数理解析研究所講究録
第 866 巻 1994 年 6-13

周期系における Bloch 波の包絡ソリトン

飯塚　剛 (Takeshi Iizuka)* 東大理

1 はじめに

1 次元の波動系において、単色波の非線形分散効果による変調が、非線形シュレディンガー方程式で記述されることはよく知られている。このことは、光ファイバー、非線形格子、流体、プラズマといった非線形分散系のかなり広い範囲で成立し、ソリトン現象の普遍性の傍証となっている。

本稿の目的はこのソリトン普遍性を、1 次元の非線形周期系に拡張することである。周期系の場合一般に、線形化された方程式の解は単色波の代わりに Bloch 波（後述）となるので、搬送波として単色波でなく Bloch 波を採用する。最終的には、包絡波が均一系の場合と同様にＮＬＳ方程式従うことを、ある力学モデルを使って証明するわけだが [1]、この事実は多くの周期系で成立すると考えられる。この結果は、搬送波が Bloch 波、という意味でソリトンの新しい概念を示唆している。

周期系におけるこの種の解析は既に, 非線形 diatonic 格子系で Pnevmatikos 達 [2] や Campa 達 [3] によって行われている。　彼らは逓減摂動法を用いて、optical mode あるいは acoustic mode のゆっくりとした変調が、ＮＬＳ方程式に従うことを示し、さらに数値計算によって、ソリトン解から予想される孤立波が進行することもわかった。一方、同じ系で連続極限をとった場合、KdV 方程式が導かれることも知られている [4]。これらの結果は、周期系におけるソリトン現象の普遍性を暗示すると考えられるが、解析法はいずれも非線形 diatonic 格子系でのみに適用されたが、一般の周期系、特に連続系についてはまったく歯が立たないようだ。

本稿のねらいの 1 つは、多くの非線形周期系に適用できる形の逓減摂動法を構築することである。§2では周期線形系の波動の一般論を考えるが、この解析は非線形性が入った場合の逓減摂動法の導入に非常に役に立つ。次に具体的なモデルとして、周期的非線形 Klein-Gordon 方程式 (3.2) を§3で取り上げる。特に $m(x)$ が対称的 (4.1) なら、実係数の非線形シュレディンガー方程式が Bloch 波の包絡振幅方程式として導かれる (§4)。ここで導入した拡張された逓減摂動法は、周期非線形格子にも適用できる [5]。

*1994 年 4 月より愛媛大理

2 周期線形系における Bloch 波の変調

この節では、周期系の 1 次元線形波動$\Psi(x,t)$ を一般的に考えたい。ここで x、t はそれぞれ空間、時間座標とする。まず次の関係式を満たす特解$\Psi = Y(x,\omega)\exp(-i\omega t)$, の存在を仮定しよう。

$$Y(x+L,\omega) = \mathrm{e}^{ikL}Y(x,\omega) \tag{2.1}$$

ただし、実定数ω、k、L はそれぞれ、角振動数、波数、系の周期を示している。また角振動数と波数は、ある分散関係式$\omega=\omega(k)$ を満たしている。量子力学において、周期ポテンシャル中の Bloch 波動関数は同様の関係式で定義されるので、この特解$\Psi = Y(x,\omega)\exp(-i\omega t)$ を今後 Bloch 波と呼ぶ。ところで系は線形なので、$Y(x,k)$ を決める方程式に含まれる定数が全て実数と仮定すると $Y^*(x,k)$ も解であり、これは (2.1) より明らかに $Y(x,-k)$ に相当する。したがって$\omega(-k) = -\omega(k)$ も成立する。ここで挙げた一連の事実は、周期格子や底が周期的に変わる線形水面波等の系で満たされている。さらにこれは、均一極限で単調波を解に持つような全ての系でも成立すると考えて良いだろう。分散関係は、一般にバンド構造を示すことも注意しておく。

