

3 次元渦面の運動の解析と数値シミュレーション

名大工 石原 卓 (Takashi ISHIHARA)

名大工 金田行雄 (Yukio KANEDA)

1. はじめに

渦面は、渦度が薄い領域に局在する現象（物を過ぎる高速流れ、混合層のある流れなど）に対し、その領域の厚さを無限小とする基本的なモデルである。面の上下で流体の速度の接線成分が不連続となる。渦面は、流れ方向の摂動に対して不安定であり、その摂動の増幅率が摂動の波長の逆数に比例することが知られている。またこの不安定性に起因して渦巻状の空間パターンを形成することも渦面の重要な特徴として知られている。

流れが 2 次元の場合については、初期に滑らかな渦面が有限時間 t_c で自発的に滑らかさを失い、面の解析性が破れること (Moore(1979)); 渦面巻き上がりの計算は 2 次元渦面の近似方程式を解くことにより可能であること (Krasny(1986,1991)) 等、すでに多くの知見が得られている。

これに対し、3 次元渦面の運動の研究は、その解析の困難さの理由で、2 次元のものに比べ、ほとんどなされていない。実在する流れの多くは 3 次元であること、また 3 次元では渦度の伸びがあり、3 次元渦面は 2 次元渦面とは本質的に異なるダイナミクスに支配されていることを考慮すれば、3 次元渦面の研究の必要性は自明である。しかしながら、渦面の発展における 3 次元性または渦度の伸びの役割についてもよくわかっていない。

近年、Kaneda(1989,1990)、Cafisch(1990) は、3 次元渦面方程式の Lagrange 的表記に成功した。その表式では、渦度の発展が簡潔に表現され、解析及び数値計算が著しく簡単化される。

本研究は、この 3 次元渦面方程式の Lagrange 的表記を基に、渦面の 3 次元発展の 2 次元との相違点を明らかにすることを目的としている。2 章では、渦面の 3 次元性がその発展に与える影響を理解するための第一歩として、Moore の解析を 3 次元流れに拡張し、3 次元渦面に現れる特異性を調べた結果について述べる。3 章では、3 次元渦面の数値計算について述べる。最後に 4 章で全体のまとめを行う。

2. 3次元の渦面の運動における解析性の破れ

2.1 方程式の導出

3次元性の影響を調べるために、渦度分布が一定で平らな(流体速度が $z > 0$ に対し $\mathbf{u}(x, y, z) = (U/2, 0, 0)$, $z < 0$ に対し $(-U/2, 0, 0)$ で与えられる)渦面に、流れ方向(x)及び流れ垂直方向(y)の周期的な摂動を考える。理想流体中の渦面の3次元的な運動は以下の式で記述される;

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{R}(\lambda_1, \lambda_2, t) = -\frac{1}{4\pi} \text{p.v.} \int \int_S \frac{\mathbf{X} \times \mathbf{W}(\lambda'_1, \lambda'_2, t)}{|\mathbf{X}|^3} d\lambda'_1 d\lambda'_2, \quad (1)$$

ここで,

$$\mathbf{X} \equiv \mathbf{R}(\lambda_1, \lambda_2, t) - \mathbf{R}(\lambda'_1, \lambda'_2, t),$$

$$\mathbf{W} \equiv (\partial\Phi/\partial\lambda_1)(\partial\mathbf{R}/\partial\lambda_2) - (\partial\Phi/\partial\lambda_2)(\partial\mathbf{R}/\partial\lambda_1),$$

λ_1, λ_2 は渦面 S を表現するためのLagrange的媒介変数、 $\mathbf{R}(\lambda_1, \lambda_2, t)$ は時刻 t における渦面 S 上の点の位置ベクトル、 $\Phi(\lambda_1, \lambda_2)$ は渦面 S の両側での速度ポテンシャルの差である。 $\Phi(\lambda_1, \lambda_2)$ は(1)で与えられる軌道に沿って一定(Lagrange的不変量)である。初期時刻にLagrange座標を $(\partial\Phi/\partial\lambda_2) = 0$ の様に選べば、 $(\partial\Phi/\partial\lambda_1)$ は λ_1 のみの関数となる。ここでは、 $(\partial\Phi/\partial\lambda_1) = \text{const} \equiv \gamma_0$ を仮定する。以下では、時間と長さを各々 γ_0/U^2 と γ_0/U で規格化する。2次元の流れにおいて \mathbf{W} は定ベクトルであるが、3次元の流れにおいては渦の伸びによりそうとは限らない。

