数理解析研究所講究録
第 861 巻 1994 年 21-32

不動点定理と収束定理

東工大理 木内 博文 (Hirobumi Kiuchi)

1　はじめに

C を Banach 空間 E の空でない集合とする. C からそれ自身への写像 T が Lipschitz 写像であるとは, 正の定数 k が存在して, 任意の $x, y \in C$ につき

$$\|Tx - Ty\| \leq k\|x - y\|$$

となるときをいう. S を semitopological 半群とする. すなわち, 半群で, 任意の $s \in S$ につき S からそれ自身の写像 $t \mapsto t \cdot s$ と $t \mapsto s \cdot t$ が連続になるような Hausdorff 位相が入っているとする. そのとき, C からそれ自身への写像族 $\mathcal{S} = \{T_t : t \in S\}$ が C 上の Lipschitz 半群とは次を満たすときをいう.

(1) 任意の $t, s \in S, x \in C$ につき, $T_{ts}x = T_t T_s x$ である.

(2) 任意の $x \in C$ につき, 写像 $s \mapsto T_s x$ が S 上で連続である.

(3) 任意の $s \in S$ につき, T_s が C からそれ自身への Lipschitz 写像で Lipschitz 係数が k_s である.

C 上の Lischitz 半群 $\mathcal{S}$ は, 任意の $s \in S$ につき $k_s = 1$ のとき非拡大半群と言われる. 半群の漸近的挙動は発展方程式などの初期値問題に関連してとても興味深いが, 近年まであまり知られていなかった. 1975 年に, Baillon が非拡大写像に対する次の非線形エルゴード定理を最初に証明した.

定理 1.1 C を *Hilbert* 空間の空でない有界閉凸集合とし, T を C からそれ自身への非拡大写像とするとき, 任意の $x \in C$ につき, *Cesàro means*

$$S_n x = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k x$$

が $n \to \infty$ のとき T のある不動点に弱収束する.

さらに, 彼は次の非拡大半群に対する非線形エルゴード定理を証明した.

定理 1.2 C を *Hilbert* 空間の空でない有界閉凸集合とし, $\mathcal{S} = \{T_t : t \geq 0\}$ を C 上の非拡大半群とする. このとき, 任意の $x \in C$ につき,

$$S_t x = \frac{1}{t}\int_0^t T_s x ds$$

が $t \to \infty$ のとき $\mathcal{S}$ のある共通不動点に弱収束する.

一方, Bruck が 1979 年に, 非拡大写像 T に対する軌道 $\{T_t x\}$ の収束を研究し, $\{T_t x\}$ が T のある不動点に弱収束するための必要十分条件は, T の不動点集合 $F(T)$ が空でなく, $n \to \infty$ のとき $T^n x - T^{n+1} x$ が 0 に弱収束することであることを証明した. Pazy は非拡大半群の漸近的挙動を考察し, Hilbert 空間において非拡大半群に対する類似の結果を証明した. それから, 他の数学者によって, 弱収束と強収束に関するたくさんの定理が証明された. また, Takahashi は amenable, あるいは右可逆な, 半群に対する非線形エルゴード・レトラクションの存在を研究した.

写像に対する概軌道の概念は, Bruck によって導入され, 後に Miyadera- Kobayasi が非拡大半群 $\mathcal{S} = \{T_t : t \geq 0\}$ の場合に拡張し, Banach 空間においてそのような概軌道に対する弱概収束と強概収束を証明した. さらに, Takahashi-Park がその概念を可換な半群の場合に拡張し, これらの結果を一般化した. Takahashi-Zhang はさらに, それを可逆な半群にまで拡張した. 一方, 1992 年に Takahashi は Hilbert 空間で, 凸性なしの非拡大半群に対する非線形エルゴード定理と不動点定理を証明した. そして, [6] では Hilbert 空間で凸性なしで非拡大半群に対する概軌道の漸近的挙動に関する結果を得た. また, Banach 空間における不動点定理は, その空間が一様凸で norm が Fréchet

微分可能であることが仮定されていたが, Takahashi[17] が, 一様凸な Banach 空間で証明した. それにならい, 定理 3.2を証明する. 最後のセクションでは, Banach 空間において $\mathcal{S} = \{T_t : t \in S\}$ が半群の性質をもたない場合の収束定理について述べる.