さて、ここで考えているのは線形系であるので一般解$\Psi(x,t)$ は、次のように Bloch 波の重ね合わせとして積分表現ができる。

$$\Psi(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\omega)Y(x,\omega)\mathrm{e}^{-i\omega t}\mathrm{d}\omega = 2\int_0^{\infty} \rho(\omega)\mathrm{Re}\Big(Y(x,\omega)\mathrm{e}^{-i\omega t}\Big)\mathrm{d}\omega \tag{2.2}$$

スペクトル関数$\rho(\omega)$ は実数と仮定でき、また$\Psi(x,t)$ は本来物理的には実数であるので、$\rho(\omega)$ は偶関数である。

以後、我々は重要な仮定を 1 つ課す。つまりスペクトル$\rho(\omega)$ は、ある 1 つのバンドの $\omega=\pm\omega_0$ の周りのごく狭い領域$\sim O(\varepsilon)$ にのみに分布しているとする。この仮定を基に積分 (2.2) を変形するわけだが、そのためにΩ, $\tilde{\rho}$を

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon\Omega, \tag{2.3a}$$

$$\rho(\omega) = \varepsilon^{-1}\tilde{\rho}(\Omega) \qquad (\text{for} \quad \omega > 0) \tag{2.3b}$$

で導入する。すると

$$\Psi(x,t) = 2\int \tilde{\rho}(\Omega)\mathrm{Re}\Big(Y(x,\omega_0+\varepsilon\Omega)\mathrm{e}^{-i(\omega_0+\varepsilon\Omega)t}\Big)\mathrm{d}\Omega \tag{2.4}$$

を得るが、ここでの積分は実質的に$\Omega=0$の周りの長さ ($\sim O(1)$) の領域で行う。以降ω_0をωと書き直して、(2.4) のεに関する摂動展開を行う。その前に $Y(x,\omega)$ を $(Y(x,\omega)\exp(-ikx))\cdot\exp(+ikx)$ という具合に分解して、次の Taylor 展開を考える。

$$\begin{aligned}
Y(x,\omega+\varepsilon\Omega) =& \left\{Y(x,\omega)\mathrm{e}^{-ikx} + \varepsilon\Omega\frac{\partial}{\partial\omega}\Big(Y(x,\omega)\mathrm{e}^{-ikx}\Big) + \frac{\varepsilon^2\Omega^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial\omega^2}\Big(Y(x,\omega)\mathrm{e}^{-ikx}\Big)\right\} \\
&\times \exp i\left\{kx + \varepsilon\Omega\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}x + \frac{\varepsilon^2\Omega^2}{2}\frac{\mathrm{d}^2k}{\mathrm{d}\omega^2}x\right\} + O(\varepsilon^3) \\
=& \Big(Y(x,\omega) + \varepsilon\Omega V(x,\omega) + \varepsilon^2\Omega^2 W(x,\omega)\Big)\exp i\left\{\varepsilon\Omega\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}x + \frac{\varepsilon^2\Omega^2}{2}\frac{\mathrm{d}^2k}{\mathrm{d}\omega^2}x\right\} \\
&+O(\varepsilon^3)
\end{aligned} \tag{2.5}$$

ここで $V(x,\omega)$、$W(x,\omega)$ は次のように定義した。

$$V(x,\omega) = \mathrm{e}^{ikx}\frac{\partial}{\partial\omega}\Big(Y(x,\omega)\mathrm{e}^{-ikx}\Big), \tag{2.6a}$$

$$W(x,\omega) = \mathrm{e}^{ikx}\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\omega^2}\Big(Y(x,\omega)\mathrm{e}^{-ikx}\Big) \tag{2.6b}$$

明らかに $V(x,\omega)$ と $W(x,\omega)$ は、Bloch 解 $Y(x,\omega)$ と同様の性質 (2.1) を満たしている。

$$V(x+L,\omega) = \mathrm{e}^{ikL}V(x,\omega), \tag{2.7a}$$

$$W(x+L,\omega) = \mathrm{e}^{ikL}W(x,\omega) \tag{2.7b}$$

展開 (2.5) を (2.4) に代入すると

$$\begin{aligned}\Psi(x,t) =& Y(x,\omega)\mathrm{e}^{-i\omega t}\Psi_+^{(1)} + Y^*(x,\omega)\mathrm{e}^{+i\omega t}\Psi_-^{(1)}\\ &+\varepsilon V(x,\omega)\mathrm{e}^{-i\omega t}\Psi_+^{(2)} + \varepsilon V^*(x,\omega)\mathrm{e}^{+i\omega t}\Psi_-^{(2)}\\ &+\varepsilon^2 W(x,\omega)\mathrm{e}^{-i\omega t}\Psi_+^{(3)} + \varepsilon^2 W^*(x,\omega)\mathrm{e}^{+i\omega t}\Psi_-^{(3)} + O(\varepsilon^3)\end{aligned} \tag{2.8}$$