渦面の初期の形を次のように仮定する;

$$\mathbf{R}(\lambda_1, \lambda_2, 0) = (\lambda_1, \lambda_2, 0) + (\epsilon_2 \sin \lambda_2 \delta, 0, \epsilon_1 \sin \lambda_1). \quad (2)$$

初期摂動の流れ及び流れに垂直な方向の波長を各々 2π 及び $2\pi/\delta$ とした。Mooreが仮定したように、 $\epsilon_2 = 0$ ならば流れは2次元である。3次元性の効果を見るための第一歩として、小さいが有限の振幅

$$0 < \epsilon_1 \ll 1, \quad \epsilon_2 = O(\epsilon_1), \quad (3)$$

を仮定する。

式(1)は、Lagrange座標空間において周期性を保存する。そこで、 \mathbf{R} を以下の様にフーリエ級数に展開する;

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\lambda_1, \lambda_2, t) &\equiv (\lambda_1, \lambda_2, 0) \\ &+ \sum_{n,m} \mathbf{A}_{n,m}(t) \exp\{i(\lambda_1 n + \lambda_2 \delta m)\}. \end{aligned} \quad (4)$$

ここで, $\mathbf{R}(-\lambda_1, -\lambda_2, t) = -\mathbf{R}(\lambda_1, \lambda_2, t)$ により, $\mathbf{A}_{-n, -m} = -\mathbf{A}_{n, m}$ である.

初期条件 (2) より, $\mathbf{A}_{n, m} = O(\epsilon_1)$ を仮定すると, (1) の被積分関数を ϵ_1 の巾で展開することが出来る. 式 (4) を (1) に代入し, $\exp\{i(\lambda_1 n + \lambda_2 \delta m)\}$ の係数を等しくおけば, $\mathbf{A}_{n, m} \equiv (X_{n, m}, Y_{n, m}, Z_{n, m})$ の方程式を次なる形に得ることができる;

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} X_{n, m} \\ Y_{n, m} \\ Z_{n, m} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & n^2(n^2 + \delta^2 m^2)^{-\frac{1}{2}} \\ 0 & 0 & \delta n m (n^2 + \delta^2 m^2)^{-\frac{1}{2}} \\ (n^2 + \delta^2 m^2)^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{n, m} \\ Y_{n, m} \\ Z_{n, m} \end{pmatrix} + \mathbf{P}. \quad (5)$$

ここでベクトル \mathbf{P} の各成分はフーリエ係数 $\{\mathbf{A}_{p, q}\}$ の積の無限級数から成っている. 初期条件 (2) より, 初期の \mathbf{P} の中の主要項は $Z_{1,0}^n X_{0,1}^m = O(\epsilon_1^{|n|} \epsilon_2^{|m|})$ に比例している. これは初期に $\mathbf{A}_{n, m} = O(\epsilon_1^{|n|} \epsilon_2^{|m|})$ であることを示唆する.

2.2 方法 1

簡単のため $\epsilon_1 = \epsilon_2$, 周期領域の縦横比を 1 とする. $\mathbf{A}_{n, m} = O(\epsilon_1^{|n|+|m|})$ の仮定の下, \mathbf{P} の中の $O(\epsilon_1^N)$ 以上の項だけ残し, 項数有限の常微分方程式系を構成する. (2) より, 初期値を $X_{0,1}, -X_{0,-1}, Z_{1,0}, -Z_{-1,0}$ は $-(\epsilon_1/2)i$, 他は全て 0 と置く. ここでは, $N = 6$ の場合の常微分方程式系を, $\epsilon_1 = 0.001$ として, 数値的に解いた結果について述べる.

$X_{n,0}$, ($n = 1, 2, \dots, 6$) の振る舞いは, 図 1 のようになった. 図 1 より, $t_c \sim 10$ で $X_{n,0}$ の n 依存性が n^{-p} , $p \sim 2.5$ となることが分かる. この結果は, Moore(1979) の 2 次元渦面の解析の結果 (t_c は $1 + t_c/2 + \ln(\epsilon_1 t_c/4) = 0$ で与えられ, 指数は $p = -5/2$) と良く一致し, $\mathbf{A}_{n,0}$ は本質的には渦面の 2 次元運動によって決まることを示唆する.

