数理解析研究所講究録
第 860 巻 1994 年 52-59

正作用素の幾何学的性質

大阪教育大　藤井 淳一 (Jun Ichi Fujii)

一連の作用素環における微分幾何的な考察の中で、Corach-Porta-Recht は、可逆正元全体を多様体と見て接ベクトル束が Finsler 空間となるように距離をいれ、測地線として（加重）幾何平均，最も自然な接ベクトルとして相対作用素エントロピーが得られることを示した [1]。これは実は、Uhlmann [11] が、relative entropy を導入したときに考えられた「補間的道」の作用素版にあたり、以前，相対作用素エントロピーの導入 [3] においてすでに指摘したものである。ここでは、まず「補間的道」の一般論をふまえて、（加重）作用素平均が、測地線となるような可逆正作用素の幾何学的考察を試みたい。

Kubo-Ando theory [9] における作用素平均 m と、$[0,\infty)$ 上の（非負連続）作用素単調関数との対応は、可逆正作用素 A, B について、

$$A\ m\ B = A^{1/2} f(A^{-1/2} B A^{-1/2}) A^{1/2} \tag{1}$$

(正規条件 $f(1) = 1$) であったが、これを拡張して、「非負性」を外した場合の m を、我々は **solidarity** と呼んだ [2,5]。相対作用素エントロピーは、$f(t) = \log t$ の場合の solidarity である。このとき、Uhlmann の意味での「補間的道」とは、パラメータ化された作用素平均の族 $\{m_t \mid 0 \le t \le 1\}$ で、

中点条件：　$m = m_{1/2}$ が対称作用素平均

端点条件：　$A\ m_0 B = A,\quad A\ m_1 B = B$

補間性：　$(A\ m_p B)\ m\ (A\ m_q B) = A\ m_{\frac{p+q}{2}} B$

連続性：　$\operatorname*{u-lim}_{r\to t} A\ m_r B = A\ m_t B$

を満たすものである [4,7,8]。補間的道の中点となりうる対称作用素平均は限られたもので (cf. [4])、それを「補間的平均」と呼ぶが、その典型的な例は

$$A\,g^{[r]}B = A^{1/2}\left(\frac{1+(A^{-1/2}BA^{-1/2})^r}{2}\right)^{1/r} A^{1/2}$$

$(-1 \leq r \leq 1)$ で決まる r-**power mean**（ただし、$r=0$ のときは、幾何平均 g とする）で、対応する補間的道は、

$$A\,g_t^{[r]}B = A^{1/2}\Big((1-t)+t(A^{-1/2}BA^{-1/2})^r\Big)^{1/r} A^{1/2}$$

である。補間的平均 m に対応する補間的道を m_t としたとき、対応 $m \mapsto m_t$ は、作用素平均の順序を保存する。特に、対称な作用素平均では、最大が算術平均 a で最小が調和平均 h であることが分かっているので、補間的道においても

$$h_t \leq m_t \leq a_t$$

となる。さらに、補間性はもっと一般に

$$(A\,m_pB)\,m_t\,(A\,m_qB) = A\,m_{(1-t)p+tq}B$$

となるので、この二つの事実から、次の定理が分かる [8]：

【定理 1】 m_tが補間的道ならば、$A\,m_tB$は t について凸で微分可能.

(証明) t について凸，すなわち

$$(A\,m_pB)\,a_t\,(A\,m_qB) \geq A\,m_{(1-t)p+tq}B$$

であることは、上記の２式から明らか。それで微分可能性については、片側微分が一致することをチェックすればよい。

《注意》 0との区間変化率 $\dfrac{A\ m_t B - A}{t}$ は solidarity であるから、0での微分係数も solidarity となる： $A\ s_m B = \underset{t\downarrow 0}{\text{u-lim}}\ \dfrac{A\ m_t B - A}{t}$.
このとき solidarity s_m を **derivative solidarity** と呼ぼう。例えば、上記の r-power mean の補間的道 $g_t^{[r]}$ に対する derivative solidarity は

$$S_r(A|B) = \frac{1}{r}A^{1/2}\big((A^{-1/2}BA^{-1/2})^r - 1\big)A^{1/2}$$

である。derivative solidarity は $A\ s_m A = 0$, すなわち表現関数 $F(x) = 1\ s_m x$ の言葉で $F(1) = 0$ となっていることに注意しよう。また F は作用素単調で微分可能であり、微分係数については $F'(1) = 1$ という性質も持っていることが分かる。逆にこのような solidarity のうち、m_t に対応するものは、次のように得られる [8]：

