数理解析研究所講究録
第857巻 1994年 51-62

単体的複体に付随するStanley-Reisner環の極小自由分解とBetti数列

日比孝之（北海道大学理学部）
Takayuki Hibi

頂点集合$V=\{x_1,x_2,\cdots,x_v\}$上の単体的複体Δとは、Vの部分集合の集合であって（i）$\{x_i\}\in\Delta$（$1\leqq {}^\forall i\leqq v$）（ii）$\sigma\in\Delta$, $\tau\subset\sigma \Rightarrow \tau\in\Delta$ を満たすものである。いま、各x_iを体k上の不定元と考え、$A=k[x_1,\cdots,x_v]$を多項式環で$\deg x_i=1$（$1\leqq {}^\forall i\leqq v$）とする。次に、$A$のsquare-freeな単項式$x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_r}$, $1\leqq i_1<i_2<\cdots<i_r\leqq v$, で$\{x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_r}\}\notin\Delta$なるものの全体が生成するidealを$I_\Delta$とし、$k[\Delta]:=A/I_\Delta$を$\Delta$のStanley-Reisner環と呼ぶ。本稿では、$k[\Delta]=\bigoplus_{n\geqq 0}(k[\Delta])_n$の$A$上の次数付加群としての極小自由分解

$$0\to\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}}A(-j)^{\beta_{hj}}\xrightarrow{\varphi_h}\cdots\xrightarrow{\varphi_2}\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}}A(-j)^{\beta_{1j}}\xrightarrow{\varphi_1}A\to k[\Delta]\to 0 \quad (1)$$

を考察の対称とする。ここで $h=hd_A(k[\Delta])$ は $k[\Delta]$ の A 上の homological dimension である。

【a】　頂点集合 $V=\{x_1,\cdots,x_v\}$ 上の単体的複体 Δ があったとき、$d=\max\{\#(\sigma);\sigma\in\Delta\}$ と置き、Δ の次元を $\dim\Delta=d-1$ と定義する。また、各 $\sigma\in\Delta$ を Δ の面と呼ぶ。

【b】　一般に、$v-d\leqq h\leqq v$ が成立し、特に $h=v-d$ となるとき $k[\Delta]$ は Cohen-Macaulay（或いは Δ は k 上 Cohen-Macaulay）と呼ばれる。

【c】　さて、$k[\Delta]$ の A 上の極小自由分解(1)において、$\beta_i=\beta_i^A(k[\Delta]):=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\beta_{i_j}$ を $k[\Delta]$ の A 上の i 番目の Betti 数と呼ぶ。また、$k[\Delta]$ が Cohen-Macaulay のとき、$\beta_h^A(k[\Delta])$ を $k[\Delta]$ の Cohen-Macaulay 型と言って $\mathrm{type}(k[\Delta])$ で表す。

【d】　単体的複体 Δ の係数体 k を持つ i 番目の被約 homology 群を $\tilde{H}_i(\Delta;k)$ で表す．すると

$$\beta_{i_j}=\sum_{W\subset V,\ \#(W)=j}\dim_k\tilde{H}_{j-i-1}(\Delta_W;k)\qquad(2)$$

であり（Hochster），従って

$$\beta_i^A(k[\Delta])=\sum_{W\subset V}\dim_k\tilde{H}_{\#(W)-i-1}(\Delta_W;k)$$

となる。特に、$k[\Delta]$ が Cohen-Macaulay ならば、その Cohen-Macaulay 型は

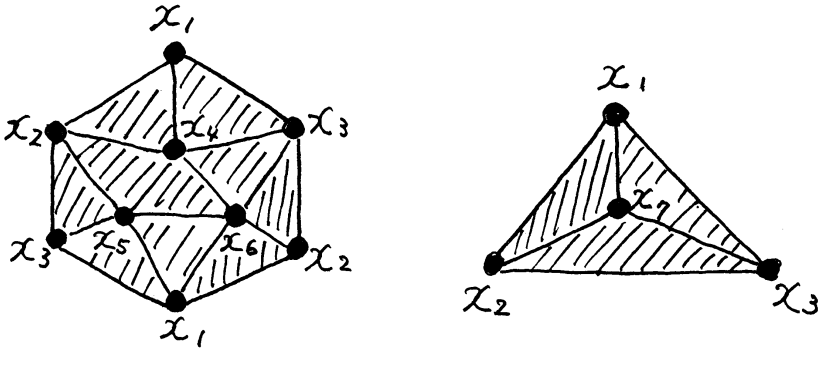
$$\mathrm{type}(k[\Delta])=\sum_{W\subset V}\dim_k \tilde{H}_{d-1-\#(W)}(\Delta_{V-W};k)$$