図 2 は, $\ln|X_{n,0}|$ 対 $\ln n$ のグラフが最も直線に近くなる時刻 ($t = 10.3$) における $X_{n,m}$, ($m = 0, 1, 2, 3$) の n 依存性を示す. これにより, $X_{n,1}$ の n 依存性が n^{-p} , $p \sim 1.5$ であることが分かる. Z についても同様な振る舞いが観察できる. これは, 部分和

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{A}_{n, \pm 1} \exp\{i(n\lambda_1 + \lambda_2)\} \quad (6)$$

が $t = 10.3$ で解析的でなくなることを意味する.

2.3 方法 2

上述の結果は, 解析的にも示すことができる. そのために, Moore(1979) と同様, 以下の様な展開を考える;

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{n, m} &= \epsilon_1^{|n|} \epsilon_2^{|m|} \mathbf{A}_{n, m}^{(0)} + \epsilon_1^{|n|+2} \epsilon_2^{|m|} \mathbf{A}_{n, m}^{(2,0)} + \dots \\ &+ \epsilon_1^{|n|} \epsilon_2^{|m|+2} \mathbf{A}_{n, m}^{(0,2)} + \dots \end{aligned} \quad (7)$$

式 (7) を式 (5) に代入し, 主要項のみを残すことにより, $\{\mathbf{A}_{n, m}^{(0)}\}$ のみで閉じた方程式系を得ることができる. こうして得られた方程式は $\mathbf{A}_{n, m}^{(0)}$ について線形で, $\mathbf{A}_{n, \pm m}^{(0)}$ に対する非斉

次項 \mathbf{P} は, n, m を正の整数としたとき, $\mathbf{A}_{p,q}^{(0)}$ ($0 \leq p \leq n, 0 \leq \pm q \leq m, 0 < p \pm q < n+m$) により表すことができる. よって $\mathbf{A}_{n,m}^{(0)}$ の方程式系は, 原理的に, 小さい n, m から始めて全ての n, m について帰納的に解くことができる.

2次元渦面の場合と同様に, 3次元渦面においても特異性の決定には, 時刻が大きいところでの $\mathbf{A}_{n,\pm m}^{(0)}$ 漸近的な振る舞いが重要である. $\mathbf{A}_{n,m}^{(0)}$ に対する方程式系を (2) を満たすように, 小さい n, m から逐次解いていくと, 漸近的な解の形が, $n > 0, m \geq 0$ として,

$$\mathbf{A}_{n,\pm m}^{(0)} = i \left(\mp \frac{\delta}{4} \right)^m \left(-\frac{1}{4} \right)^n e^{\frac{1}{2}nt} \{ \mathbf{a}_{n,\pm m}^{(0)} t^{n-1+2m} + \mathbf{a}_{n,\pm m}^{(1)} t^{n-2+2m} + \dots \} + O(e^{\frac{1}{2}|n-1|t}), \quad (8)$$

と書けることが予想できる. この時間依存性が $\mathbf{A}_{n,m}^{(0)}$ に対する方程式系及び初期条件 (2) と矛盾しないことは帰納的に証明できる.

ここで, 展開式 (7) と漸近的時間依存性 (8) より

$$X_{n,\pm(m+1)}/X_{n,\pm m} \simeq \epsilon_2 t^2, \quad (9)$$

と Y, Z についても同様な式が得られることに注意する. これは, (3) の下では小さい m のフーリエ係数が重要であることを示している.