を得る。但し $\Psi_\pm^{(j)}(j=1,2,3)$ の定義は

$$\Psi_\pm^{(j)} = \int \mathrm{d}\Omega\tilde{\rho}(\Omega)\Omega^{j-1}\exp(\pm i)\Big\{\Omega\varepsilon(\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}x - t) + \Omega^2\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\mathrm{d}^2k}{\mathrm{d}\omega^2}x\Big\} \tag{2.9}$$

である。ここで注目すべきことは $\Psi_\pm^{(j)}(x,t)$ は、x と t のゆっくりと変化する関数で、さらに $O(\varepsilon)$ を無視すると $\Psi_+^{(1)}$ と $\Psi_-^{(1)}$ はそれぞれ、Bloch 関数 $Y(x,\omega)\exp(-i\omega t)$ と $Y^*(x,\omega)\cdot\exp(+i\omega t)$ の包絡波となっていることである。

次に $\Psi_\pm^{(j)}(x,t)$ のゆっくりとした変化を表す、変数 ξ、τ を導入する。

$$\xi = \varepsilon(\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}x - t), \tag{2.10a}$$

$$\tau = \frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\mathrm{d}^2k}{\mathrm{d}\omega^2}x \tag{2.10b}$$

すると (2.9) は

$$\Psi_\pm^{(j)}(\xi,\tau) = \int \mathrm{d}\Omega\tilde{\rho}(\Omega)\Omega^{j-1}\exp(\pm i)\Big\{\Omega\xi + \Omega^2\tau\Big\} \tag{2.11}$$

と書き直すことができる。明らかに包絡波 $\Psi_\pm^{(1)}(\xi,\tau)$ に対して、次の自由シュレシンガー方程式が成立する。

$$i\frac{\partial\Psi_\pm^{(1)}}{\partial\tau} = \pm\frac{\partial^2\Psi_\pm^{(1)}}{\partial\xi^2} \tag{2.12}$$

さらに、展開 (2.8) は $\Psi_\pm^{(1)}(\xi,\tau)$ 使って、次のように書ける。

$$\begin{aligned}\Psi(x,t) =& Y(x,\omega)\mathrm{e}^{-i\omega t}\Psi_+^{(1)}(\xi,\tau) + Y^*(x,\omega)\mathrm{e}^{+i\omega t}\Psi_-^{(1)}(\xi,\tau)\\ &+\varepsilon V(x,\omega)\mathrm{e}^{-i\omega t}(-i)\frac{\partial\Psi_+^{(1)}(\xi,\tau)}{\partial\xi} + \varepsilon V^*(x,\omega)\mathrm{e}^{+i\omega t}i\frac{\partial\Psi_-^{(1)}(\xi,\tau)}{\partial\xi}\\ &+\varepsilon^2 W(x,\omega)\mathrm{e}^{-i\omega t}(-1)\frac{\partial^2\Psi_+^{(1)}(\xi,\tau)}{\partial\xi^2} + \varepsilon^2 W^*(x,\omega)\mathrm{e}^{+i\omega t}(-1)\frac{\partial^2\Psi_-^{(1)}(\xi,\tau)}{\partial\xi^2}\\ &+O(\varepsilon^3)\end{aligned} \tag{2.13}$$