2 Submeans と Means

S を集合とし, $B(S)$ を S 上の有界実数値関数全体のつくるベクトル空間に supremum norm を入れた Banach 空間とする. X を $B(S)$ の部分空間で定数を含むとする. Mizoguchi-Takahashi [9] に従って, X 上の submean を定義する. すなわち, X 上の汎関数 μ で次の条件を満たす.

(1) 任意の $f, g \in X$ につき $\mu(f+g) \leq \mu(f) + \mu(g)$

(2) 任意の $f \in X, \alpha \geq 0$ につき $\mu(\alpha f) = \alpha\mu(f)$

(3) $f, g \in X$ が $f \leq g$ を満たすなら $\mu(f) \leq \mu(g)$

(4) 任意の定数 c につき $\mu(c) = c$

時と場合に応じて, X 上の submean μ に対して $\mu(f)$ の代わりに $\mu_t(f(t))$ と書く. 任意の $s \in S, f \in B(S)$ につき, $l_s f$ と $r_s f \in B(S)$ を次で定義する.

$$l_s f(t) = f(st), \; r_s f(t) = f(ts) \; (\forall t \in S)$$

X を $B(S)$ の部分空間で定数を含み, $l_s(r_s)$ $(\forall s \in S)$ で不変であるとする. このとき, X 上の submean μ が左不変 (右不変) であるとは

$$\mu(f) = \mu(l_s(f)) \; (\mu(f) = \mu(r_s)) \; (\forall f \in X, s \in S)$$

が成り立つときをいう. 不変な submean とは右不変で左不変な submean のことである.

命題 2.1 *X を $B(S)$ の部分空間で定数を含むとし, μ を X 上の submean とするとき, 任意の $f \in X$ につき*

$$\inf_{s \in S} f(s) \leq \mu(f) \leq \sup_{s \in S} f(s)$$

が成り立つ.

命題 2.2 (1) X を $B(S)$ の右不変な部分空間で定数を含むとし, μ を X 上の右不変な *submean* とするとき, 任意の $f \in X$ につき

$$\sup_s \inf_t f(ts) \leq \mu(f) \leq \inf_s \sup_t f(ts)$$

が成り立つ.

(2) X を $B(S)$ の左不変な部分空間で定数を含むとし, μ を X 上の左不変な *submean* とするとき, 任意の $f \in X$ につき

$$\sup_s \inf_t f(st) \leq \mu(f) \leq \inf_s \sup_t f(st)$$

が成り立つ.

X を $B(S)$ の部分空間で, 恒等的に 1 をとる関数 e を含むとする. そのとき, $\mu \in X^*$ が X 上の mean であるとは, $\|\mu\| = \mu(e) = 1$ を満たすときをいう. mean は submean である. mean について次が成り立つ.

定理 2.3 X を $B(S)$ の部分空間で, 恒等的に 1 をとる関数 e を含むとする. そのとき, $\mu \in X^*$ につき次が同値である.

(1) $\|\mu\| = \mu(e) = 1$, すなわち, μ は *mean* である.

(2) 任意の $f \in X$ に対して, 次が成り立つ.

$$\inf_{s \in S} f(s) \leq \mu(f) \leq \sup_{s \in S} f(s).$$

3 半群に対する不動点定理と収束定理

E を実 Banach 空間とし, C をその空でない閉凸集合とする. $f \in E^*$ の $x \in E$ における値を (x, f) と書く. E から E^* への双対写像 J を

$$J(x) = \{f \in E^* : (x, f) = \|x\|^2 = \|f\|^2\} \ (x \in E)$$

で定義する. Hahn Banach の定理によって, 任意の $x \in E$ につき $J(x) \neq \emptyset$ である. また, $x, y \in E, f \in J(y)$ につき

$$\|x\|^2 - \|y\|^2 \geq 2(x - y, f)$$

が成り立つ.