$\mathbf{A}_{n,m}^{(0)}$ に対する方程式と時間依存性 (8) より $\mathbf{a}_{n,\pm m}^{(0)} \equiv (a_{n,\pm m}^{(0)}, b_{n,\pm m}^{(0)}, c_{n,\pm m}^{(0)})$ に対する漸化式を作ることが出来る (より詳細は Ishihara & Kaneda (1994) 参照). それらは, $m = 0$ に対して, $n = 1$ で,

$$a_{1,0}^{(0)} = b_{1,0}^{(0)} = 0, \quad c_{1,0}^{(0)} = 1,$$

$n \geq 2$ で,

$$a_{n,0}^{(0)} = \frac{1}{2(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} k l a_{k,0}^{(0)} a_{n-k,0}^{(0)}, \quad a_{n,0}^{(0)} = c_{n,0}^{(0)}, \quad b_{n,0}^{(0)} = 0, \quad (10)$$

$m = 1$ に対して, $n = 0$ で,

$$a_{0,\pm 1}^{(0)} = b_{0,\pm 1}^{(0)} = 0, \quad c_{0,\pm 1}^{(0)} = 1$$

$n \geq 1$ で,

$$2n(n+1)c_{n,\pm 1}^{(0)} = \sum_{k=1}^n \left\{ n^2 k - (nl + k^2) \sqrt{n^2 + \delta^2} + \frac{kl^2 \sqrt{n^2 + \delta^2}}{\sqrt{l^2 + \delta^2}} + \frac{nl(nl + \delta^2)}{\sqrt{l^2 + \delta^2}} \right\} c_{l,\pm 1}^{(0)} a_{k,0}^{(0)}, \quad (11)$$

$$a_{n,\pm 1}^{(0)} = \frac{n}{\sqrt{n^2 + \delta^2}} c_{n,\pm 1}^{(0)}, \quad (12)$$

$$b_{n,\pm 1}^{(0)} = \frac{\pm \delta}{\sqrt{n^2 + \delta^2}} c_{n,\pm 1}^{(0)}, \quad (13)$$

ここで $l = n - k$. 同様な漸化式は $m = 2, 3, \dots$ に対して求めることも可能であるが, それらは複雑なものとなる.

漸化式 (10) は, Moore が 2 次元的渦面において得たものと同じであり, それから $a_{n,0}^{(0)} = c_{n,0}^{(0)} \simeq e^n n^{-5/2}$ が導かれる. 漸化式 (11) の数値解を求めてみると, 基本周期領域の縦横比 δ によらず $c_{n,1}^{(0)}$ は, 大きな n に対して $e^n n^{-3/2}$ のように振る舞うことがわかる. 関係式 (12) と (13) から分かるように, $a_{n,\pm 1}^{(0)}, b_{n,\pm 1}^{(0)}$ は, 各々大きな n に対して $e^n n^{-3/2}, e^n n^{-5/2}$ のように振る舞う. 以上の結果と (8) より, 大きい t と n に対して,

$$\epsilon_1^n \epsilon_2 \begin{pmatrix} X_{n,\pm 1}^{(0)} \\ Y_{n,\pm 1}^{(0)} \\ Z_{n,\pm 1}^{(0)} \end{pmatrix} \simeq \frac{i}{4} \delta \epsilon_2 \begin{pmatrix} \mp C_a n^{-3/2} \\ C_b n^{-5/2} \\ \mp C_c n^{-3/2} \end{pmatrix} f(t), \quad (14)$$

を得る. ここで,

$$f(t) \equiv t \exp \left\{ n \left(1 + \frac{t}{2} + \ln \left(\frac{\epsilon_1 t}{4} \right) \right) \right\},$$

また C_a, C_b, C_c は, δ のみに依存する定数である. この結果は, 方法 1 で得られたものと定量的にも良く一致するものである.

3. 3 次元的渦面の数値シミュレーション

3.1 問題の正則化

渦面の方程式 (1) をグリーン関数を使って以下の様に変換する;

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \text{p.v.} \int \int_S (\nabla G) \times \mathbf{W}(\lambda'_1, \lambda'_2, t) d\lambda'_1 d\lambda'_2. \quad (15)$$

ここで

$$G \equiv G(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \equiv \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}'|}, \quad (16)$$

$$\mathbf{R} \equiv \mathbf{R}(\lambda_1, \lambda_2, t), \quad \mathbf{R}' \equiv \mathbf{R}(\lambda'_1, \lambda'_2, t), \quad \nabla \equiv \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}}.$$

