数理解析研究所講究録
第 864 巻 1994 年 190-194

An optimal stopping problem for fuzzy dynamic programming

北九州大学経済学部　吉田祐治（Yuji YOSHIDA）

Bellman and Zadeh [1] はふたつのタイプのファジィ動的計画を論じている。ここでは、その中の非確率的な場合に焦点を当てる。Bellman and Zadeh [1] では、状態空間と決定空間が有限集合の場合を扱い、最適方程式を導き、それを解いている。この場合、無限ステージで考えても再帰式は有限ステップで終わることを示している。そのモデルを最適停止問題として取り扱った論文に、Kacprzyk [3] がある。そこでは、停止時刻をファジィ化し、[1] のファジィ動的計画を論じている。さらに、さまざまなタイプのファジィ動的計画は、Esogbue and Bellman [2] で扱われている。とくに、[2, Sect.7] では、システムがある fuzzy relation に従って進行していく場合を論じている。本発表では、fuzzy relation に従って進行していくファジィ動的計画で path に沿って止める最適停止問題を無限集合の状態空間と決定空間を持つ場合に拡張した場合を述べる。

離散時間 $\mathbf{N} := \{0,1,2,3,\cdots\}$ のファジィ推移をもつファジィ動的計画を考える。状態空間 E と決定空間 U とは、有限次元ユークリッド空間の閉部分集合とする。状態空間と決定空間は時刻 $n \in \mathbf{N}$ に依存しないとする：$E_n = E$、$U_n = U$ 。さらに、$\Omega = \prod_{k=0}^{\infty}(E_k \times U_k)$ と置く。列 $\omega = (x_0, u_0, x_1, u_1, x_2, u_2, \cdots) \in \Omega$ は、決定列 $\pi = (u_0, u_1, u_2, \cdots) \in \prod_{k=0}^{\infty} U_k$ による path を表わす。

S をある距離空間としたとき、つぎの記号を使う。S 上のファジィ集合をそのメンバーシップ関数 $\tilde{s} : S \mapsto [0,1]$ で表わし、通常の集合 $A(\subset S)$ を特性関数 $1_A : S \mapsto [0,1]$ で表わす。それらの α-カットを

$$\tilde{s}_\alpha := \{x \in S \mid \tilde{s}(x) \geq \alpha\}\ (\alpha \in (0,1]) \quad \text{また} \quad \tilde{s}_0 := \mathrm{cl}\{x \in S \mid \tilde{s}(x) > 0\}$$

と置く。ただし、cl は集合の閉包を表わす。

本発表で扱う S 上のファジィ集合 $\tilde{s}$ とは、つぎの (i) と (ii) を満たすものである：

(i) $\tilde{s}_\alpha \in \mathcal{E}(S) \qquad \alpha \in [0,1];$

(ii) $\bigcap_{\alpha' < \alpha} \tilde{s}_{\alpha'} = \tilde{s}_\alpha \qquad \alpha \in (0,1],$

ただし、

$$\mathcal{E}(S) := \left\{ A \mid A = \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n,\ C_n \text{ は } S \text{ の閉部分集合 } (n = 0,1,2,\cdots) \right\}.$$

$\mathcal{F}(S)$ をそのファジィ集合 $\tilde{s}$ の全体とする。さらに、その拡張 $\mathcal{G}(S)$ をつぎのように置く：

$$\mathcal{G}(S) := \{\ S\text{上のファジィ集合 } \tilde{s} \mid \tilde{s} = \bigvee_{n \in \mathbf{N}} \tilde{s}_n \text{ を満たす } \{\tilde{s}_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subset \mathcal{F}(S) \text{ が存在する }\},$$

ただし、S 上のファジィ集合列 $\{\tilde{s}_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ について、つぎの記号を使う：

$$\bigwedge_{n\in\mathbf{N}} \tilde{s}_n(x) := \inf_{n\in\mathbf{N}} \tilde{s}_n(x) \quad x \in S; \qquad \bigvee_{n\in\mathbf{N}} \tilde{s}_n(x) := \sup_{n\in\mathbf{N}} \tilde{s}_n(x) \quad x \in S.$$