さて、ここでもう1つ注意すべき重要なことがある。それは $O(\varepsilon^2)$ までのオーダーに関する限り、この展開と条件 (2.7) は次のゲージ変換で不変、ということである。

$$\tau \rightarrow \tau + \varepsilon^2 \chi(x,\omega), \tag{2.14a}$$

$$W(x,\omega) \rightarrow W(x,\omega) - i\chi(x,\omega)Y(x,\omega), \tag{2.14b}$$

$$W^*(x,\omega) \rightarrow W^*(x,\omega) + i\chi(x,\omega)Y^*(x,\omega) \tag{2.14c}$$

但し補助関数$\chi(x,\omega)$ は次の周期条件を満たす限り任意に取れる。(複素数もOK)

$$\chi(x+L,\omega) = \chi(x,\omega) \tag{2.15}$$

摂動展開 (2.13) とゲージ変換 (2.14) は、次節で扱う非線形周期系の逓減摂動法にそのまま応用できる。そこでみる通り、分散効果と非線形効果のバランスを考えるとゲージが固定される、つまり関数$\chi(x,\omega)$ が決まってしまう。

3 非線形シュレディンガー方程式

ここでは、1次元周期系の非線形波動を考えるが、次の2つの仮定を課する。

1) 振幅は小さいが無視できるほどではない。

2) 波動は、Bloch 波の非線形分散性による、時間空間的にゆっくりとした変調である。また Bloch 波の波数 $l_B \equiv 1/k$ は系の周期 L と同じオーダーである。

2) から、包絡波の特長的波長を l_Eとすると次の関係がわかる。

$$L \sim l_B = k^{-1} \ll l_E \tag{3.1}$$

この節では、包絡波に対する非線形方程式を導こうと思うが、そのために前節で導いた摂動展開を積極的に用いる。モデルとして次の非線形 Klein-Gordon 方程式を、出発点としよう。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + m(x)u + \kappa u^3 = 0 \tag{3.2a}$$

$$m(x+L) = m(x) \tag{3.2b}$$

これを線形化して $u = Y(x,\omega)\mathrm{e}^{-i\omega t}$ を代入すると、

$$-\omega^2 Y - \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + m(x)Y = 0 \tag{3.3}$$

これは周期ポテンシャル $m(x)$ 中の, 定常シュレディンガー方程式である。従って固体物理学の教える通り、Yは (2.1) を満たす解を持ち、分散関係$\omega = \omega(k)$ はバンド構造を示す。

$u(x,t)$ の振幅の小ささを $(\sim O(\varepsilon))$ として、(2.13) とほとんど同じ展開を $u(x,t)$ にも行う。

$$
\begin{aligned}
u(x,t) =& \varepsilon Y(x,\omega)\mathrm{e}^{-i\omega t}U(\xi,\tau) + \varepsilon Y^*(x,\omega)\mathrm{e}^{+i\omega t}\overline{U}(\xi,\tau) \\
&+\varepsilon^2 V(x,\omega)\mathrm{e}^{-i\omega t}(-i)\frac{\partial U(\xi,\tau)}{\partial \xi} + \varepsilon^2 V^*(x,\omega)\mathrm{e}^{+i\omega t} i\frac{\partial \overline{U}(\xi,\tau)}{\partial \xi} \\
&+\varepsilon^3 W(x,\omega)\mathrm{e}^{-i\omega t}(-1)\frac{\partial^2 U(\xi,\tau)}{\partial \xi^2} + \varepsilon^3 \overline{W}(x,\omega)\mathrm{e}^{+i\omega t}(-1)\frac{\partial^2 \overline{U}(\xi,\tau)}{\partial \xi^2} \\
&+\varepsilon^3 X(x,\omega)\mathrm{e}^{-3i\omega t}\Big(U(\xi,\tau)\Big)^3 + \varepsilon^3 X^*(x,\omega)\mathrm{e}^{+3i\omega t}\Big(\overline{U}(\xi,\tau)\Big)^3 \\
&+O(\varepsilon^4)
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

