数理解析研究所講究録
第 863 巻 1994 年 162-167

同相写像の 1 パラメーター族について

愛媛大学理学部　平出耕一 (Koichi Hiraide)

同相写像、微分同相写像などの力学系を考えるとき、その系の重要の部分は、一般に多様体の構造を持たない recurrent set、non-wandering set、chain recurrent set 等の不変集合の上に現われる。　多くの場合、力学系はその様な不変集合上で拡大性、或はもっと一般に初期値に関する鋭敏な依存性を持つ。例えば、Shub の結果より, non-wandering set 上で拡大的であり non-wandering set と chain recurrent set とが一致する微分同相写像の全体は、微分同相写像全体の集合の中で C^0 位相に関して稠密であることが分かる。また、微分同相写像全体の中で、C^r 位相（$r \geq 1$）に関しほとんどすべての微分同相写像は non-wandering set 或は chain recurrent set 上で初期値に関する鋭敏な依存性を持つことが予想される。

距離空間の同相写像 $f : X \to X$ が拡大的であるとは、定数 $e > 0$ が存在して、2 点 $x, y \in X$ が異なるならば、ある整数 $n \in \mathbb{Z}$ に対し $d(f^n(x), f^n(y)) > e$ となるときをいう。ここで、定数 e は f の拡大定数と呼ばれる。f が初期値に関する鋭敏な依存性を持つとは、定数 $e > 0$ が存在して、O が X の空でない開集合ならば、ある整数 $n \in \mathbb{Z}$ に対し $\mathrm{diam}(f^n(O)) > e$ となるときをいう。

このノートでは、コンパクト多様体上の同相写像の 1 パラメーター族を考え、拡大性を利用して、イソトピー類における同相写像の力学系の大域的な摂動を研究するための一つの基本的な枠組みを与え、同相写像の力学系の順序付けに関する問題を述べる。また、hyperbolic infra-nil-automorphism のイソトピー類における最小性についての結果を述べ、その問題は特別な場合に肯定的であることを示す。

§1 半共役写像とモノドロミー

X をコンパクト距離空間とする。$\mathcal{C}(X)$ を X の連続写像の全体とし C^0 位相を与える。連続写像 $h \in \mathcal{C}(X)$ のホモトピー類 $\mathrm{Hom}(h)$ は $\mathcal{C}(X)$ における h の孤状連結成分として定義される。X がコンパクト多様体ならば、$\mathcal{C}(X)$ は局所可縮なので $\mathrm{Hom}(h)$ は $\mathcal{C}(X)$ において開かつ閉である。

$\mathcal{H}(X)$ により X の同相写像から成る位相群を表すことにする。$f \in \mathcal{H}(X)$ が与えられたとき、f のイソトピー類 $\mathrm{Iso}(f)$ は $\mathcal{H}(X)$ における f の孤状連結成分である。Edwards-Kirby と Černavskii の結果から、X がコンパクト多様体ならば、$\mathcal{H}(X)$ も局所可縮である。特に、$\mathrm{Iso}(f)$ は $\mathcal{H}(X)$ において開かつ閉となる。

2^X により X の空でない閉部分集合の全体を表わすことにする。ハウスドルフ距離に関して 2^X はコンパクト距離空間となる。Y を距離空間とし、d' をその距離とする。$f : Y \to 2^X$ が上半連続であるとは、$y \in Y$ と $\varepsilon > 0$ に対し $\delta > 0$ が存在し、$d'(y, z) < \delta$

ならば $f(z) \subset U_\varepsilon(f(y))$ となるときをいう。ここで $U_\varepsilon(f(y))$ は $f(y)$ の ε-近傍を表わす。f が上半連続であるための必要十分条件は、$\{(x,y) : x \in f(y), y \in Y\}$ が $X \times Y$ の閉集合となることである。