つぎに、時間に依存しないファジィ関係を $\tilde{q}_n = \tilde{q} : E_n \times U_n \times E_{n+1} \mapsto [0,1]$ $(n \in \mathbf{N})$ と置き、連続性とつぎの条件を仮定する：各 $u_n \in U_n$ について

$$\sup_{x_n\in E_n} \tilde{q}_n^{u_n}(x_n, x_{n+1}) = 1 \quad x_{n+1} \in E_{n+1} \quad \text{かつ}$$

$$\sup_{x_{n+1}\in E_{n+1}} \tilde{q}_n^{u_n}(x_n, x_{n+1}) = 1 \quad x_n \in E_n.$$

写像 X_n と Π_n を $X_n(\omega) := \omega(n)$, $\Pi_n(\omega) := \pi(n)$ $(\omega = (\omega(0), \pi(0), \omega(1), \pi(1), \omega(2), \pi(2), \cdots)$ $= (x_0, u_0, x_1, u_1, x_2, u_2, \cdots) \in \Omega, n \in \mathbf{N})$ と定義する。各 $n \in \mathbf{N}$ について σ-fields $\mathcal{M}_n$ を $X_0, \Pi_0, X_1, \Pi_1, \cdots, \Pi_{n-1}, X_n$ を可測にする Ω 上の最小な σ-field とし、σ-field $\mathcal{M}$ を $X_0, \Pi_0, X_1, \Pi_1, \cdots, \Pi_{n-1}, X_n, \cdots$ を可測にする Ω 上の最小な σ-field とする。

ここで扱うシステムは、このファジィ関係 $\tilde{q}_n$ によるつぎの Sugeno 積分 ([4]) によって推移が定まるものを考える。初期状態 $x \in E$ と $\mathcal{M}$-可測なファジィ集合 $h \in \mathcal{F}(\Omega)$ に対して、

$$E_x(h) := \oint_{\{\omega\in\Omega:\omega(0)=x\}} h(\omega)\ \mathrm{d}\tilde{P}(\omega).$$

ただし、$\tilde{P}$ はつぎの possibility measure :

$$\tilde{P}(\Lambda) := \sup_{\omega\in\Lambda} \bigwedge_{n\in\mathbf{N}} \tilde{q}^{\Pi_n(\omega)}(X_n\omega, X_{n+1}\omega) \qquad \Lambda \in \mathcal{M}.$$

つぎにファジィ状態の停止時刻を考える。

$$\mathcal{E} := \{A \mid A \in \mathcal{E}(E) \text{ かつ } E \setminus A \in \mathcal{E}(E)\}$$

と置く。ここで、写像 $\tau : \Omega \mapsto \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$ が $\mathcal{E}$-停止時刻であるとは、

$$\{\tau = n\} \in \mathcal{M}_n \cap \mathcal{E}(\Omega) \qquad n \in \mathbf{N}$$

を満たすこととする。たとえば、ある $n_0 \in \mathbf{N}$ の一定時刻 $\tau = n_0$ は $\mathcal{E}$-停止時刻である。また、ある集合 $A \in \mathcal{E}$ の the first entry time τ_A と the first hitting time σ_A :

$$\tau_A(\omega) := \inf\{n \in \mathbf{N} \mid X_n(\omega) \in A\} \quad \omega \in \Omega;$$

$$\sigma_A(\omega) := \inf\{n \in \mathbf{N} \mid n \geq 1, X_n(\omega) \in A\} \quad \omega \in \Omega,$$

は $\mathcal{E}$-停止時刻になる。ただし、$\{--\}$ が空集合の場合は $+\infty$ とする。

作用素 $P : \mathcal{G}(E) \mapsto \mathcal{G}(E)$ を

$$P\tilde{s}(x) := E_x(\tilde{s}(X_1)) = \sup_{(u,y)\in U\times E} \{\tilde{q}^u(x,y) \wedge \tilde{s}(y)\} \quad (x \in E) \qquad \tilde{s} \in \mathcal{G}(E)$$

