている（Cheng-Yau [CY]）．しかしながら，解は境界まで込めて有限階の微分可能性しか持たない：

$$u^{MA} \in C^\infty(\Omega) \cap C^{4-\varepsilon}(\overline{\Omega}) \text{ for any } \varepsilon > 0.$$

Ω の定義関数 $r \in C^\infty(\overline{\Omega})$ をひとつ指定すると，次の漸近展開が成り立つ（Lee-Melrose [LM]）：

$$u^{MA}(z) \sim r(z) \sum_{k=0}^{\infty} \eta_j(z) \left\{r(z)^3 \log r(z)\right\}^k, \qquad \eta_j \in C^\infty(\overline{\Omega}).$$

Graham [G2] は，境界値問題 (2.1) に対応する初期値問題を考えて，C^∞ 近似解 r^F をもとにした

$$u^G(z) \sim r^F(z) \sum_{k=0}^{\infty} \eta_j^G(z) \left\{r^F(z)^3 \log r^F(z)\right\}^k, \qquad \eta_j^G \in C^\infty(\overline{\Omega}).$$

という形の漸近解 u^G を構成した．すなわち，u^G は "初期値" $a \in C^\infty(\partial\Omega)$ を任意に与えたときにきまる，"初期値問題"

$$\begin{gathered} J[u^G] = 1 + O(r^\infty) \quad \text{near } \partial\Omega, \\ \eta^G = 1 + a\, r^3 + O(r^4) \qquad\qquad (\, r = r^F \,) \end{gathered}$$

の解である．この u^G は，a を指定する毎に mod $O(r^\infty)$ の誤差を除いて一意的である．u^G の展開の第一項（境界まで滑らかな部分）を r^G とおく．すなわち

$$(2.2)\qquad r^G = r^F \eta_0^G.$$

u^G, r^G, η_j^G 等について論ずる際に，領域 Ω 全体（あるいは境界 $\partial\Omega$ 全体）を考える必要はない：指定された境界点の近傍で局所的な議論が可能である．

3．変換則と CR 不変量

双正則写像 $\Phi: \Omega \to \widetilde{\Omega}$ が任意に与えられたとき，領域 $\Omega, \widetilde{\Omega}$ に付随する Bergman 核 $K_\Omega^B, K_{\widetilde{\Omega}}^B$ は

$$K_\Omega^B(z) = \left|\det \Phi'(z)\right|^2 K_{\widetilde{\Omega}}^B(\Phi(z))$$

という変換則をみたす．また，領域 $\Omega, \widetilde{\Omega}$ の各々の上で考えた境界値問題の解 $u_\Omega^{MA}, u_{\widetilde{\Omega}}^{MA}$ は

$$u_\Omega^{MA}(z) = \left|\det \Phi'(z)\right|^{-2/3} u_{\widetilde{\Omega}}^{MA}(\Phi(z))$$

をみたす．一般に，領域汎関数 $F = F_\Omega$ に対して関係式

$$F_\Omega(z) = \left|\det \Phi'(z)\right|^{2w/3} F_{\widetilde{\Omega}}(\Phi(z)), \tag{3.1}$$

が成り立つとき，F はウエイト w の変換則をみたすという．よって K^B, u^{MA} はそれぞれウエイト $3, -1$ の変換則をみたす．

変換則 (3.1) を，指定された境界点の近傍に局所化して考える．（このときにも $F_\Omega, F_{\widetilde{\Omega}}$ 等という記号を用いよう．）さらに，境界からの距離のベキのオーダーの誤差を許すことにする；関係式

$$F_\Omega(z) = \left|\det \Phi'(z)\right|^{2w/3} F_{\widetilde{\Omega}}(\Phi(z)) \mod O(r^m)$$

が成り立つとき，F は $O(r^m)$ の誤差でウエイト w の局所変換則をみたすという．境界値問題 (2.1) の C^∞ 近似解 r^F は，$O(r^4)$ の誤差でウエイト -1 の局所変換則をみたす．また，漸近解 u^G は $O(r^\infty)$ の誤差でウエイト -1 の局所変換則をみたす．これらのことからわかるように，u^G の漸近展開に現れる η_k^G は，$O(r^3)$の誤差でウエイト $3k$ の局所変換則をみたす．

次に，境界汎関数とでも呼ぶべき境界上の関数 $F = F_{\partial\Omega}$ に対する変換則

$$F_\Omega(z) = \left|\det \Phi'(z)\right|^{2w/3} F_{\widetilde{\Omega}}(\Phi(z)) \quad \text{on } \partial\Omega \tag{3.2}$$