$I = [0,1]$ とし、$\{\Lambda_t : t \in I\}$ を 2^X の点の上半連続な族とする（即ち、$t \mapsto \Lambda_t$ は I から 2^X への上半連続写像）。各 $t \in I$ に対し $f_t : \Lambda_t \to \Lambda_t$ を同相写像としよう。もし $(x,t) \mapsto f_t(x)$ が連続ならば、$\{f_t : t \in I\}$ を $\{\Lambda_t\}$ 上の同相写像の道と呼ぶことにする。

例 1.1. 同相写像 $f : X \to X$ の chain recurrent set を $CR(f)$ で表わすことにする。$\{f_t : t \in I\}$ を X の同相写像の道（イソトピー）とすると、$\{CR(f_t) : t \in I\}$ は上半連続で、$\{f_{t|CR(f_t)} : t \in I\}$ は $\{CR(f_t)\}$ 上の同相写像の道である。

Λ を X の閉集合とし、$f : \Lambda \to \Lambda$ は同相写像とする。上と同様に、$\{f_t : t \in I\}$ は上半連続族 $\{\Lambda_t : t \in I\}$ 上の同相写像の道とする。上への連続写像 $h_t : \Lambda_t \to \Lambda$ の族 $\{h_t : t \in I\}$ が f と $\{f_t\}$ の間の半共役写像の連続族であるとは、$(x,t) \mapsto h_t(x)$ は $\{(x,t) : x \in \Lambda_t, t \in I\}$ から Λ への連続写像で、すべての $t \in I$ に対して $f \circ h_t = h_t \circ f_t$ が成り立つときをいう。

補題 1.2. $f : \Lambda \to \Lambda$ は拡大的で、$h : \Lambda_0 \to \Lambda$ は $f \circ h = h \circ f_0$ をみたす上への連続写像とする。このとき f と $\{f_t\}$ の間の半共役写像の連続族 $\{h_t : t \in I\}$ で $h_0 = h$ となるものは高々一つである。

これは、次の補題から簡単に得られる。

補題 1.3. (Z, d_Z) と (W, d_W) は距離空間とし、$f : Z \to Z$ と $g : W \to W$ は同相写像とする。$h, h' : W \to Z$ は $f \circ h = h \circ g$, $f \circ h' = h' \circ g$ を満たす写像とする。このとき、f が拡大的で $e > 0$ を拡大定数とすると

$$d(h,h') = \sup\{d_Z(h(y), h'(y)) : y \in W\} \leq e$$

ならば $h = h'$ である。

証明. $h \neq h'$ とすると、

$$\begin{aligned} d(h,h') &= \sup\{d_Z(h(y), h'(y)) : y \in W\} \\ &= \sup\{d_Z(h \circ g^n(y), h' \circ g^n(y) : y \in W, n \in \mathbb{Z}\} \\ &= \sup\{d_Z(f^n \circ h(y), f^n \circ h'(y) : y \in W, n \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

であるから、$d(h,h') > e$。□

同相写像 $f : X \to X$ に対し、f と可換な連続写像の全体を $C(f)$ で表わす：$C(f) = \{h \in \mathcal{C}(X) : f \circ h = h \circ f\}$。明かに、恒等写像 id と f の任意の反復 f^n は $C(f)$ に属する。補題 1.3 から、f が拡大的ならば $C(f)$ は $\mathcal{C}(X)$ の中で離散的であることが分かる。

注意 **1.4.** 補題 1.3 は f が初期値に関する鋭敏な依存性を持つ場合においても成立する。従って、補題 1.2 と次に述べる補題 1.5 は "拡大的" を" 初期値に関する鋭敏な依存性を持つ" に置き換えて成立する。