もちろん $Y(x,\omega)\exp(-i\omega t)$ は Bloch 波である。4 行目は非線形の補正項を示すが、$X(x,\omega)$ は後で決定される。(2.10) と (2.6) とゲージ変換 (2.14) より、ξ、τ、$V(x,\omega)$、$W(x,\omega)$、$\overline{W}(x,\omega)$ を次のように定義した。

$$\xi = \varepsilon(\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}x - t), \tag{3.5a}$$

$$\tau = \varepsilon^2(\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2 k}{\mathrm{d}\omega^2}x + \chi(x,\omega)). \tag{3.5b}$$

$$V(x,\omega) = \mathrm{e}^{ikx}\frac{\partial}{\partial \omega}\Big(Y(x,\omega)\mathrm{e}^{-ikx}\Big), \tag{3.5c}$$

$$W(x,\omega) = \mathrm{e}^{+ikx}\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial \omega^2}\Big(Y(x,\omega)\mathrm{e}^{-ikx}\Big) - i\chi(x,\omega)Y(x,\omega), \tag{3.5d}$$

$$\overline{W}(x,\omega) = \mathrm{e}^{-ikx}\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial \omega^2}\Big(Y^*(x,\omega)\mathrm{e}^{+ikx}\Big) + i\chi(x,\omega)Y^*(x,\omega) \tag{3.5e}$$

補助関数 $\chi(x,\omega)$ は決まっていないが、前述の通り (2.15) を満たす。従属関数 $U(\xi,\tau)$ は未知で、$\overline{U}(\xi,\tau)$ は次式で与えられる。

$$\overline{U}(\xi,\tau) = \Big(U(\xi,\tau^*)\Big)^* \tag{3.6}$$

展開 (3.4) からわかるように、$O(\varepsilon)$ の範囲では $U(\xi,\tau)$、$\overline{U}(\xi,\tau)$ は各々、Bloch 波 $Y(x,\omega)$ $\exp(-i\omega t)$、$Y^*(x,\omega)\exp(+i\omega t)$ の包絡波である。ここで (3.4) を非線形 Klein-Gordon 方程式 (3.2a) へ代入して $\varepsilon^n\exp(-il\omega t)$ $(n=1,2,3,\cdots,\ l=0,\pm1,\pm2,\cdots)$. の各係数を比較する。

$n=1, l=\pm1$ と $n=2, l=\pm1$ においては、それぞれシュレディンガー方程式 (3.3) とその ω 微分が導かれる。$X(x,\omega)$ を決める方程式は $n=3, l=\pm3$ で得られる。

$$-9\omega^2 X(x,\omega) - \frac{\partial^2 X(x,\omega)}{\partial x^2} + m(x)X(x,\omega) + \kappa Y^3(x,\omega) = 0 \tag{3.7}$$

さらに $n=3, l=1$ では

$$iP(x,\omega)\Big(i\frac{\partial U}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}\Big) + 3\kappa|Y(x,\omega)|^2 Y(x,\omega)U^2\overline{U} = 0, \tag{3.8}$$

$$P(x,\omega) = \frac{1}{Y(x,\omega)}\frac{\partial}{\partial x}\Big\{Y^2(x,\omega)\Big(\frac{\partial \chi(x,\omega)}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2 k}{\mathrm{d}\omega^2}\Big)\Big\} \tag{3.9}$$

を得るが、(3.8) の中の x は次のようなゲージ固定条件を課せば取り除ける。

$$bP(x,\omega) = -3i\kappa|Y(x,\omega)|^2 Y(x,\omega) \tag{3.10}$$

但し b は定数である。$\chi(x,\omega)$ の周期性 (2.15) により，この式から b と$\chi(x,\omega)$ が決定される。

$$b = -3\left(L\frac{\mathrm{d}^2k}{\mathrm{d}\omega^2}\right)^{-1}\frac{\kappa \mathrm{e}^{-ikL}}{\sin kL}\int_{d'}^{L+d'}\mathrm{d}x' Y^{-2}(x')\int_{x'}^{x'+L}\mathrm{d}x''|Y(x'')|^2Y^2(x'') \tag{3.11}$$

$$\chi(x,\omega) = -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2k}{\mathrm{d}\omega^2}x - \frac{3\kappa \mathrm{e}^{-ikL}}{2b\sin kL}\int_0^x \mathrm{d}x' Y^{-2}(x')\int_{x'}^{x'+L}\mathrm{d}x''|Y(x'')|^2Y^2(x'') \tag{3.12}$$