S を semitopological 半群とし, $\mathcal{S} = \{T_t : t \in S\}$ を C 上の非拡大半群とする. 連続関数 $u : S \to C$ が $\mathcal{S}$ の概軌道とは

$$\inf_w \sup_{t,s} \|u(swt) - T_s u(wt)\| = 0$$

を満たすときをいう [6]. 特に, $x \in C$ に対して $u(t) = T_t x$ は $\mathcal{S}$ の概軌道である. E が一様凸な Banach 空間で, X は $B(S)$ の部分空間で定数を含み, $r_s(\forall s \in S)$ で不変であるとすると, 任意の $f \in E^*$ につき関数 $t \in S \mapsto (u(t), f)$ が X に属する. 従って, X 上の任意の mean μ につき一意に $u_\mu \in \overline{co}\{u(t) : t \in S\}$ が存在して

$$(u_\mu, f) = \mu_t(u(t), f) \ (\forall f \in E^*)$$

となる [5]. $C(S)$ を S 上の有界実数値連続関数のつくる Banach 空間とする. $\{\mu_\alpha : \alpha \in A\}$ を $C(S)$ 上の means のネットとする. そのとき, $\{\mu_\alpha : \alpha \in A\}$ 漸近的に不変であるとは, 任意の $f \in C(S)$, $s \in S$ につき,

$$\mu_\alpha(f) - \mu_\alpha(l_s f) \to 0, \ \mu_\alpha(f) - \mu_\alpha(r_s f) \to 0$$

が成り立つときをいう.

補題 3.1 ([17]) *C を一様凸な Banach 空間の閉凸集合とする. S を添字の集合とし, $\{x_t : t \in S\}$ を C の有界な集合とする. X を $B(S)$ の部分空間で定数を含んでいるとする. μ を X 上の submean とする. 任意の $x \in C$ につき S 上の実数値関数 $f(t) = \|x_t - x\|^2$ が X に属するとする. このとき, 任意の $x \in C$ につき $r(x) = \mu_t\|x_t - x\|$ とおき $r = \inf_{x \in C} r(x)$ とおくと, 一意に $z \in C$ が存在して $r(z) = r$ となる.*

定理 3.2 S を *semitopological* 半群とし, $\mathcal{S} = \{T_t : t \in S\}$ を一様凸な *Banach* 空間 E の閉凸集合 C 上の非拡大半群とする. $\mathcal{S}$ の概軌道 u が有界で $C(S)$ が不変な *submean* をもつなら, T_t $(t \in S)$ の共通不動点の集合 $F(\mathcal{S})$ は空ではない.

証明. 任意の $y \in C$ につき, S 上の関数 $h(t) = \|u(t) - y\|^2$ $(t \in S)$ が $C(S)$ に属するのは明らかである. μ を $C(S)$ 上の不変な submean とする. 次の集合 K が任意の T_s, $(s \in S)$ につき不変であることを証明する.

$$K = \{z \in C : \mu_t\|u(t) - z\|^2 = \min_{y \in C} \mu_t\|u(t) - y\|^2\}$$

まず, 任意の $s \in S, y \in E$ につき,

$$\mu_t\|u(st) - y\|^2 = \mu_t\|T_s u(t) - y\|^2$$

を示す. $\{u(t) : t \in S\}$ が有界なので, 正の数 M_1 が存在して $\|u(t)\| \le M_1$ $(\forall t \in S)$ となる. $t_0 \in S$ を固定すると,

$$\|T_s u(t) - T_s u(t_0)\| \le \|u(t) - u(t_0)\| \le 2M_1$$

となるから, 任意の $t \in S$ につき

$$\|T_s u(t)\| \le \|T_s u(t_0)\| + 2M_1$$

が成り立つ. それで, 正の数 M_2 が存在して $\|T_s u(t)\| \le M_2$ $(\forall t \in S)$ となり,

$$\begin{aligned}
&|\mu_t\|u(st) - y\|^2 - \mu_t\|T_s u(t) - y\|^2| \\
\le\ & |\mu_t(\|u(st) - y\|^2 - \|T_s u(t) - y\|^2)| \\
=\ & \mu_t\Big((\|u(st) - y\| + \|T_s u(t) - y\|)\,|\,\|u(st) - y\| - \|T_s u(t) - y\|\,|\Big) \\
\le\ & (2\|y\| + M_1 + M_2)\mu_t\|u(st) - T_s u(t)\| \\
\le\ & (2\|y\| + M_1 + M_2)\inf_w \sup_t \|u(swt) - T_s u(wt)\| = 0.
\end{aligned}$$

