数理解析研究所講究録
第 864 巻 1994 年 56-63

片側相制約をもつ変分問題に対する Legendre 条件

九大・理　川崎　英文 (Hidefumi Kawasaki)
九大・理　古賀さゆり　(Sayuri Koga)

1 Abstract

ここでは次の片側相制約をもつ変分問題を考える。

$$(P) \quad \text{minimize} \quad J(x) = \int_0^1 f(t, x(t), \dot{x}(t))dt$$
$$\text{subject to} \quad x \in X,\ x(t) \geq s(t) \quad {}^\forall t \in [0,1],$$
$$x(0) = x_0, x(1) = x_1$$

但し、ここで空間 X は各成分が絶対連続であり、$||\dot{x}(t)||$ が本質的に有界である関数 $x : [0,1] \to R^n$ の全体で、また、X はノルムとして

$$||x|| = max_{t\in[0,1]}||x(t)|| + esssup_{t\in[0,1]}||\dot{x}(t)|| < \infty$$

をもつものとする。点 x_0, x_1 は与えられた R^n の点、関数 $s : [0,1] \to R^n$ は与えられた連続関数とする。関数 $f : R^{2n+1} \to R$ は $x, \dot{x}$ に関し 2 回微分可能な関数であると仮定する。そうして、解 $\bar{x}$ として、特に区分的連続微分可能な関数を考えることにする。この時、問題 (P) の弱極値に対する二次の最適必

要条件（Legendre 条件）を与える。

等式、不等式、集合制約など、いろいろな制約をもつ変分問題や、最適制御理論に対する二次の最適必要条件は、これまでもたくさんの文献で取り扱われてきた。不等式相制約をもつ最適制御理論に対しては、最大値原理を使う事により Legendre 条件を導くことが出来る。（Gamkrelidze [6], Dubovickii and Miljutin [5]）しかし、それはあくまで強極値に対する最適必要条件である。また、$g(t, x(t), \dot{x}(t)) \leq 0$ のように、$\dot{x}$ を含む制約をもつ問題については、弱極値に対して Legendre - Clebsch 条件が知られている。（Clebsch [2], McShane [9], [10], Dubobickii [3], Dubovickii and Miljutin [4], Makowski and Neustadt [8]）しかし、そこでは active な点において $g_{\dot{x}}(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t))$ が full rank を持つという仮定をもうけているので、問題 (P) に対しては適用することは出来ない。我々は、抽象最適化問題に対する二次の最適性必要条件（$Theorem 2.1$）を利用して、問題（P）の弱極値に対する Legendre 条件を導く。Inactive points $(x(t) > s(t))$ において、Legendre 条件が成立することは明らかであるが、active points $(^{\exists}i; x_i(t) = s_i(t))$ においても、ある条件が満たされるならば、Legendre 条件が成立する $(Theorem 3.2)$。

2 等式、不等式制約をもつ抽象問題に対する最適必要条件

$$K = \{v \in (C[0,1])^n | v_i(t) \leq 0 \ \ (i = 1, 2, \cdots, n)\}$$

K と双対空間 K^* との標準積を $< \cdot, \cdot >$, K の polar cone を

$$K^\circ = \{v^* \in K^* | < v^*, v > \leq 0, \ \ {}^\forall v \in K\}$$

で表す。また、簡単のため $\hat{f}(t) = f(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t))$, $\hat{g}(t) = g(t, \bar{x}(t))$ などと書くことにする。また、最適解 $\bar{x}$ の角点の集合を T とかくことにする。次に、

$$G(x) = -x(\cdot) + s(\cdot), \ G(x)(t) = -x(t) + s(t)$$

$$H(x) = (x(0) - x_0, x(1) - x_1)^T$$

で写像 $G : X \to (C[0,1])^n$, $H : X \to R^{2n}$ を定義することにより、問題 (P) を次の一般化された等式、不等式制約をもつ抽象最適化問題に書き直すことが出来る。

$$\begin{aligned} (P') \quad & \text{minimize} \quad J(x) \\ & \text{subject to } x \in X, \ G(x) \in K, \ H(x) = 0 \end{aligned}$$

ここで、仮定より G, H は 2 回連続 Fréchet 微分可能となる。$G(x)$ の 1 次、二次の Fréchet 微分を $G'(x), G''(x)$ と書くことにする。(P') の許容集合を

$$M := \{x \in X | G(x) \in K, \ H(x) = 0\}$$

とおく。この許容集合 M は解 $\bar{x}$ において、次の条件を満たすときに Mangasarian - Fromovitz の条件を満たすという。

(i) $H'(\bar{x})$ が全射

$$(ii)\ ^{\exists}x_0 \in X;\ \ G(\bar{x}) + G'(\bar{x})x_0 \in \mathrm{int}K,\ H'(\bar{x})x_0 = 0$$