ここで d' は、b の値に影響を与えない実定数である。また一般性を失わず、$\chi(0,\omega)=0$ とした。この時点で τ、$W(x,\omega)$、$\overline{W}(x,\omega)$ の具体型がそれぞれ (3.5b)、(3.5d)、(3.5e) から定まった。結局 (3.8) は、次の非線形シュレディンガー方程式に帰着される。

$$i\frac{\partial U}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + bU^2\overline{U} = 0 \tag{3.13}$$

4 周期系におけるソリトン

非線形シュレディンガー方程式の定数 b は (3.11) で与えられるが、これが実数であるか否かはわからない。しかし、$m(x)$ が次式のように $x=d$ に関して対称的ならば、b が実数であることが示せる。

$$m(-x+d) = m(x+d) \quad (0 \le d \le L) \tag{4.1}$$

この時、もし $Y(x,\omega)$ が (3.3) の解ならば、$\tilde{Y}(x,\omega) \equiv Y(-x+2d,\omega)$ もまた解である。よって (2.1) より

$$\tilde{Y}(x+L,\omega) = Y(-x+2d-L,\omega) = \mathrm{e}^{-ikL}Y(-x+2d,\omega) = \mathrm{e}^{i(-k)L}\tilde{Y}(x,\omega) \tag{4.2}$$

であり、これはまた次のように書ける。

$$Y(-x+2d,\omega) = Y(x,-\omega) = Y^*(x,\omega) \tag{4.3}$$

この式を使って $d'=d$ とおき、(3.11) の複素共役を取ると

$$\begin{aligned} b^* &= -3\left(L\frac{\mathrm{d}^2k}{\mathrm{d}\omega^2}\right)^{-1}\frac{\kappa \mathrm{e}^{+ikL}}{\sin kL}\int_d^{L+d}\mathrm{d}x' Y^{-2}(-x'+2d)\int_{x'}^{x'+L}\mathrm{d}x''|Y(x'')|^2Y^2(-x''+2d). \\ &= -3\left(L\frac{\mathrm{d}^2k}{\mathrm{d}\omega^2}\right)^{-1}\frac{\kappa \mathrm{e}^{-ikL}}{\sin kL}\int_d^{L+d}\mathrm{d}\tilde{x} Y^{-2}(\tilde{x})\int_{\tilde{x}}^{\tilde{x}+L}\mathrm{d}\bar{x}|Y(\bar{x})|^2Y^2(\bar{x}) \\ &= b \end{aligned} \tag{4.4}$$

但し

$$\bar{x} = -x'' + 2d + 2L \tag{4.5a}$$

$$\tilde{x} = -x' + 2d + L \tag{4.5b}$$

故に b が実数であることが証明された。この時、(3.13) がソリトン解を持つことは、周知の事実である。たとえ $\tau=\tau(x)$ が複素数値を取り得ても、$U(\xi,\tau)$ をτ の複素面に解析接続すれば良い。

$$U=\sqrt{\frac{-2}{b}}A\,\mathrm{sech}\Big(A\xi(x,t)+2BA\tau(x)\Big)\exp\Big\{iA\xi(x,t)-i(A^2-B^2)\tau(x)\Big\} \tag{4.6}$$

ここで A,Bは実定数であり、$b<0$ と仮定した。結局ソリトンが、Bloch 波の包絡波として、導くことができた。さらに$\partial U/\partial\xi$ と$\partial^2U/\partial\xi^2$ は、x 空間で孤立波であるので、(3.4) で与えられる $u(x,t)$ も孤立波である。$b>0$ の場合は、同様にして Dark ソリトンが現れる。