となる. ここで, 命題 2.2を使った. よって, 任意の $s \in S, y \in E$ につき $\mu_t\|u(st) - y\|^2 = \mu_t\|T_s u(t) - y\|^2$ が成り立つ. これを使うと, K が T_s $(s \in S)$ のもとで不変であることがわかる. 実際, $z \in K$ とすると, 任意の $s \in S$ につき,

$$\begin{aligned}\mu_t\|u(t) - T_s z\|^2 &= \mu_t\|u(st) - T_s z\|^2 \\ &= \mu_t\|T_s u(t) - T_s z\|^2 \\ &\leq \mu_t\|u(t) - z\|^2\end{aligned}$$

となる. よって, $T_s z \in K$ である. 一方, 補題 3.1により, K は 1 点からなる. それゆえに, この点 z は T_s $(s \in S)$ の共通不動点である. ∎

定理 3.3 **([17])** S を *semitopological* 半群とする. $\mathcal{S} = \{T_t : t \in S\}$ を一様凸な *Banach* 空間 E の閉凸集合 C 上の非拡大半群とする. ある $x \in C$ につき $\{T_t x : t \in S\}$ が有界で $C(S)$ が不変な *submean* をもつなら, T_t, $t \in S$ の共通不動点の集合 $F(\mathcal{S})$ は空でない.

証明. 定理 3.2において $u(t) = T_t x$ とおけばよい. ∎

次に, 定理 3.2の証明の中で定義した K が, 定理 3.2の仮定の下で $C(S)$ 上の不変な submean μ の取り方に依らないことを証明する. 命題 2.2により, 任意の $z \in C$ につき

$$\mu_t\|u(t) - z\|^2 \leq \inf_s \sup_t \|u(ts) - z\|^2$$

が成り立つ. 一方, $z \in F(\mathcal{S})$ を固定し $M_3 = \sup_t \|u(t) - z\|$ とおく. すると, 任意の $\epsilon > 0$ につき $a \in S$ が存在して

$$\sup_{s,t} \|u(tas) - T_t u(as)\| < \epsilon$$

となる. 任意の $s \in S, f_{s,t} \in J(u(tas) - z)$ につき,

$$\begin{aligned}\inf_w \sup_t \|u(tw) - z\|^2 &\leq \sup_t \|u(tas) - z\|^2 \\ &\leq \sup_t \Big(\|T_t u(as) - z\|^2 + \big(u(tas) - T_t u(as), f_{s,t}\big)\Big) \\ &\leq \sup_t \|T_t u(as) - z\|^2 + \sup_t \|u(tas) - T_t u(as)\| \, \|f_{s,t}\| \\ &\leq \|u(as) - z\|^2 + \epsilon M_3,\end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned}\inf_w \sup_t \|u(tw) - z\|^2 &\leq \mu_s\|u(as) - z\|^2 + \epsilon M_3 \\ &= \mu_s\|u(s) - z\|^2 + \epsilon M_3.\end{aligned}$$

となる. それで, $\inf_w \sup_t \|u(tw) - z\|^2 \leq \mu_s\|u(s) - z\|^2$ ($\forall z \in F(\mathcal{S})$) を得る. よって, 任意の $z \in F(\mathcal{S})$ につき

$$\mu_t\|u(t) - z\|^2 = \inf_s \sup_t \|u(ts) - z\|^2$$

となり, K が μ に依存しないことがわかる. それゆえに, K の元を x_0 と書くことにする. 一方, E が Hilbert 空間のときは, $C(S)$ 上の任意の不変な mean μ につき $x_0 = u_\mu$ であることが知られている (例えば [6]). よって, 次の定理を得る.