2 次元的渦面で成功した Krasny(1986) の数値計算法を 3 次元に適用し, (15) の中のグリーン関数 $G = (1/4\pi)|\mathbf{R} - \mathbf{R}'|^{-1}$ を

$$G_\epsilon \equiv G_\epsilon(\mathbf{R}, \mathbf{R}') \equiv \frac{1}{4\pi} \frac{1}{(|\mathbf{R} - \mathbf{R}'|^2 + \epsilon^2)^{1/2}}, \quad (17)$$

に置き換えることにより, 問題を正則化する. ϵ はスムージングパラメタと呼ばれるもので, $\epsilon \rightarrow 0$ の時 $G_\epsilon \rightarrow G$ であることが重要である. 正則化された方程式は,

$$\frac{\partial \mathbf{R}(\lambda_1, \lambda_2, t)}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi} \int \int_S \frac{\mathbf{X} \times \mathbf{W}(\lambda'_1, \lambda'_2, t)}{(|\mathbf{X}|^2 + \epsilon^2)^{3/2}} d\lambda'_1 d\lambda'_2. \quad (18)$$

となる。

平らで渦度分布が一定の渦面は、(18)の定常解である。数値計算では、初期の渦面の形として次のものを考えた。

$$\mathbf{R}(\lambda_1, \lambda_2, 0) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_2 \sin(2\pi\lambda_2/b) \\ 0 \\ \epsilon_1 \sin(2\pi\lambda_1/a) \end{pmatrix}. \quad (19)$$

3.2 2重周期 Green 関数の取扱い

初期の形が(19)で与えられる渦面は、以下の周期条件を $t \geq 0$ で満足する；

$$\mathbf{W}(\lambda_1 + a, \lambda_2 + b, t) = \mathbf{W}(\lambda_1, \lambda_2, t), \quad (20)$$

$$\mathbf{R}(\lambda_1 + a, \lambda_2 + b, t) = \mathbf{R}(\lambda_1, \lambda_2, t) + a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2, \quad (21)$$

ここで $\mathbf{e}_1 \equiv (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 \equiv (0, 1, 0)$. よって(15)での積分領域 S は、周期領域 $[0, a] \times [0, b]$ に帰着させることができる；

$$\int \int_S (\nabla G_\epsilon) \times \mathbf{W}' d\lambda'_1 d\lambda'_2 = \int_0^a \int_0^b (\nabla \hat{G}_\epsilon) \times \mathbf{W}' d\lambda'_1 d\lambda'_2, \quad (22)$$

ここで

$$\hat{G}_\epsilon \equiv \frac{1}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{r_\epsilon(n, m)}, \quad (23)$$

$$r_\epsilon(n, m) \equiv [(x - x' - an)^2 + (y - y' - bm)^2 + (z - z')^2 + \epsilon^2]^{1/2}.$$

実際の計算には、(23)の微分

$$\nabla \hat{G}_\epsilon = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} \Delta x + an \\ \Delta y + bm \\ \Delta z \end{pmatrix} \frac{1}{r_\epsilon(n, m)^3}, \quad (24)$$

が必要となる。ここで $(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \equiv (x' - x, y' - y, z' - z)$. (24)は代数巾の和であるので、 n, m を有限で打ち切ったものは良い近似を与えない。そこで n, m について収束性の良い和を得るため、Baker, Meiron & Orszag(1984)にあるように Ewald の方法を用いる。

まず、等式

$$\Gamma(3/2) = r^3 \int_0^\infty e^{-r^2\beta} \beta^{1/2} d\beta, \quad (25)$$

を用いると, 例えば x 成分に対して,

$$(\nabla \hat{G}_\epsilon)_x = \frac{1}{4\pi} \Gamma(3/2)^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (\Delta x + an) \int_0^{\infty} e^{-r_\epsilon(n,m)^2 \beta} \beta^{-1/2} d\beta \quad (26)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \Gamma(3/2)^{-1} (I_x + O_x), \quad (27)$$

$$I_x \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (\Delta x + an) \int_0^A e^{-r_\epsilon(n,m)^2 \beta} \beta^{-1/2} d\beta, \quad (28)$$

$$O_x \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (\Delta x + an) \int_A^{\infty} e^{-r_\epsilon(n,m)^2 \beta} \beta^{-1/2} d\beta, \quad (29)$$

を得る. 定数 A の値は, 実際の数値計算の段階で計算の精度及び速度を考慮して決める. (Baker, Meiron & Orszag(1984) では, $A = 1$ に固定してある.)