$\{f_t : t \in I\}$ と $\{f'_t : t \in I\}$ はそれぞれ $\{\Lambda_t\}$ と $\{\Lambda'_t\}$ 上の同相写像の道であるとする。$\{f_t\}$ の逆の道は

$$\overline{\{f_t\}} = \{f_{1-t} : t \in I\}$$

で定義する。明かに、$\overline{\{f_t\}}$は $\{\Lambda_{1-t} : t \in I\}$ 上の同相写像の道である。$\Lambda_1 = \Lambda'_0$ かつ $f_1 = f'_0$ であるとき、$\{f_t\}$ と $\{f'_t\}$ の積 $\{f_t\}\cdot\{f'_t\} = \{f_t \cdot f'_t\}$ を

$$f_t \cdot f'_t = \begin{cases} f_{2t} & 0 \le t \le 1/2 \\ f'_{2t-1} & 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

により定める。

$$\Lambda_t \cdot \Lambda'_t = \begin{cases} \Lambda_{2t} & 0 \le t \le 1/2 \\ \Lambda'_{2t-1} & 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

とおくと、$\{f_t\}\cdot\{f'_t\}$ は $\{\Lambda_t \cdot \Lambda'_t\}$ 上の同相写像の道である。$\Lambda_0 = \Lambda'_0, \Lambda_1 = \Lambda'_1, f_0 = f'_0, f_1 = f'_1$ のとき、$\{f_t\}$ と $\{f'_t\}$ がホモトープであることを次の様に定義する：2^X の点の上半連続族 $\{\Lambda_{t,s} : t, s \in I\}$ と同相写像の連続族 $\{f_{t,s} : t, s \in I\}$ （即ち、$(t,s,x) \mapsto (t,s,f_{t,s}(x))$ は $\{(t,s,x) : t,s \in I, x \in \Lambda_{t,s}\}$ からそれ自身への連続写像）が存在して、すべての $t, s \in I$ に対して

$$\begin{cases} \Lambda_{t,0} = \Lambda_t, & f_{t,0} = f_t \\ \Lambda_{t,1} = \Lambda'_t, & f_{t,1} = f'_t \end{cases} \qquad \begin{cases} \Lambda_{0,s} = \Lambda_0, & f_{0,s} = f_0 \\ \Lambda_{1,s} = \Lambda_1, & f_{1,s} = f_1 \end{cases}$$

が成り立つ。 ここで、$(\{\Lambda_{t,s}\}, \{f_{t,s}\})$ を $\{f_t\}$ から $\{f'_t\}$ へのホモトピーと呼ぶ。

次は、補題 1.3 から得られる。

補題 1.5. $\{f_t\}$ と $\{f'_t\}$ はホモトープとし、$(\{\Lambda_{t,s}\}, \{f_{t,s}\})$ はそのホモトピーとする。$f : \Lambda \to \Lambda$ を同相写像とし、f と $\{f_{t,s}\}$ の間に半共役写像の連続族 $\{h_{t,s}\}$ が存在するとする。もし f が拡大的で $h_{0,s}$ が s に依存しないとすると、$h_{1,s}$ も s に依存しない。

M をコンパクト多様体とし、$\{\Lambda_t\}$ を 2^M の点の上半連続族とする。$\{f_t\}$ は $\{\Lambda_t\}$ 上の同相写像の道とする。$\Lambda_0 = \Lambda_1, f_0 = f_1$ （即ち、$\{f_t\}$ は閉道）であり、f_0 は拡大的と仮定する。

もし f_0 と $\{f_t\}$ の間に半共役写像の連続族 $\{h_t\}$ が存在するならば、補題 1.2 より対応 $h_0 \mapsto h_1$ が定まる。これを $\{f_t\}$ に沿う半共役写像のモノドロミーと呼ぶことにし、$\Phi(h_0) = h_1$ で表わす。補題 1.5 より Φ はホモトピー不変であると考えることが出来る。$h_0 = id$ （id は Λ_0 の恒等写像）とすると、$h \in C(f_0)$ に対し $\{h \circ h_t\}$ は f_0 と $\{h_t\}$ の間の半共役写像の連続族となるので、写像 $\Phi : C(f_0) \to C(f_0)$ が定まり