定理 3.4 *S を semitopological 半群とする. $\mathcal{S} = \{T_t : t \in S\}$ を Hilbert 空間 H の閉凸集合 C 上の非拡大半群とする. $\mathcal{S}$ の概軌道 u が有界で $C(S)$ が不変な mean をもつなら, T_t, $t \in S$ の共通不動点の集合 $F(\mathcal{S})$ は空でない. さらに, $\{\mu_\alpha : \alpha \in A\}$ を $C(S)$ 上の漸近的に不変な means のネットとすると, $x_0 \in F(\mathcal{S})$ が存在して u_{μ_α} が x_0 に弱収束する. ただし, u_{μ_α} はこのセクションの最初の部分で定義されたものである.*

4　写像族に対する収束定理

C を Banach 空間の閉凸集合とする. C からそれ自身への写像 U が漸近的非拡大であるとは, 任意の $x, y \in C$ につき $\|U^n x - U^n y\| \leq k_n\|x - y\|$ で, $\lim_{n\to\infty} k_n = 1$ なるときをいう [4]. 彼らは次の定理を証明した.

定理 4.1 *C を一様凸な Banach 空間の空でない有界閉凸集合とし, $T : C \to C$ を漸近的非拡大な写像とすると, T が不動点をもつ.*

C からそれ自身への写像の列 $\{T_n\}_{n=1}^\infty$ が漸近的非拡大であるとは, 任意の $x, y \in C$ につき $\|T_n x - T_n y\| \leq k_n\|x - y\|$ で, $\lim_{n\to\infty} k_n = 1$ なるときをいう [10]. 任意の $x \in C$ につき, $\omega_w(\{T_n x\})$ で, $\{T_n x\}_{n=1}^\infty$ の部分列の弱収束極限全体をあらわす.

定理 4.2 ([10]) C を一様凸で *Fréchet* 微分可能な *norm* をもつ *Banach* 空間の閉凸集合とし, $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ を C からそれ自身への漸近的非拡大写像の列とする. F は C の部分集合で, $F \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$ であるとする. $x_0 \in C$ が存在して $\omega_w(\{T_n x_0\}) \subset F$ で, 任意の m につき $n \to \infty$ のとき $T_n T_m x_0 - T_n x_0 \to 0$ となるならば,

(1) $F = \emptyset$ で $\|T_n x_0\| \to \infty$, または

(2) $F \neq \emptyset$ で $T_n x_0$ が F のある元に弱収束する.

[7] では, C 上の漸近的非拡大な写像族 $\mathcal{S} = \{T_t : t \in S\}$ を導入した. ここに S は可換な半群である. C 上の写像族 $\mathcal{S} = \{T_t : t \in S\}$ が Lipschitz 係数 k_t をもつ漸近的非拡大であるとは任意の $x, y \in C$ につき

$$\|T_t x - T_t y\| \leq k_t \|x - y\|$$

で $\lim_t k_t = 1$ なるときをいう. 次の定理は上の結果を拡張する.

定理 4.3 ([7]) E を一様凸な *Banach* 空間で *Fréchet* 微分可能な *norm* をもつとし, C をその閉凸集合とする. $F \subset C$ とし, $\mathcal{S} = \{T_t : t \in S\}$ を C 上の *Lipschitz* 係数 k_t をもつ漸近的非拡大写像族で $F \subset F(\mathcal{S})$ とする. さらに $x_0 \in C$ が存在して, $\omega_w(\{T_t x_0 : t \in S\}) \subset F$ で任意の $\forall s \in S$ につき $T_t T_s x_0 - T_t x_0 \to 0$ となるならば,

(1) $F = \emptyset$ で $\|T_t x_0\| \to \infty$, または

(2) $F \neq \emptyset$ で $T_t x_0$ が F のある元に弱収束する.

さらに, C 上の漸近的非拡大写像族 $\mathcal{S} = \{T_t : t \in S\}$ に概軌道の概念を導入し, 次の定理を証明した.