O_x は, 以下の様に誤差関数を用いて書くことができる;

$$O_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (\Delta x + an) \phi_{1/2}(r_\epsilon(n,m)^2), \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \phi_{1/2}(x) &\equiv \int_A^{\infty} \beta^{1/2} e^{-x\beta} d\beta \\ &= \frac{A^{1/2}}{x} e^{-Ax} + \frac{1}{2} \sqrt{\pi} x^{-3/2} \operatorname{erfc}(\sqrt{Ax}). \end{aligned} \quad (31)$$

A の値を適当な大きさにとれば, (30) の n, m についての収束性が良いことがわかる. y, z 成分に対する O_y, O_z も同様である.

I_x は, このままでは収束性が良くないため, $t \equiv 1/\beta$ と置き,

$$I_x = \int_{1/A}^{\infty} t^{-5/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (an + \Delta x) e^{-r_\epsilon(n,m)^2/t} dt, \quad (32)$$

のように変形する. 恒等式

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{(bm+\Delta y)^2/t} = \frac{\sqrt{\pi t}}{b} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-\pi^2 m^2 t/b^2} \cos(2\pi m \Delta y/b), \quad (33)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (an + \Delta x) e^{(an+\Delta x)^2/t} = \frac{(\pi t)^{3/2}}{a^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi^2 n^2 t/a^2} n \sin(2\pi n \Delta x/a), \quad (34)$$

を使用すれば,

$$I_x = \frac{4\pi^2}{a^2 b} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} w(n) w(m) n \sin(2\pi n \Delta x/a) \cos(2\pi m \Delta y/b) f(\Delta z, n, m), \quad (35)$$

を得る. ここで

$$w(k) = \begin{cases} 1 & k \neq 0 \text{ の時,} \\ 1/2 & k = 0 \text{ の時,} \end{cases}$$

$$f(\Delta z, n, m) \equiv \int_{1/A}^{\infty} t^{-1/2} \exp\{-\pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right)\} \exp\{-(\Delta z^2 + \epsilon^2)/t\} dt.$$

y, z 成分に対しても同様に

$$I_y = \frac{4\pi^2}{ab^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} w(n)w(m) \cos(2\pi n\Delta x/a) m \sin(2\pi m\Delta y/b) f(\Delta z, n, m), \quad (36)$$

$$I_z = \frac{4\pi}{ab} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} w(n)w(m) \cos(2\pi n\Delta x/a) \cos(2\pi m\Delta y/b) \Delta z g(\Delta z, n, m), \quad (37)$$

を得る. ここで

$$g(\Delta z, n, m) \equiv \int_{1/A}^{\infty} t^{-3/2} \exp\{-\pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right)\} \exp\{-(\Delta z^2 + \epsilon^2)/t\} dt.$$

関数 $f(\Delta z, n, m)$, $g(\Delta z, n, m)$ もまた誤差関数を使って書くことができる. (Baker, Meiron & Orszag(1984) 参照.) こうして I_x, I_y, I_z についても収束性の良い和を得ることができた.

ここでは, $\Delta z \ll 1$ 及び $\epsilon \ll 1$ を仮定して, $f(\Delta z, n, m)$, $g(\Delta z, n, m)$ を次のように展開する.

$$f(\Delta z, n, m) = \phi_{-1/2}^{(n,m)} - \phi_{-3/2}^{(n,m)} \cdot (\Delta z^2 + \epsilon^2) + O\left((\Delta z^2 + \epsilon^2)^2\right), \quad (38)$$

$$g(\Delta z, n, m) = \phi_{-3/2}^{(n,m)} - \phi_{-5/2}^{(n,m)} \cdot (\Delta z^2 + \epsilon^2) + O\left((\Delta z^2 + \epsilon^2)^2\right), \quad (39)$$

ここで

$$\phi_s^{(n,m)} \equiv \phi_s(\pi^2(n^2/a^2 + m^2/b^2)), \quad \phi_s(x) \equiv \int_{1/A}^{\infty} \beta^s e^{-x\beta} d\beta. \quad (40)$$

関数 $\phi_s(x)$, ($s = -1/2, -3/2, \dots$) は,

$$\phi_{-1/2}(x) = \sqrt{\pi/x} \operatorname{erfc}(\sqrt{x/A}),$$

$$\phi_s(x) = -\frac{1}{s+1} \left(A^{-(s+1)} e^{-x/A} - x \phi_{s+1}(x) \right),$$

等を使用し計算する.