$$h \circ \Phi(id) = \Phi(h)$$

が成り立つ。

次を問うのは自然であると思われる。

問題 1.6. f_0 と $\{f_t\}$ の間に $h_0 = id$ となる半共役写像の連続族 $\{h_t\}$ が存在するための条件は何か？

問題 1.7. $\Phi(id)$ は同相写像か？

問題 1.8. ある $n > 0$ に対し $\Phi^n(id) = id$ となるか？

問題 1.7 は、同相写像（微分同相写像）の力学系の順序付けに関係している。

例えば、chain recurrent set 上で拡大的である M の同相写像の全体を $\mathcal{E}(M)$ で表わし、$\mathcal{E}(M)$ の元から出発する同相写像の閉道に対し問題 1.7 が肯定的であると仮定しよう。このとき、次の様に $\mathcal{E}(M)$ に順序を定義することができる：$f, g \in \mathcal{E}(M)$ とし、f から g へのイソトピー $\{f_t : t \in I\}$ と、$f_{|CR(f)}$ と $\{f_{t|CR(f_t)}\}$ との間の半共役写像の連続族 $\{h_t : t \in I\}$ で $h_0 = id$ となるものがある場合、$f \leq g$ とする。さらに $h_1 : CR(g) \to CR(f)$ が同相写像であるならば、$f \sim g$ とおく。

$\sim$ は同値関係：$f \sim f$ は明か。　$f \sim g$ とすると、定義より f から g へのあるイソトピー $\{f_t\}$ に対し、$f_{|CR(f)}$ と $\{f_{t|CR(f_t)}\}$ の間に $h_0 = id$ となる半共役写像の連続族 $\{h_t\}$ が存在する。仮定より h_1 は同相写像なので、$\{h'_t\} = \{h_1^{-1} \circ h_{1-t} : t \in I\}$ とおく。$h'_0 = id$, $h'_1 = h_1^{-1}$ で $\{h'_t\}$ は $g_{|CR(g)}$ と $\overline{\{f_{t|CR(f_t)}\}}$ の間の半共役写像の連続族である。よって $g \sim f$。$f \sim g$, $g \sim k$ とする。このとき、f から g へのあるイソトピー $\{f_t\}$ に対し、$f_{|CR(f)}$ と $\{f_{t|CR(f_t)}\}$ の間に $h_0 = id$ となる半共役写像の連続族 $\{h_t\}$ が存在し、g から k へのあるイソトピー $\{g_t\}$ に対し、$g_{|CR(f)}$ と $\{g_{t|CR(f_t)}\}$ の間に $h'_0 = id$ となる半共役写像の連続族 $\{h'_t\}$ が存在する。$\{h''_t\} = \{h_t \cdot (h_1 \circ h'_t) : t \in I\}$ とおく。ここで

$$h_t \cdot (h_1 \circ h'_t) = \begin{cases} h_{2t} & 0 \leq t \leq 1/2 \\ h_1 \circ h'_{2t-1} & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

明らかに、$h''_0 = h_0$, $h''_1 = h_1 \circ h'_1$ であり、$\{h''_t\}$ は $f_{|CR(f)}$ と $\{f_{t|CR(f_t)}\} \cdot \{g_{t|CR(g_t)}\}$ との間の半共役写像の連続族である。h_1 と h'_1 は同相写像であるから $f \sim k$。

$\leq$ は $\mathcal{E}(M)/\sim$ 上の順序：反射性と推移性が成立することは明か。反対称性を見るために、$f \leq g$, $g \leq f$ とする。このとき定義より、f から g へのあるイソトピー $\{f_t\}$ に対し、$f_{|CR(f)}$ と $\{f_{t|CR(f_t)}\}$ の間に $h_0 = id$ となる半共役写像の連続族 $\{h_t\}$ が存在し、g から f へのあるイソトピー $\{g_t\}$ に対し、$g_{|CR(f)}$ と $\{g_{t|CR(f_t)}\}$ の間に $h'_0 = id$ となる半共役写像の連続族 $\{h'_t\}$ が存在するので、上と同様に $\{h''_t\} = \{h_t \cdot (h_1 \circ h'_t) : t \in I\}$ とおく。$\{f_t\} \circ \{g_t\}$ は f から f への閉道で $h''_0 = id$ であるから、仮定より $h''_1 = h_1 \circ h'_1$ は同相写像。同様に、$h'_1 \circ h_1$ も同相写像。よって $h_1 : CR(f) \to CR(g)$ は同相写像、即ち $f \sim g$。