と定義する。ただし、演算 $\wedge$ と $\vee$ は $a\wedge b := \min\{a,b\}$, $a\vee b := \max\{a,b\}$ $(a,b\in[0,1])$. この P を状態 x から ファジィ状態 $\tilde{s}$ への fuzzy transition と呼ぶ。つぎに、各 $n\in\mathbf{N}$ について n-ステップの fuzzy transition $P_n : \mathcal{G}(E)\mapsto\mathcal{G}(E)$ を

$$P_n\tilde{s} := E.(\tilde{s}(X_n)) = \sup_{((u_0,u_1,u_2,\cdots,u_{n-1}),y)\in U_0\times U_1\times U_2\times\cdots\times U_{n-1}\times E_n}\{\tilde{q}_n^{(u_0,u_1,u_2,\cdots,u_{n-1})}(\cdot,y)\wedge\tilde{s}(y)\}\quad \tilde{s}\in\mathcal{G}(E)$$

と定義する。ただし、

$$\tilde{q}_1^{u_0}(x,y) := \tilde{q}^{u_0}(x,y)\quad x,y\in E;$$

$$\tilde{q}_{n+1}^{(u_0,u_1,u_2,\cdots,u_n)}(x,y) := \sup_{z\in E}\{\tilde{q}_n^{(u_0,u_1,u_2,\cdots,u_{n-1})}(x,z)\wedge\tilde{q}^{u_n}(z,y)\}\quad x,y\in E,\ n\in\mathbf{N}.$$

さらに、$\mathcal{E}$-停止時刻 τ に対して fuzzy transition $P_\tau : \mathcal{G}(E)\mapsto\mathcal{G}(E)$ を

$$P_\tau\tilde{s} := E.(\tilde{s}(X_\tau))\quad \tilde{s}\in\mathcal{G}(E)$$

と定義する。ただし、$X_\tau := X_n$ on $\{\tau=n\}$, $n\in\mathbf{N}\cup\{+\infty\}$、$\tilde{s}(X_{+\infty})=0$.

本発表では、つぎのファジィ最適化問題を考える。

> fuzzy goal $\tilde{s}\in\mathcal{F}(E)$ と状態に関する fuzzy constraint $\tilde{c}\in\mathcal{F}(E)$ と決定に関する fuzzy constraint $\tilde{\mu}\in\mathcal{F}(U)$ が与えられ、それらは連続であるとする。このとき、問題は各初期状態 $x\in E$ に対して fuzzy relation $\tilde{q}_n$ によるファジィ期待値
>
> $$E_x\left(\bigwedge_{n=0}^{\tau-1}(\tilde{c}(x_n)\wedge\tilde{\mu}(u_n))\wedge\tilde{s}(x_\tau)\right)\quad x\in E$$
>
> を最大にする決定列 $\pi=(u_0,u_1,u_2,\cdots)$ と path $\omega=(x_0,u_0,x_1,u_1,x_2,u_2,\cdots)\in\Omega$ と有限な $\mathcal{E}$-停止時刻 $\tau(\omega)$ を求める。

ここで、最適値を

$$\tilde{v}(x) := \sup_{\tau:\ \mathcal{E}-停止時刻} E_x\left(\bigwedge_{n=0}^{\tau-1}(\tilde{c}(x_n)\wedge\tilde{\mu}(u_n))\wedge\tilde{s}(x_\tau)\right)\quad x\in E.$$

$\mathcal{G}(E)$ 上の作用素 Q を $Q\tilde{r} := \tilde{c}\wedge P\tilde{r}$ $(\tilde{r}\in\mathcal{G}(E))$. さらに、 $Q_0 := I$ (恒等写像) また $Q_{n+1} := QQ_n$ $(n\in\mathbf{N})$ とする。ここで、ファジィ集合に superharmonic な性質を導入する。

定義. ファジィ集合 $\tilde{s}\in\mathcal{G}(E)$ が Q-superharmonic であるとは、

$$\tilde{s}(x)\geq Q\tilde{s}(x)\quad \forall x\in E$$

を満たすときを言う。

$\mathcal{E}$-停止時刻 τ に対して、

$$Q_\tau\tilde{s}(x) := E_x\left(\bigwedge_{k=0}^{\tau-1}(\tilde{c}(X_k)\wedge\tilde{\mu}(\Pi_k))\wedge\tilde{s}(X_\tau)\right)\quad x\in E$$