問題 (P) に対しては、$x_0 > s(0),\ x_1 > s(1)$ ならば、Mangasarian - Fromovitz の条件が満たされる。

また、次の式を満たす方向 $y \in X$ を critical direction と呼ぶ。

$$J'(\bar{x})y = 0,\ G'(\bar{x})y \in \overline{cone}(K - G(\bar{x})),\ H'(\bar{X})y = 0$$

このように、少し動かせば許容集合に入り、J が増加・減少しない方向に対し、次の二次の最適必要条件が知られている。(A.Ben-Tal and J.Zowe[1],Kawasaki[7])

THEOREM **2.1**　$\bar{x}$ を問題 (P') の極小解とする。$\bar{x}$ で M が *Mangasarian - Fromovitz* 条件を満たすとき、$G'(\bar{x})y \in cone\ (K - G(\bar{x}))$ を満たす各 *critical direction* y に対し、次の条件を満たす $v^* \in K^\circ$ と $w^* = (l_0, l_1) \in R^{2n}$ が存在する。

$$L'(\bar{x}) = 0$$

$$L''(\bar{x})[y, y] >\geq 0,$$

$$< v^*, G(\bar{x}) >= 0,\ < v^*, G'(\bar{x})y >= 0$$

但し、$L(x) = J(x) + < v^*, G(x) > + < w^*, H(x) >$

3　(P) に対する **Legendre** 条件

$^{\forall}t \in [0, 1]$ に対し　次のような index の集合を考える。

$$I_L(t) := \{i|^{\exists}\delta > 0,\ \ x_i > s_i \text{ on } (t - \delta, t)\}$$

$$I_R(t) := \{i|^{\exists}\delta > 0,\ \ x_i > s_i \text{ on } (t, t + \delta)\}$$

Theorem 3.1　$\bar{x}$ を問題 (P) の極小解とすると

(i) $\xi^T \hat{f}_{\dot{x}\dot{x}}(t_0 - 0)\xi \geq 0 \ {}^\forall \xi \in R^n$ *satisfying* $\xi_i = 0 \ {}^\forall i \notin I_L(t_0)$

(ii) $\xi^T \hat{f}_{\dot{x}\dot{x}}(t_0 + 0)\xi \geq 0 \ {}^\forall \xi \in R^n$ *satisfying* $\xi_i = 0 \ {}^\forall i \notin I_R(t_0)$

Theorem 3.2 $\bar{x}$ を問題 (P) の極小解とする。$i \notin I_L(t_0)$ なる i に対し、${}^\exists \delta > 0$ が存在し、x_i に関する *Euler equation* が $(t_0 - \delta, t_0)((t_0, t_0 + \delta))$ 上で成立する、即ち、

$$ {}^\exists C = \hat{f}_{\dot{x}_i}(t) - \textstyle\int_0^t \hat{f}_{x_i}(t)dt \quad on \quad (t_0 - \delta, t_0)((t_0, t_0 + \delta)) $$

である *index* の集合を $E_L(t_0)(E_R(t_0))$ とおく。このとき、*Theorem 3.1* の $\xi_i = 0 \ (i \notin I_L(t_0))$ を次で置き換えることが出来る。

$$ \xi_i \geq 0 \quad for\ i \in E_L(t_0), $$
$$ \xi_i = 0 \qquad for\ i \in I_L(t_0) \backslash E_L(t_0) $$

(ii) についても同様のことがいえる。

Example 3.1

$$ minimize \quad \textstyle\int_0^1 (x(t) - \dot{x}^2(t))dt $$
$$ subject\ to \quad x(t) \geq -\tfrac{1}{4}t(t-1),\ x(0) = 1, x(1) = \tfrac{1}{2} $$

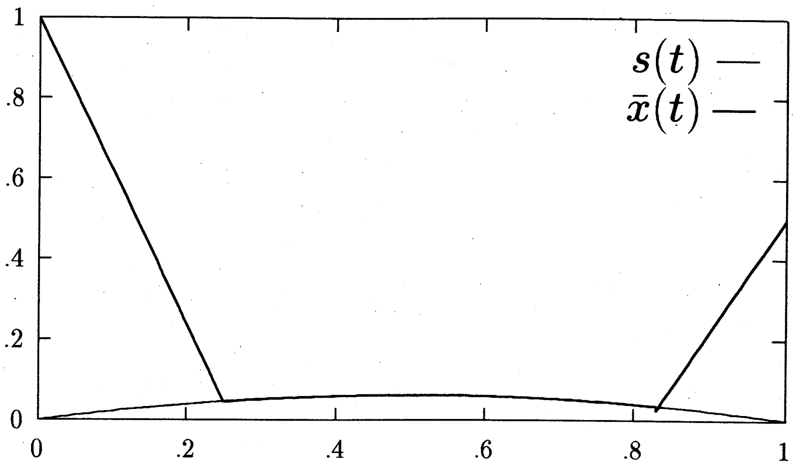
に対して、$\psi(t) = -\{\int_t^1 \hat{f}_x + \hat{f}_{\dot{x}} - C\} = t + 2\dot{x}(t) + C$ であるので、次の関数 $\bar{x}(t)$ は 1 次の最適条件は満たすが弱極小解ではない。

$$ \bar{x}(t) = \begin{cases} -\frac{1}{4}t^2 - \frac{15}{4}t + 1 & 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4}t(t-1) & \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{5}{6} \\ -\frac{1}{4}t^2 + \frac{13}{4}t - \frac{5}{2} & \frac{5}{6} \leq t \leq 1 \end{cases} $$