である。

【e】 たとえば、下図の単体的複体（$v=7$, $d=3$）を考えよう。このとき、Δ は任意の体 k 上 Cohen-Macaulay であるが、

$$\mathrm{type}(k[\Delta])=\begin{cases}4 & \mathrm{char}(k)\neq 2 \text{ のとき}\\ 5 & \mathrm{char}(k)=2 \text{ のとき}\end{cases}$$

である。



なお、Cohen-Macaulay 単体的複体に限っても、$\beta_i^A(k[\Delta])$ は $i\geqq 3$ のとき体 k の標数に依存するが、しかし、任意の単体的複体 Δ に対して、$\beta_2^A(k[\Delta])$ は体 k には無関係である。

【f】 極小自由分解(1)が純であるとは、各$1 \leqq i \leqq h$に対して$c_i \in \mathbb{Z}$が存在し$\beta_{i_j}=0$, ${}^\forall j \neq c_i$, となるときを言う。すると(1)は

$$0 \to A(-c_h)^{\beta_h} \xrightarrow{\varphi_h} \cdots \xrightarrow{\varphi_2} A(-c_1)^{\beta_1} \xrightarrow{\varphi_1} A \to k[\Delta] \to 0 \qquad (3)$$

と表せる。ここで$0<c_1<c_2<\cdots<c_h$である。数列$(c_1, c_2, \cdots, c_h)$は純な極小自由分解(3)の型と呼ばれる。

【g】 純な極小自由分解(3)のBetti数列$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_h)$と型$(c_1, c_2, \cdots, hc_h)$の間には、関係式

$$\beta_i = \left| \prod_{j \neq i} \frac{c_j}{c_j - c_i} \right| , \quad 1 \leqq {}^\forall i \leqq h$$

が成立する(Herzog−Kühl)。

【h】 他方、純な極小自由分解(3)において$c_i = i+(m-1)$, $1 \leqq {}^\forall i \leqq h$, が成立するとき、(3)はm-linear resolutionと呼ばれる。

【i】 単体的複体Δの面σで$\#(\sigma)=i+1$となるものの個数を$f_i=f_i(\Delta)$で表し、$f(\Delta)=(f_0, f_1, \cdots, f_{d-1})$を$\Delta$のf−列と呼ぶ。いま、単体的複体$\Delta$はCohen-Macaulayであると仮定すると、$k[\Delta]=A/I_\Delta$のA上の極小自由分解(1)が

m-linear resolutionとなるための必要十分条件は

(i) $f_i = \binom{v}{i+1}$, $0 \leqq {}^\forall i \leqq m-2$

(ii) $f_{m-1} = (-1)^{m-1} \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \binom{v}{i}\binom{d-i}{d-m}$

が成立することである。

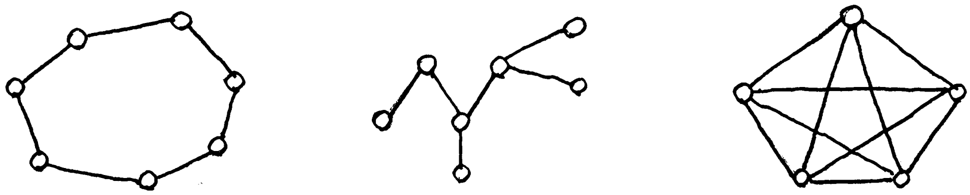
さて、本稿では下記の研究課題に関連して最近得られた結果を簡潔に概説する。

$\boxed{1}$ Cohen-Macaulay単体的複体Δで$k[\Delta] = A/I_\Delta$のA上の極小自由分解が純となるものを分類せよ。

$\boxed{2}$ 単体的複体ΔがCohen-Macaulayであるとき、$k[\Delta] = A/I_\Delta$のA上のBetti数$\beta_i^A(k[\Delta])$を具体的に計算するための組合せ論的公式を探せ。

I 純な極小自由分解を持つ Cohen-Macaulay 半順序集合

(1.1) 単体的複体Δの次元は1 (i.e., $d=2$) であるとせよ。このとき、Δは頂点集合V上の(単純) graphである。たとえば、



cycle　　tree　　complete graph

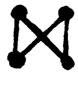
命題。 次元1の単体的複体ΔのStanley-Reisner環$k[\Delta]=A/I_\Delta$ のA上の極小自由分解が純となるためには、Δが(i) complete graph、(ii) forest、(iii) cycle のいずれかであることが必要十分である。∎