と置く。

定理 1. 最適値 $\tilde{v}(\in \mathcal{G}(E))$ はつぎの (1) (2) を満たすファジィ集合の中で最小のものである：

(1) $\tilde{v}' \geq \tilde{s}$;

(2) $\tilde{v}' \geq Q\tilde{v}'$ (Q-superharmonic)

さらに、つぎの式を満たす：

$$\tilde{v} = \tilde{s} \vee Q\tilde{v}.$$

補助定理 1.

$$\lim_{n\to\infty} Q_n\tilde{v} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, Q_n\tilde{s}.$$

が成立する。

補助定理 2.

$$\tau_0 := \inf\{n \in \mathbf{N} \mid \tilde{v}(X_n) = \tilde{s}(X_n)\}$$

は、$\mathcal{E}$-停止時刻になる。

定理 2. 初期値 $x \in E$ に対して、条件 (A)：

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, Q_n\tilde{s}(x) \leq \tilde{s}(x)$$

のもとで、τ_0 は有限な $\mathcal{E}$-停止時刻である。実際、τ_0 はつぎの意味で最適な path 上で有界になる：x のみに依存する有限の $n_0(= n_0(x)) \in \mathbf{N}$ が存在して、

$$\tilde{v}(x) = Q_{\tau_0}\tilde{s}(x) = Q_{\tau_0 \wedge n}\tilde{s}(x) \quad n \geq n_0.$$

が成り立つ。

定理 3. 初期値 $x \in E$ に対して、条件 (A)：

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, Q_n\tilde{s}(x) \leq \tilde{s}(x)$$

が成り立ち、さらに E, U が有界の場合は、

$$\tilde{v}(x_n) = \tilde{s}(x_n) \vee \sup_{(u_n, x_{n+1}) \in U_n \times E_{n+1}} \{\tilde{c}(x_n) \wedge \tilde{\mu}(u_n) \wedge \tilde{v}(x_{n+1}) \wedge \tilde{q}^{u_n}(x_n, x_{n+1})\} \quad n < n_0;$$

$$\tilde{v}(x_n) = \tilde{s}(x_{n_0}) \quad n \geq n_0$$

を後ろ向きに解いて、最適 path $\omega^* = (x, u_0^*, x_1^*, u_1^*, x_2^*, u_2^*, \cdots, x_{n_0}^*)$ と最適決定列 $\pi^* = (u_0^*, u_1^*, u_2^*, \cdots, u_{n_0}^*)$ を得ることができる。さらに

$$\tau_0(\omega^*)\ (\leq n_0)$$

が最初の最適停止時刻になる。

参考文献

[1] R.E.Bellman and L.A.Zadeh, Decision-making in a fuzzy environment, *Management Sci. Ser B.* **17** (1970) 141-164.

[2] A.O.Esogbue and R.E.Bellman, Fuzzy dynamic programming and its extensions, *TIMS / Studies in Management Sci.* **20** (North-Holland, Amsterdam, 1984) 147-167.

[3] J.Kacprzyk, Decision making in a fuzzy environment with fuzzy termination time, *Fuzzy Sets and Systems* **1** (1978) 169-179.

[4] M.Sugeno, Fuzzy measures and fuzzy integral : a survey in M.M.Gupta, G.N.Saridis and B.R.Gaines, Eds., *Fuzzy Automata and Decision Processes* (North-Holland, Amsterdam, 1977) 89-102.

[5] M.Kurano, M.Yasuda, J.Nakagami and Y.Yoshida, A limit theorem in some dynamic fuzzy systems, *Fuzzy Sets and Systems* **51** (1992) 83-88.

[6] Y.Yoshida, M.Yasuda, J.Nakagami and M.Kurano, A potential of fuzzy relations with a linear structure: The contractive case, to appear in *Fuzzy Sets and Systems.*