定理 4.4 ([7]) E を一様凸な *Banach* 空間で *Fréchet* 微分可能なノルムをもつとし, C をその閉凸集合とする. $\mathcal{S} = \{T_t : t \in S\}$ を C 上の漸近的非拡大写像族, u を $\mathcal{S}$ の概軌道とし, $F(\mathcal{S}) \neq \emptyset$ とする. このとき, $\omega_w(\{u(t) : t \in S\}) \subset F$ で任意の $s \in S$ につき, $\lim_t \|u(t+s) - u(s)\| = 0$ となるならば, $u(t)$ が $F(\mathcal{S})$ のある元に弱収束する.

参考文献

[1] J. B. Baillon, *Un théorème de type ergodique pour les contractions nonlinéaires dans un espace de Hilbert*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A-B 280 (1975), 1511-1514.

[2] J. B. Baillon, *Quelques propriétés de convergence asymptotique pour les semi-groups de contractions impaires*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A-B, 283 (1976), 75-78.

[3] R. E. Bruck, *A simple proof of the Mean Ergodic Theorems for nonlinear contractions in Banach spaces*, Israel J. Math. 32 (1979), 107-116.

[4] K. Goebel and W. Kirk, *A fixed point theorem for asymptotically nonexpansive mappings*, Proc. Amer. Math. Soc. 35 (1972), 172-174.

[5] N.Hirano, K. Kido and W. Takahashi, *Nonexpansive retractions and nonlinear ergodic theorems in Banach spaces*, Nonlinear Anal., vol.12, No.11 (1988), 1269-1281.

[6] H. Kiuchi and W. Takahashi, *Asymptotic behavior of almost-orbits of nonexpansive semigroups without convexity*, Kodai Math. J. 15 (1992), 185-192.

[7] H. Kiuchi and W. Takahashi, *Asymptotic behavior of asymptotically nonexpansive families in Banach spaces*, Math. Japon., 38, No.4 (1993), 627-632.

[8] I. Miyadera and K. Kobayasi, *On the asymptotic behavior of almost-orbits of nonlinear contraction semigroups in Banach spaces*, Nonlinear Anal., 6 (1982), 349-365.

[9] N. Mizoguchi and W. Takahashi, *On the existence of fixed points and ergodic retractions for lipschitzian semigroups in Hilbert spaces*, Nonlinear Anal.,14

(1990), 69-80.

[10] G. B. Passty, *Construction of fixed points for asymptotically nonexpansive mappings*, Proc. Amer. Math. Soc. 84 (1982), 212-216.

[11] A. Pazy, *On the asymptotic behavior of semigroups of nonlinear contractions in Hilbert space*, J. Funct. Anal., 27 (1978), 292-307.

[12] W. Takahashi, *A nonlinear ergodic theorem for an amenable semigroup of nonexpansive mappings in a Hilbert space*, Proc. Amer. Math. Soc., 81 (1981), 253-256.

[13] W. Takahashi, *Fixed point theorems for families of nonexpansive mappings on unbounded sets*, J. Math. Soc. Japan, 36 (1984), 543-553.

[14] W. Takahashi, *A nonlinear ergodic theorem for a reversible semigroup of nonexpansive mappings in a Hilbert space*, Proc. Amer. Math. Soc., 97 (1986), 55-58.

[15] 高橋渉 非線形関数解析学 近代科学社 (1988)

[16] W. Takahashi, *Fixed point theorem and nonlinear ergodic theorem for nonexpansive semigroups without convexity*, Canad. J. Math., 44 (1992), 880-887.

[17] W. Takahashi, *Minimization theorems and fixed point theorems*, to appear.

[18] W. Takahashi and J. Y. Park, *On the asymptotic behavior of almost-orbits of commutative semigroups in Banach spaces*, in "Nonlinear and Convex Analysis". pp. 271-293, Dekker, New York/Basel. 1987.

[19] W. Takahashi and P. J. Zhang, *Asymptotic behavior of Almost-orbits of semigroups of Lipschitzian mappings in Banach spaces*, Kodai Math. J. 11 (1988), 129-140

[20] W. Takahashi and P. J. Zhang, *Asymptotic behavior of almost-orbits of reversible semigroups of Lipschitzian mappings*, J. Math. Anal. Appl., 142 (1989), 242-249.