非線形シュレディンガー方程式の初期値問題が、解析的に求まることも知られている。この数学的結果は、我々の場合の対しても以下のように応用することができる。

1) まず始めに $x=0$ における包絡波の解析的表式 $U(-\infty<t<+\infty)$、を与える。これは物理的には、原点にある決まった外力を加えることに相当する。従って (3.5a) と (3.5b) に注意して

$$U(x=0,t)=U(\xi=-\varepsilon t,\tau=0) \tag{4.7}$$

よって $U(\xi,0)$ が決まった。

2) 次に、非線形シュレディンガー方程式に対する逆散乱法を用いて、$U(\xi,0)$ から $U(\xi,\tau\in\Re)$ を解析的に構成する。さらに、$U(\xi,\tau)$ をτの複素平面に解析接続して、$U(x,t)$ の表式を得る。

3) $\partial U/\partial\xi$、 $\partial^2U/\partial\xi^2$、$\overline{U}$、$\partial\overline{U}/\partial\xi$、 $\partial^2\overline{U}/\partial\xi^2$ についても、x と t の関数としての表式がわかる。

4) 最終的に (3.4) を使って $u(x,t)$ が、$O(\varepsilon^3)$ の精度で求まった。

5 要旨と議論

本稿では、逓減摂動法を拡張して、周期系にも応用できるような構成を試みた。ここで最も重要なのは、搬送波が単色波ではなく Bloch 波であるということである。周期的非線形 Klein-Gordon を使って、結果的には包絡波は非線形シュレディンガー方程式 (3.13) を満たすことがわかった。導出法をまとめると次のようになる。

1) まず線形化した方程式 (3.3) を解いて、Bloch 型の解 $Y(x,\omega)$ を求める。分散関係$\omega=\omega(k)$ も同時に求まる。

2) 周期性 (2.15) を満たす、補助関数 $\chi(x,\omega)$ を使ってξ、τ、 $V(x,\omega)$、$W(x,\omega)$、$\overline{W}(x,\omega)$ を (3.5) で定義する。

3) 元の系の従属変数 $u(x,t)$ を、(3.4) のように摂動展開する。系によっては、非線形の補正項はより複雑になる。これを (3.2a) へ代入して$\varepsilon^n \exp(-il\omega t)$ $(n = 1,2,3,\cdots,\ l = 0,\pm1,\pm2,\cdots)$ の各係数を比較する。(n,l)=(3,1) において、次の形の方程式を得る。

$$P(x)\left(i\frac{\partial U}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}\right) + Q(x)U^2\overline{U} = 0 \tag{5.1}$$

4) ここで、$P(x)$ が $Q(x)$ に比例する、($Q(x) = bP(x)$、b は定数) と仮定する。これは、§2で導入したゲージを固定する条件に相当して、$\chi(x,\omega)$ と b の explicit な表式を与える。従ってτ、$W(x,\omega)$、$\overline{W}(x,\omega)$ も決定される。

5) 最終的に、Bloch 波の包絡波は次の非線形シュレディンガー方程式に支配されることが分かった。

$$i\frac{\partial U}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + bU^2\overline{U} = 0 \tag{5.2}$$

以上の手続きは、周期的非線格子にもそのまま適用できる [5]。均一系において、逓減摂動法が多くの場合共通であったことを考えると、ここで提出した拡張された逓減摂動法は，周期系において広範囲に適用できると考えられる。

さらに (5.2) の b が実数だとすると、ソリトンが観測される。これは搬送波が Bloch であるという意味で、ソリトン概念の１つの拡張であるとみなせよう。ここでの例では、$m(x)$ の対称性 (4.1) は $b \in \Re$の十分条件を与えた。非線形格子では、ばねの非線形性が４次であるなら b は実数である [5]。それでは、一般的にどのような物理条件で、b が実数になり得るのだろうか？これを調べるのは、今後の課題としたい。

参考文献

[1] T. Iizuka, *Envelope Solitons of the Bloch Wave in Nonlinear Periodic Systems,* submitted to Phys. Lett. A

[2] S. Pnevmatikos, N. Flytzanis, ans M. Remoissenet, Phys. Rev. B **33**(1986) 2308.

[3] A. Campa, A. Giansanti, A. Tenenbaum, D. Levi and O. Ragnisco, Phys. Rev. B **48** (1993) 10168.

[4] N. Yajima and J. Satsuma, Prog. Theor. Phys. **62** (1979) 370.

[5] T. Iizuka, preprint