【定理 2】 補間的道 m_t に対して 0 でない solidarity s で

$$A\ \ s(A\ m_t B) = t(A\ s\ B)$$

を満たすものは s_m の正数倍である。

（証明） s, s_m, m_t に対応する表現関数をそれぞれ F, F_m, f_t とすると、条件式は、

$$F(f_t(x)) = tF(x)$$

という関数方程式となる。両辺を t で微分すれば

$$F'(f_t(x))\frac{df_t(x)}{dt} = F(x)$$

となり、右辺について $t \to 0$ の極限をとれば、$f_0(x) \equiv 1$ より

$$F'(1)F_m(x) = F(x).$$

したがって、$F'(1) = 1$ の条件を入れれば、derivative solidarity の特徴付けになるが、じつはこれは、Kamei [7] によって得られた相対作用素エントロピーの特徴付けの一般化である。さらに関数の表現式に注目すれば、この定理によって derivative solidarity から元の補間的平均が再生できることがわかる：

【系】
$$f(x) = F_m^{-1}\left(\frac{F_m(x)}{2}\right).$$

さて、このような補間的道が、どのように測地線となり得るかについて見るために Corach-Porta-Recht の幾何学をまず概観するが、その前に Finsler 計量について簡単に触れておこう（詳細は [10] 等を参照）。測地線は、微分幾何的には主ファイバー束の接続で与えられる平行概念によって「自己平行道」と定められるが、Riemann 幾何学的には「計量」で計ったときの最短の道といえる。無限次元の多様体での Riemann 計量は内積を持つ空間，すなわち Hilbert 空間を接空間として持つ場合になるが、ここでは（コンパクトに限らない）一般の作用素の空間を考えているので、内積をもたない接空間は Banach 空間で計量はノルムにあたる。簡単にいえば、このとき各点での接空間に与えられるノルムが幾何学的な接続による平行移動と compatible になっているならば、そのノルムは Finsler 計量と呼ばれ、測地線は Riemann 幾何学と同様に最短の道となるわけである。それでは、CPR 幾何学について見てみよう。

$\mathcal{A}^+$ (resp. $\mathcal{A}^h$) を unital C*-環 $\mathcal{A}$ の可逆正元 (resp. エルミット元) 全体とする。$\mathcal{A}^h$ は多様体 $\mathcal{A}^+$ の各点 P での接空間と見れる。各点 A の接ベクトル X について

$$L(X; A) = \|A^{-1/2} X A^{-1/2}\| \tag{2}$$

と決めると、点 P を固定して得られる次の主ファイバー束 $\{\mathcal{G}, \mathcal{A}^+, \mathcal{U}_P, \pi\}$ の幾何構造と compatible になることがわかる，つまり、L は Finsler 計量 となる:

$\mathcal{G}$ は $\mathcal{A}$ の正則元全体, $\mathcal{A}^+$ が底空間で、構造群 $\mathcal{U}_P = \{V \in \mathcal{G} \mid V^*PV = P\}$ の作用は $X \mapsto V^{*-1}XV^{-1}$, π は射影 $G \mapsto G^{*-1}PG^{-1}$ とする。このとき（微分可能な）道 $\gamma(t)$ の「長さ」 $\ell(\gamma)$ は

$$\ell(\gamma) \equiv \int_0^1 L(\gamma'(t); \gamma(t))dt = \int_0^1 \|\gamma(t)^{-1/2}\gamma'(t)\gamma(t)^{-1/2}\|dt$$

と定義され、$A, B \in \mathcal{A}^+$ の間の「距離」は、

$$d(A, B) = \inf\{\ell(\gamma) \mid \gamma : A \text{ から } B \text{ への道}\}$$

で決まるが、この意味で unique な最短道, 即ち測地線が $A\ g_t B$ で

$$d(A, B) = \ell(A\ g_t B) = \|\log(A^{-1/2}BA^{-1/2})\| = \|A^{-1/2}S_0(A|B)A^{-1/2}\|$$

となることが、彼らの主要結果であった [1]。

ところで、$g = g_{1/2} = g^{[0]}$ は幾何（作用素）平均であるが、対称作用素平均の立場から言えば、算術平均 $a = g^{[1]}$, 調和平均 $h = g^{[-1]}$ を見逃すことはできない [6]。自明な Finsler 計量 として点 P に依存しない「ノルム」自身を考えることができるが、対応する主ファイバー束の構造群は $\mathcal{A}$ のユニタリ群 $\mathcal{U}$ で、射影は $G \mapsto |G|$ （極分解における絶対値）にとればよい。このとき P のファイバーは $\mathcal{U}P$ で、自然な接続により UX ($U \in \mathcal{U}, X \in \mathcal{A}^h$) が水平ベクトルである。すると測地線は、補間的道 $A\ a_t B = (1-t)A + tB$ で、$d(A, B) = \|B - A\|$ で対応する derivative solidarity $S_1(A|B) = B - A$ のノルムになる。このときの道の最短性の保証は、ノルムの三角不等式そのものである。

対して、調和平均の場合, 即ち、補間的道

$$A\ h_t B = ((1-t)A^{-1} + tB^{-1})^{-1} = (A^{-1} + t(B^{-1} - A^{-1}))^{-1}$$

が測地線となる幾何構造を考えよう。このとき derivative solidarity は

$$S_{-1}(A|B) = A - AB^{-1}A = A(A^{-1} - B^{-1})A$$

である。点 P を固定して、構造群

$$\mathcal{V}_P = \{\, V \in \mathcal{G} \mid PVP^{-1} \in \mathcal{U} \,\} = \{\, V \in \mathcal{G} \mid V^*P^2V = P^2 \,\}$$