を考えよう．さらにこれを指定された境界点の近傍に局所化すれば，CR 不変量の定義にいたる．正確に述べよう．

<u>CR 不変量の定義</u>. Moser の標準形の係数の多項式がウエイトの CR 不変式であるとは，それが変換則 (3.2) を局所的にみたすこと．

Moserの標準形について少し復習しよう．説明を簡略化するために，領域の境界は実解析的であると仮定する．C^∞ のカテゴリーで考えるときには，すべてを形式的巾級数の範囲で考えればよい．

Ω の境界点をひとつ指定して，その点の近傍で正則な座標変換を行い，境界 $\partial\Omega$ の表示が簡単になるようにしたい．新しい座標を

$$z = (z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2,\ z_2 = u + i\,v\,,$$

と書き，指定された境界点を原点に対応させる．このとき，Ω を局所的に

$$2u > |z_1|^2 + F(z_1, \overline{z_1}, v)$$

という形に表すことができる．ここで F は次の形の Taylor 展開を持つ：

$$F(z_1, \overline{z_1}, v) = \sum_{p,\,q \geq 2} A_{p\,\overline{q}}(v) z_1{}^p\, \overline{z_1}{}^q,$$
$$A_{p\,\overline{q}}(v) = \sum_{l \geq 0} A^l_{p\,\overline{q}} v^l.$$

ただし係数 $A^l_{p\,\overline{q}}$ は p, q に関してエルミート対称である．さらにここで正規化条件

$$A_{2\,\overline{2}}(v) = A_{3\,\overline{2}}(v) = A_{3\,\overline{3}}(v) = 0$$

を付け加えたときの境界 $\partial\Omega$ の局所表示（または関数 F）が Moser の標準形である．

Moser の標準形は常に存在するが，たいていの場合には一意的ではない．（一意的であるのは，領域 Ω が球と局所的に双正則な場合に限る．）しかしながら，CR 不変量を $A^l_{p\,\overline{q}}$ の多項式として書いたときの表示は，標準形の選び方に依存しない．

ウエイト w の CR 不変量の全体の成す実ベクトル空間を I_w^{CR} と書こう．明らかに $I_0^{CR} = \mathbf{R}$ である．$1 \leq w \leq 5$ に対する I_w^{CR} は次の形をしている．

<u>補題 1</u>（[G1], [HKN2]）．$I_1^{CR} = I_2^{CR} = \{0\}, \dim I_3^{CR} = \dim I_4^{CR} = 1, \dim I_5^{CR} = 2$ が成り立つ．I_3^{CR}, I_4^{CR} はそれぞれ $A^0_{4\overline{4}}$，$|A^0_{2\overline{4}}|^2$ によって張られる．また，I_5^{CR} の元は次の形を

している：

$$F(a, b, c, d) = a\,\mathrm{Im}\left(A^{0}_{\overline{24}}A^{1}_{\overline{42}}\right) + b\,\mathrm{Re}\left(A^{0}_{\overline{24}}A^{0}_{\overline{53}}\right) + c\left|A^{0}_{\overline{34}}\right|^2 + d\left|A^{0}_{\overline{25}}\right|^2.$$

但しここで $c = \frac{9}{2}a + \frac{9}{4}b,\ d = \frac{5}{2}a + \frac{3}{4}b.$

上の補題 1 において，$w < 5$ に関する結果は Graham [G1] による．（[G1]に述べてある I_5^{CR} に関する主張は正しくない．それは単純な計算間違いによるもので，修正するのは容易である．）

4．Bergman 核に含まれるウエイト ≤4 の CR 不変量（[G1]と[HKN1]の復習）

Graham [G1] は，

(4.1) $$\eta_1^G = 4A^{0}_{\overline{44}} + O(r)$$

を示し，このことを用いて次の結果を得た．

Graham の定理（[G1]）．$r = r^F$ に対して(1.1) を考えたとき

(4.2) $$\varphi^B = 1 + O(r^3)$$

(4.3) $$\psi^B = -3\eta_1^G + k^B\left|A^{0}_{\overline{24}}\right|^2 r + O(r^2)$$

が成り立つ．但し k^B は領域 Ω の選び方に依らない普遍定数である．

普遍定数 k^B の値は，[HKN1; Remark 1] において決定されている：$k^B = \frac{24}{5}$. これで，$\psi^B \bmod O(r^2)$ の仕組が完全にわかった．この方法を精密にして $\psi^B \bmod O(r^3)$ を調べようとするとき，具体的に必要な作業は次の二つである．

作業 1．$O(r^2)$ の誤差でウエイト 4 の局所変換則をみたす W_4 で，境界値が $k^B\left|A^{0}_{\overline{24}}\right|^2$ となるものを求めること．