§2 Hyperbolic infra-nil-automorphism

N を左不変なリーマン計量 d を持つ連結かつ単連結な巾零リー群とし、N のすべての自己同型と左移動により生成される変換群を Aff(N) で表わす。Γ を N 上自由かつ固有不連続に作用する Aff(N) の部分群とすると、Γ は N の離散部分群と N の自己同型の有

限群の半直積となる。軌道空間 N/Γ がコンパクトであるとき、N/Γ を infra-nil-manifold と呼ぶ。自己同型 $\overline{A}: N \to N$ が N/Γ 上の微分同相写像 A を引き起すとき、A を infra-nil-automorphism という。$\overline{A}$ が双曲的であるとき、A は双曲的と呼ばれる。

双曲的自己同型写像 $\overline{A}: N \to N$ は次の性質を持つ：

P1 任意の $L > 0$ と $\varepsilon > 0$ に対し $J > 0$ が存在して、$|i| \leq J$ となるすべての i に対し $d(\overline{A}^i(x), \overline{A}^i(y)) \leq L$ ならば、$d(x,y) \leq \varepsilon$ である。

P2 $L > 0$ が与えられたとき、$d(\overline{A}^i(x), \overline{A}^i(y)) \leq L$ がすべての $i \in \mathbb{Z}$ に対し成立するならば、$x = y$ である。

P3 任意の $L > 0$ に対し $\delta_L > 0$ が存在し、$\overline{A}$ のすべての L-擬軌道は N のただ一つの点により δ_L-追跡される。

X を連結局所連結距離空間とする。このとき、X は弧状連結で局所弧状連結となる。X が半局所単連結であるとは、任意の $x \in X$ に対し近傍 U が存在して包含写像 $i: U \to X$ が引き起こす基本群の準同型写像 $i_*: \pi_1(U,x) \to \pi_1(X,x)$ は自明であるときをいう。この場合、X の普遍被覆空間が存在する。これと上の双曲的自己同型写像の性質を利用すると、§1 で述べた問題に関連する次の結果が得られる。

定理 2.1. $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ とし $e: \mathbb{R} \to S^1$ を射影とする。X は半局所単連結で $p: X \to S^1$ は局所自明なファイバーバンドルでファイバーは連結とする。同相写像 $f: X \to X$ は p の各ファイバーを不変にすると仮定し、$t \in \mathbb{R}$ に対し $X_{e(t)} = p^{-1}(e(t))$ とおき $f_{e(t)} = f_{|X_{e(t)}}$ とする。 $A: N/\Gamma \to N/\Gamma$ を *hyperbolic infra-nil-automorphism* とし、ある $t_0 \in \mathbb{R}$ と f, A のある不動点 $b_0 \in X_{e(t_0)}, c_0 \in N/\Gamma$ に対して、準同型写像 $\phi: \pi_1(X_{e(t_0)}, b_0) \to \pi_1(N/\Gamma, c_0)$ が存在して次の図式が可換であるとする：

$$\begin{array}{ccc}
\pi_1(X_{e(t_0)}, b_0) & \xrightarrow{f_{e(t_0)*}} & \pi_1(X_{e(t_0)}, b_0) \\
\phi \downarrow & & \downarrow \phi \\
\pi_1(N/\Gamma, c_0) & \xrightarrow[A_*]{} & \pi_1(N/\Gamma, c_0)
\end{array}$$

このとき

(1) 連続写像の連続族 $h_t : X_{e(t)} \to N/\Gamma,\ t \in \mathbb{R}$ がただ一つ存在し、$h_{t_0}(b_0) = c_0$, $h_{t_0 *} = \phi$, $A \circ h_t = h_t \circ f_{e(t)}$ （$\forall t \in \mathbb{R}$）を満たす。