(1.2) 有限半順序集合Pに含まれる全順序部分集合をPの鎖と呼ぶ。いま、Pの鎖の全体を$\Delta(P)$で表すと、$\Delta(P)$はPを頂点集合とする単体的複体となる。そこで$\Delta(P)$をPの順序複体と呼ぶ。半順序集合Pが Cohen-Macaulay であるとは$\Delta(P)$が Cohen-Macaulay 単体的複体であるときを言う。半順序集合Pの分解 $P=P_0\cup P_1\cup\cdots\cup P_{d-1}$ (disjoint union）がPの階数分解であるとは、Pの任意の極大鎖が $x_0 < x_1 < \cdots < x_{d-1}$, $x_i \in P_i$ ($0 \leqq {}^\forall i \leqq d-1$)、なる型であるときを言う。このとき$P$の階数を $\mathrm{rank}(P) = d-1$ と定義する。Cohen-Macaulay 半順序集合Pには階数分解が存在する。

(1.3)　階数 $d-1$ の Cohen-Macaulay 半順序集合Pの極大鎖の個数は少なくとも $\#(P)-d+1$ である。更に【i】の事実より次が従う。

補題.　階数 $d-1$ の Cohen-Macaulay 半順序集合Pの順序複体$\Delta(P)$の Stanley-Reisner 環 $k[\Delta(P)] = A/I_{\Delta(P)}$ のA上の極小自由分解が 2-linear となるための必要十分条件はPの極大鎖の個数が $\#(P)-d+1$ となることである。■

(1.4)　さて、純な極小自由分解を持つ Cohen-Macaulay 半順序集合を分類する際の鍵となるのは次の結果である。

補題.　階数 $d-1$ ($\geqq 2$) の Cohen-Macaulay 半順序集合Pの階数分割を $P = P_0 \cup P_1 \cup \cdots \cup P_{d-1}$ とし、Pは  を部分半順序集合として含まないと仮定せよ。このとき $k[\Delta(P)] = A/I_{\Delta(P)}$ のA上の極小自由分解が純であるならばPの極大

鎖の個数は $\#(P)-d+1$ である。∎

(1.5)　階数 $d-1$ の Cohen-Macaulay 半順序集合 P が complete intersection であるとは、P の階数分解 $P=P_0\cup P_1\cup\cdots\cup P_{d-1}$ において　$P_i\cup P_{i+1}=\bowtie$　$(0\leqq{}^{\forall}i<d-1)$ となるときを言う。このとき $k[\Delta(P)]=A/I_{\Delta(P)}$ の A 上の極小自由分解は純であって、その型は $(2,4,6,\cdots,2d)$ である。

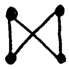
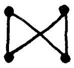
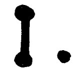
(1.6)　純な極小自由分解を持つ Cohen-Macaulay 半順序集合は次のように分類される。

定理([B-H])．　階数 $d-1$ $(\geqq 1)$ の Cohen-Macaulay 半順序集合の階数分解 $P=P_0\cup P_1\cup\cdots\cup P_{d-1}$ において、$\#(P_i)\geqq 2$　$(0\leqq{}^{\forall}i\leqq d-1)$ を仮定せよ。このとき、Stanley-Reisner 環 $k[\Delta(P)]=A/I_{\Delta(P)}$ の A 上の極小自由分解が純となるためには、次のいずれかが成立することが必要十分である：

(i)　$d=2$ で $\Delta(P)$ は cyclic；

(ii)　P は complete intersection；

(iii)　P の極大鎖の個数は $\#(P)-d+1$ である。

［略証］ まず、$k[\Delta(P)] \simeq A/I_{\Delta(P)}$ のA上の極小自由分解が純であると仮定する。このとき、$d=2$ ならば 補題(1.1)より $\Delta(P)$ は cycle である。次に、$d \geqq 3$ とし、 $\not\subset P$ とすると、補題(1.4)より(iii)が成立する。他方、 $\subset P$ ならば ・・・ $\not\subset P$， $\not\subset P$ が Hochster の公式(2)より従うので、結局Pは(ii)となる。逆に、Pが(i)、(ii)、(iii) のいずれかならば、$k[\Delta(P)]$ のA上の極小自由分解は純となる。▮

Ⅲ Cohen-Macaulay半順序集合のCohen-Macaulay型

(2.1) 有限半順序集合Pがあったとき、$\hat{P} = P \cup \{\hat{0}, \hat{1}\}$ と置く。ただし、$\hat{0} < x < \hat{1}$ $({}^\forall x \in P)$ である。半順序集合 $\hat{P}$ の Möbius 函数 $\mu = \mu_{\hat{P}}$ とは、次のように定義される写像 $\mu : \{(x, y) \in \hat{P} \times \hat{P} \,;\, x \leqq y\} \to \mathbb{Z}$ である：

(i) $\mu(x, x) = 1$ ， ${}^\forall x \in \hat{P}$ ；

(ii) $\mu(x, y) = -\sum_{x \leqq z < y} \mu(x, z)$ if $x < y$ in $\hat{P}$.