作業 2．$\psi^B + 3\eta_1^G - W_4$ の境界値がウエイト 5 の CR 不変量であることを示し，その形を決めること．

作業1，2を実行すればよいことを説明するためには，(4.2) と (4.3) の証明をしてみせることが早道である．

Graham の定理の証明．　Hörmander の古典的な結果 [H; Theorem 3.5.1] より $\varphi^B = 1 + O(r)$ がわかる．（以下と同様な議論からでも導くことができる．）そこで，境界上の関数 P_1 を用いて

$$\varphi^B = 1 + P_1 r + O(r^2),\ \ r = r^F$$

と書く．さて，Bergman 核 K^B はウエイト3の変換則をみたし，$r = r^F$ は $O(r^4)$ の誤差でウエイト -1 の局所変換則をみたすから，φ^B は $O(r^3)$ の誤差でウエイト0の局所変換則をみたす．よって，P_1 はウエイト1の CR 不変量と同じ変換則をみたす．表示式 (1.1) の導き方（例えば Boutet de Monvel-Sjöstrand [BS] によるもの）を忠実にたどればわかるように，P_1 は Moser の標準形の係数の多項式として書かれる．よって $P_1 \in I_1^{CR}$ であるから，補題1より $P_1 = 0$ を得る．従って

$$\varphi^B = 1 + P_2\, r^2 + O(r^3)$$

をみたす境界上の関数 P_2 が存在するが，上と同様な議論によって $P_2 = 0$ が得られる．（P_2 も Moser の標準形の係数の多項式の形に書き表される．以下の解析においても同様の事実を用いるが，詳しくは注意しない．）こうして (4.2) が示された．

(4.3) を証明するために，ψ^B が $O(r^\infty)$ の誤差でウエイト3の局所変換則をみたすことに注意する．このことから以前と同様の議論が使えて，ψ^B の境界値がウエイト3の CR 不変量であることがわかる．よって補題1と (4.1) より

$$\psi^B = k_3^B \eta_1^G + O(r), \qquad k_3^B \text{ は普遍定数},$$

を得る．普遍定数の値は，ψ^B を近似計算することにより決定できる：$k_3^B = -3$．さて，$\psi^B + 3\eta_1^G$ は $O(r^2)$ の誤差でウエイト3の局所変換則をみたす．そこで境界上の関数 P_4 を用いて

$$\psi^B + 3\eta_1^G = P_4\, r + O(r^2)$$

と書くと，P_4 はウエイト4の CR 不変量である．（実際，P_4 は Moser の標準形の係数の多項式である．このことは，ψ^B, η_1^G, r^F を Moser の標準形に現れる座標で書い

てみればわかる cf. [HKN1]）．よって補題1より (4.3) が得られる．証明終

上の証明をみれば，作業1，2の意味がはっきりとわかる．本質的なのは作業1の方で，作業2の方は（実行の難易を別とすれば）単に技術的な問題である．また，境界値問題 (2.1) の C^∞ 近似解を基礎にしてできる議論がここまでであることもわかった．（この先に進もうとすれば，誤差を含んだ変換則が意味を失う．）

次節においてみるように，W_4 はウエイト4の Weyl 不変量である（二通りの選び方がある）．Weyl 不変量は，領域 Ω の次元が高い場合に，φ^B の不変式論において本質的な役割を果たした（Fefferman [F3]）．

5．ウエイト4の Weyl 不変量

領域 Ω の指定された境界点の近傍を小さく取り，それを Ω に制限したものを V と書く．$\mathbf{C}^* = \mathbf{C}\setminus\{0\}$ とおくと，$\mathbf{C}^*\times V$ 上の Lorentz-Kähler 計量 g が，Kähler 形式

$$\sqrt{-1}\partial\bar\partial\left(|z_0|^{2/3}\, r^G(z)\right),\quad (z_0, z)\in \mathbf{C}^*\times V,$$

によってきまる（r^G は (2.2) で定義している）．計量 g の曲率テンソル R に対して，

$$\omega = \mathrm{trace}\left(\nabla^p\overline{\nabla}^q R\otimes\cdots\otimes\nabla^r\overline{\nabla}^s R\right)$$

という形のスカラー関数 $\omega\in C^\infty(\mathbf{C}^*\times V)$ が g の Weyl 不変量である．但しここで trace は，スカラーになるまで計量 g に関して縮約を続けることを表す．このとき ω は

$$\omega(z_0, z) = |z_0|^{-2w/3}\, W(z)$$

という形をしているが，関数 W のことも Weyl 不変式と呼び，w をそのウエイトという．ウエイト $w\le 5$ のときには，$W = W_\Omega$ は $O(r^{6-w})$ の誤差でウエイトの局所変換則をみたす．よって $W = W_\Omega$ は $O(r^{6-w})$ の誤差で意味をもつ．ウエイト w の Weyl 不変量全体の成す実ベクトル空間を I_w^W と書こう．明らかに $I_0^W = \mathbf{R}$ であるが，$1\le w\le 5$ に対する I_w^W は次の形をしている．