(2) 同相写像 $T: N/\Gamma \to N/\Gamma$ が存在し、$T \in C(A)$、$T \circ h_t = h_{t+1}$ （$\forall t \in \mathbb{R}$）を満たし、ある $n > 0$ に対し $T^n = id$ となる。

(3) 短完全系列

$$0 \longrightarrow \pi_1(X_{e(t_0)})/\mathrm{Ker}(\phi) \longrightarrow \pi_1(X)/\mathrm{Ker}(\phi) \longrightarrow \pi_1(S^1) \longrightarrow 0$$

が直和ならば、$T = id$ となる。

上の定理は、Franks の結果 "すべての infra-nil-automorphism は π_1-微分同相写像である" の拡張である。ここで、微分同相写像 $f: M \to M$ が π_1-微分同相写像であるとは、f は不動点 $x_0 \in M$ を持ち、不動点 b_0 を持つコンパクト CW 複体の同相写像 $g: K \to K$ と連続写像 $h': K \to M$ （$h'(b_0) = x_0$）に対し、$f_* \circ h'_* = h'_* \circ g_*$ が成り立つならば、ただ一つ $h \in \mathrm{Hom}(h')$ が存在して、$h(b_0) = x_0$、$h_* = h'_*$、$f \circ h = h \circ g$ が成り立つときをいう。

定理 2.1 から次の系が得られる。

系 2.2. $A: N/\Gamma \to N/\Gamma$ を *hyperbolic infra-nil-automorphism* とし $f_t: N/\Gamma \to N/\Gamma, t \in I$ は $f_0 = A$ となるイソトピーとする。このとき、各 $h \in C(A)$ に対しホモトピー $h_t: N/\Gamma \to N/\Gamma, t \in I$ がただ一つ存在して $h_0 = h,\ A \circ h_t = h_t \circ f_t\ (\forall t \in I)$ が成り立つ。さらに、$f_0 = f_1$ ならば $h_0 = h_1$ となる。

系 2.3. $A: N/\Gamma \to N/\Gamma$ を *hyperbolic infra-nil-automorphism* とする。このとき、各 $h \in C(A)$ に対し $H_h(A) = h$ となる連続写像 $H_h: \mathrm{Iso}(A) \to \mathrm{Hom}(h)$ がただ一つ存在して、すべての $f \in \mathrm{Iso}(A)$ に対し $A \circ H_h(f) = H_h(f) \circ f$ が成り立つ。さらに、$H_h(f) = h \circ H_{id}(f)\ (\forall f \in \mathrm{Iso}(A))$ であり、連続写像 $g: N/\Gamma \to N/\Gamma$ が或る $f \in \mathrm{Iso}(A)$ に対し $A \circ g = g \circ f$ を満たすとすると、$g = H_h(f)$ となる $h \in C(A)$ が存在する。

不動点 x_0 を持つ同相写像 $f: M \to M$ に対し、x_0 を不動点のまま保つイソトピーで f と結ばれる M の同相写像の全体を $\mathrm{Iso}(f, x_0)$ で表わす。次の結果は、上の系の逆が成り立つことを示している。

定理 2.4. $f: M \to M$ は閉位相多様体の同相写像とし、不動点 x_0 を持つとする。M は $K(\pi, 1)$ 型と仮定する。もし任意の $g \in \mathrm{Iso}(f, x_0)$ に対し $h \in \mathrm{Hom}(id)$ が存在して $f \circ h = h \circ g$ が成り立つならば、f は *hyperbolic infra-nil-automorphism* と位相共役である。

π_1-微分同相写像を許容する閉多様体は $K(\pi, 1)$ 型であるから、定理 2.4 より直ちに次が得られる。

系 2.5. すべての π_1-微分同相写像は *infra-nil-automorphism* と位相共役である。