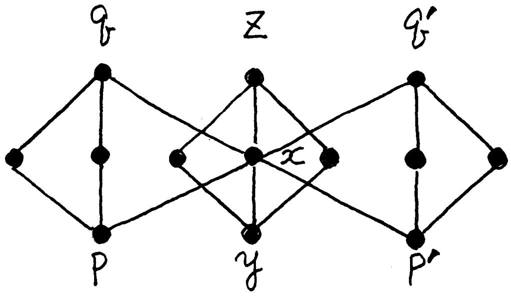
（2.2） 有限半順序集合Lが束であるとは、Lの任意の元αとβに対して"join"と呼ばれる上限$\alpha \vee \beta$と"meet"と呼ばれる下限$\alpha \wedge \beta$が存在するものである。特に、Lには最小元$\hat{0}$と最大元$\hat{1}$が存在する。

（2.3） Cohen-Macaulay半順序集合Pがあったとき、Pの鎖 $C: x_1 < x_2 < \cdots < x_r$ が essentialであるとは

$$\mu(C) := \prod_{i=0}^{r} \mu(x_i, x_{i+1}) \neq 0$$

なるときを言う。ここで $x_0 = \hat{0}$, $x_{r+1} = \hat{1}$, rは任意の非負整数でμは$\hat{P}$のMöbius函数である。また、Pのessentialな鎖Cでいかなる真の部分鎖C'もessentialでないとき、Cをfundamentalな鎖と呼ぶ。特に、$\mu(\hat{0}, \hat{1}) \neq 0$のとき、空集合がPの唯一つのfundamentalな鎖となる。我々はPのfundamentalな鎖の全体を$\mathcal{F}(P)$で表す。

（2.4） たとえばPを下図のCohen-Macaulay半順序集合とすると、Pのfundamentalな鎖は x, $y<z$, $p<q$, $p'<q'$ となる。



(2.5)　有限束Lがmodular束であるとは、Lの任意の元x, y, zで$x \leqq z$なるものに対して$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$が成立するときを言う。半順序集合Pがあって$L = P^{\wedge}$がmodular束ならばPはCohen-Macaulayである。

定理([H])．有限束$L = P^{\wedge}$はmodular束であると仮定せよ。このとき、Cohen-Macaulay半順序集合Pの順序複体$\Delta(P)$のStanley-Reisner環$k[\Delta(P)]$のCohen-Macaulay型type$(k[\Delta])$は

$$\mathrm{type}(k[\Delta]) = \sum_{C \in \mathcal{F}(P)} \left| \mu_{P^{\wedge}}(C) \right|$$

である。■

たとえば、(2.4)のCohen-Macaulay半順序集合は$L = P^{\wedge}$がmodular束であって$\mathrm{type}(k[\Delta(P)]) = 10$である。

(2.6)　素数 $p>0$ と $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_\ell)\in\mathbb{Z}^\ell$, $\lambda_1\geqq\lambda_2\geqq\cdots\geqq\lambda_\ell>0$, があったとき、$G_\lambda(p)$ で型が λ の有限可換 p-群を表す。すなわち

$$G_\lambda(p)=(\mathbb{Z}/p^{\lambda_1}\mathbb{Z})\times(\mathbb{Z}/p^{\lambda_2}\mathbb{Z})\times\cdots\times(\mathbb{Z}/p^{\lambda_\ell}\mathbb{Z})$$

である。いま、$\mathcal{L}(G_\lambda(p))$ で $G_\lambda(p)$ の部分群の全体が包含関係で成す束を表すと、$\mathcal{L}(G_\lambda(p))$ はmodular束となる。このとき、λ を固定すると $\mathrm{type}(k[\Delta(\mathcal{L}(G_\lambda(p)))])$ は p に関する整数係数の多項式となる(森田英章、修士論文(準備中))。ただし、その係数は必ずしも非負とは限らない。

参考文献

[B-H] W. Bruns and T. Hibi, Cohen-Macaulay partially ordered sets with pure resolutions, submitted.

[H] T. Hibi, Cohen-Macaulay types of Cohen-Macaulay complexes, J. Algebra, to appear.