と射影 $\pi_P : G \mapsto (G^{*-1}P^2G^{-1})^{1/2}$ を考えると、点 A のファイバーは $\pi(A)^{-1} = A^{-1}P\mathcal{V}_P$ となるので、自然な接続における水平ベクトルは、例えば $(B^{-1} - A^{-1})PV$ であろう。すると水平な曲線として

$$\Gamma(t) = (A^{-1} + t(B^{-1} - A^{-1}))PV = ((1-t)A^{-1} + tB^{-1})PV$$

を考えれば、$\pi_P(\Gamma) = A\ h_t B$ となり、この幾何構造で、水平曲線の射影として求める測地線が得られていることがわかる。それで、計量を

$$L_1(X; P) = \|P^{-1}XP^{-1}\|$$

で与えると、構造群の作用 $X \mapsto V^{*-1}XV^{-1}$ で不変になり；

$$\begin{aligned}\|P^{-1}(V^{*-1}XV^{-1})P^{-1}\| &= \|(PV^{-1}P^{-1})^*P^{-1}XP^{-1}PV^{-1}P^{-1}\| \\ &= \|P^{-1}XP^{-1}\|\end{aligned}$$

これが求める計量となることが確かめられる [6]：

【定理 3】　計量 が L_1 で与えられるとき、測地線は $A\ h_t B$ で距離は、$d(A,B) = \|A^{-1} - B^{-1}\| = \|AS_{-1}(A|B)A\|$ である。

実際 $A\ h_t B$ が最短であることは、やはり三角不等式によって確認することができる： 非可換な関数 $\gamma(t)$ の微分において、

$$\frac{d(\gamma(t))^{-1}}{dt} = -\gamma(t)^{-1}\gamma'(t)\gamma(t)^{-1}$$

であることに注意しよう。するとこの道による「道のり」は

$$\begin{aligned}
\ell(\gamma) &\equiv \int_0^1 L(\gamma'(t);\gamma(t))dt = \int_0^1 \|\gamma(t)^{-1}\gamma'(t)\gamma(t)^{-1}\|dt \\
&= \int_0^1 \|d(\gamma(t))^{-1}\| = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\|\gamma\left(\frac{k}{n}\right)^{-1} - \gamma\left(\frac{k-1}{n}\right)^{-1}\right\| \\
&\geq \left\|\gamma(1)^{-1} - \gamma(0)^{-1}\right\| = \|B^{-1} - A^{-1}\|.
\end{aligned}$$

一方、$A\ h_t B$ 自身の道のりは、

$$\ell(Ah_tB) = \int_0^1 \left\|\frac{d(Ah_tB)^{-1}}{dt}\right\| dt = \int_0^1 \|B^{-1}-A^{-1}\|dt = \|B^{-1}-A^{-1}\|.$$

したがって、求める最短道は、$A\ h_t B$ であることがわかる。

《注意》 補間的作用素平均である r-power mean によって、幾何平均を経由して調和平均から算術平均へパラメータ化できるように、これらの補間的道が測地線となるように幾何構造もパラメータ化できそうに見えるが、

$$d_r(A,B) = \|A^{\frac{1-r}{2}} S_r(A|B) A^{\frac{1-r}{2}}\|$$

では距離の対称性が一般には成り立たない、つまり

$$d_r(A,B) \neq d_r(B,A)$$

となる例が見つかることが Furuta によって指摘されている (cf. [7])。

REFERENCES

1. G.Corach, H.Porta and L.Recht, *Geodesics and operator means in the space of positive operators*, to appear in Int. J. Math..
2. J.I.Fujii, M.Fujii and Y.Seo, *An extension of the Kubo-Ando theory: Solidarities*, Math. Japon. **35** (1990), 387-396.
3. J.I.Fujii and E.Kamei, *Relative operator entropy in noncommutative information theory*, Math. Japon. **34** (1989), 341-348.
4. J.I.Fujii and E.Kamei, *Uhlmann's interpolational method for operator means*, Math. Japon. **34** (1989), 541-547.
5. J.I.Fujii, *Operator means and the relative operator entropy*, Operator Theory: Advances and Applications, vol. 59, Birkhäuser, 1992, pp. 161-172.
6. J.I.Fujii, *The Corach-Porta-Recht theorem and operator means*, Preprint.
7. E.Kamei, *Paths of operators parametrized by operator means*, Preprint.
8. J.I.Fujii and E.Kamei, *Interpolational paths and their derivatives*, Preprint.
9. F.Kubo and T.Ando, *Means of positive linear operators*, Math.Ann. **246** (1980), 205-224.
10. 大森英樹, 無限次元リー群論, 紀伊国屋書店, 1978.
11. A.Uhlmann, *Relative entropy and the Wigner-Yanase-Dyson-Lieb concavity in an interpolation theory*, Commun. Math. Phys. **54** (1977), 22-32.