というのは、

$$\hat{f}_{\dot{x}\dot{x}}(\tfrac{1}{5}) < 0$$

であるので、*Theorem 3.1* により $\bar{x}$ は弱極小解ではない。



EXAMPLE **3.2**

$$minimize \ \textstyle\int_{-2}^{2}(t^2-1)\dot{x}^2(t)dt$$

$$subject\ to\ x(-2)=1, x(2)=1$$

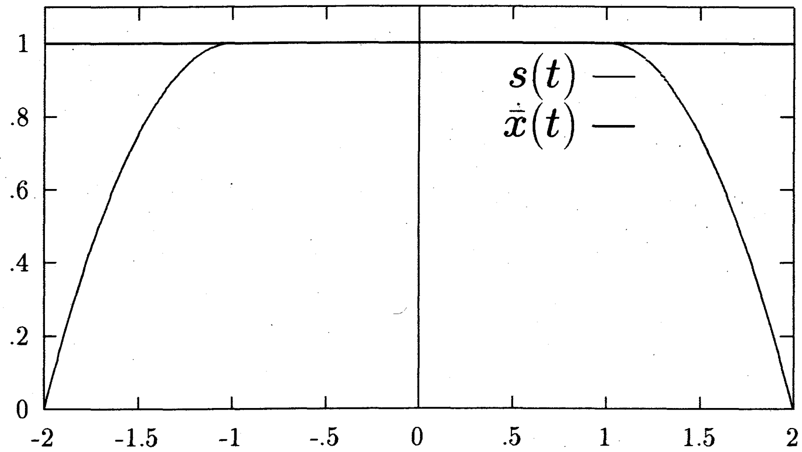
$$x(t) \geq \begin{cases} -t(t+2) & -2 \leq t \leq -1 \\ 1 & -1 \leq t \leq 1 \\ t(t-2) & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

$$\psi(t) = \{\textstyle\int_t^1 \hat{f}_x(s)ds + \hat{f}_{\dot{x}} - C\} = C$$

関数 $\bar{x}(t) = 1$ は、全区間で *Euler equation* を満たすが、しかし

$$\hat{f}_{\dot{x}\dot{x}}(0) = -2 < 0$$

よって、*Theorem 3.2* により弱極小解ではないことがわかる



参考文献

[1] A.Ben-Tal and J.Zowe, "A unified theory of first and second order conditions for extremum problems in topological vector spaces" *Math. Program. Study 19,*, (1982), 39–76.

[2] R.F.A.Clebsch, "Über die Reduction der zweiten Variation auf ihre einfachste Form", *Journal für die reine und ange wandte Mathematik*, vol.55, (1858) 254–273.

[3] A.Ja.Dubovickii, *Integral'nyĭ princip maksimam v obshcheĭ zadache optimal'nogo upravlenija.* AN USSR,dep. No. 2639-74, Moscow, (1974).

[4] A.Ja.Dubovickii and A.A.Miljutin, "Extremum problems in the presence of restrictions" *U.S.S.R. Comput. Math. and Math. Phys.5, (1965), 1–80.*

[5] A.Ja.Dubovickii and A.A.Miljutin, *Necessary conditions for a weak extremum in optimal control problems with mixed constraints of the inequality type.* U.S.S.R. Comput. Math. and Math. Phys.8, (1968), 24–98.

[6] R.V.Gamkrelidze, *Optiaml'nye processy upravlenija pri ogaranichennyh fazovyh koordinatah.* Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.34, (1960), 315–356.

[7] H. Kawasaki, "An envelope-like effect of infinitely many inequality constraints on second-order necessary conditions for minimization problems" *Math. Program. 41* , (1988), 73–96.

[8] K.Makowski and L.W.Neustadt, "Optimal control problems with mixed control-phase equality and inequality constraints" *SIAM J. Control 12*, (1974), 184–228.

[9] E.J.McShane, "On multipliers for Lagrange problems" *American Jour.of Mathematics,* vol.61, (1939), 809–819.

[10] E.J.McShane, "Necessary conditions in generalized curve problems of the calculus of variations" *Duke Math.J.,* vol.7, (1940), 1–27.