<u>補題 2</u>（[HKN2]）．$I_1^W = I_2^W = \{0\}$, $\dim I_3^W = 1$, $\dim I_4^W = \dim I_5^W = 2$ が成り立つ．I_3^W の元は $\Delta^2 S$ の定数倍である．ここで S はスカラー曲率, Δ は計量 g に関するラプラシアンである．I_4^W は $|\nabla\overline{\nabla}R|^2$ と $|\nabla^2 R|^2$ によって張られ，I_5^W は $|\nabla^3 R|^2$ と $|\nabla^2\overline{\nabla}R|^2$ によって張られる．

また，ウエイト $w = 3, 4, 5$ のときには，Weyl 不変量 W の境界値は，W と同じウエイトを持つ CR 不変量である．実際，

<u>補題 3</u>．境界上で

$$\Delta^2 S = (4!)^2 A^{0}_{\overline{44}}$$

$$\frac{1}{3}|\nabla\overline{\nabla}R|^2 = \frac{1}{7}|\nabla^2 R|^2 = 2^8 |A^{0}_{\overline{24}}|^2$$

$$|\nabla^3 R|^2 = -4(5!)^2 F(-5, 18, 18, 1)$$

$$|\nabla^2\overline{\nabla}R|^2 = -4(5!)^2 F(-\frac{37}{15}, 10, \frac{57}{5}, \frac{4}{3})$$

が成り立つ．但し $F(a, b, c, d)$ は補題 1 において定義されている．

こうして，作業 1 の答がわかった．また作業 2 を実行することも可能であり，次の定理を得る．

<u>定理</u>（[HKN2]）．$r = r^F$ に対して (1.1) を考えたとき，

$$\psi^B = -3\eta_1^G + \frac{1}{160}|\nabla\overline{\nabla}R|^2 r + \left(a|\nabla^3 R|^2 + b|\nabla^2\overline{\nabla}R|^2\right) r^2 + O(r^3)$$

が成り立つ．但しここで a, b は領域の形に依らない普遍定数である．（それらの値を決定することもできる）．ここではウエイト 3 の CR 不変量の内部への拡張として η_1^G を採用したが，Weyl 不変量 $\Delta^2 S$ を用いても同様な展開がえられる．

参考文献

[BS] L. Boutet de Monvel and J. Sjöstrand, *Sur la singularitè de noyaux des Bergman et de Szegö*, Soc. Math. de France, Astèrisque **34-35** (1976) 123–164.

[CY] S.-Y. Cheng and S.-T. Yau, *On the existence of a complete Kähler metric on non-compact complex manifolds and the regularity of Fefferman's equation,* Comm. Pure Appl. Math. **33** (1980) 507–544.

[CM] S. S. Chern and J. K. Moser, *Real hypersurfaces in complex manifolds,* Acta Math. **133** (1974) 219–271.

[F1] C. Fefferman, *The Bergman kernel and biholomorphic mappings of pseudo-convex domains,* Invent. Math. **26** (1974) 1–65.

[F2] C. Fefferman, *Monge-Ampère equations, the Bergman kernel, and geometry of pseudoconvex domains,* Ann. of Math. (2) **103** (1976) 395–416, *Correction,* ibid. **104** (1976) 393–394.

[F3] C. Fefferman, *Parabolic invariant theory in complex analysis,* Adv. in Math. **31** (1979) 131–262.

[G1] R. Graham, *Scalar boundary invariants and the Bergman kernel* in "Complex Analysis II" (C. A. Berenstein, ed.), Lect. Notes in Math. 1276, 108–135, Springer, 1987.

[G2] R. Graham, *Higher asymptotics of the complex Monge-Ampère equation,* Compositio Math. **64** (1987) 133–155.

[H] L. Hörmander, *L^2 estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$ operator,* Acta Math. **133** (1965) 86–152.

[HKN1] K. Hirachi, G. Komatsu and N. Nakazawa, *Two methods of determining local invariants in the Szegö kernel,* "Complex Geometry" (G. Komatsu, et al. ed.), Lect. Notes in Pure and Appl. Math. 143, 77–96, Dekker, 1992.

[HKN2] K. Hirachi, G. Komatsu and N. Nakazawa, in preparation.

[LM] J. Lee and R. Melrose, *Boundary behaviour of the complex Monge-Ampère equation,* Acta Math. **148** (1982) 159–192.