数値計算では $O_{\{x,y,z\}}$ 及び $I_{\{x,y,z\}}$ における和を次のように打ち切る;

$$O_x \text{ に対して, } \sum_{n=-N_{\max}^{(o)}}^{N_{\max}^{(o)}} \sum_{m=-M_{\max}^{(o)}}^{M_{\max}^{(o)}}, \quad (41)$$

$$I_x \text{ に対して, } \sum_{n=0}^{N_{max}^{(i)}} \sum_{m=0}^{M_{max}^{(i)}} \quad (42)$$

$I_{\{x,y,z\}}$ の和の中に現れる $\phi_s^{(n,m)}$ は、一度評価すれば、その値を繰り返し用いることができるのに対し、 $O_{\{x,y,z\}}$ の和の中に現れる $\phi_{1/2}(r_\epsilon(n,m)^2)$ は、その値が $r_\epsilon(n,m)$ に依存するため、時間ステップ毎に評価が必要である。この事実を考慮すると、定数 A の値を調整し $N_{max}^{(o)}$ 及び $M_{max}^{(o)}$ の値を小さく設定することにより、数値計算を一定の精度を保って高速化できることがわかる。周期領域の大きさを $a = b = 1.0$ とした今回の計算では、 $N_{max}^{(o)} = M_{max}^{(o)} = 1$, $N_{max}^{(i)} = M_{max}^{(i)} = 5$, $A = 9.0$ のように設定した。

3.3 離散化

離散化は Lagrange 座標空間で行う。すなわち、Lagrange 座標空間における周期領域 $0 \leq \lambda_1 \leq 1$, $0 \leq \lambda_2 \leq 1$ を N^2 個の等間隔な格子点で代表させる。これにより渦面 $\mathbf{R}(\lambda_1, \lambda_2, t)$ は、 N^2 個の点

$$\mathbf{R}(I, J) \equiv \mathbf{R}((I-1)\Delta\lambda_1, (J-1)\Delta\lambda_2, t),$$

で近似されることになる。ここで $I, J = 1, 2, \dots, N$, $\Delta\lambda_1 = 1/N$ である。

積分 (22) を台形求積により近似して、 N^2 個の点の軌跡に対する常微分方程式系

$$\frac{d\mathbf{R}(I, J)}{dt} = \sum_{I'=1}^N \sum_{J'=1}^M (\nabla \hat{G}_\epsilon)(I, J, I', J') \times \mathbf{W}(I', J') \Delta\lambda_1 \Delta\lambda_2, \quad (43)$$

を得る。ここで $(\nabla \hat{G}_\epsilon)(I, J, I', J') \equiv (\nabla \hat{G}_\epsilon)(\mathbf{R}(I, J), \mathbf{R}(I', J'))$ は、前節で得られたものを用いる。また $\mathbf{W}(I', J')$ に現れる λ_2 についての微分は、中心差分によって近似する。方程式 (43) の時間発展は、4 次のルンゲクッタ法を用いて解く。

3.4 計算結果

数値計算では、スムージングパラメタを $\epsilon = 0.1$ 、初期渦面の形 (19) における振幅を $\epsilon_1 = 0.1$, $\epsilon_2 = 0.05$ 、渦面を近似する点の数を 30×30 、4 次のルンゲクッタ法における時間刻みを $\Delta t = 0.02$ とした。

図 3 は数値解の時間発展を示す。そこでは、渦面の 3 次元的な巻き上がりを確認することができる。

図 4 で、 $t = 1.2$ における渦面の様子を詳しく観察すると巻き上がりの中心となる渦線が 3 次元空間中の sin 曲線のようにあり、その sin 曲線の凸な方向から巻き上がろうとする渦面においては渦の伸びがあり逆に、凹な方向から巻き上がろうとする渦面においては渦の縮みがあることがわかる (図の太矢印)。

4. 結論と今後の課題

2章で行った弱非線形解析では, 2次元渦面において現れる特異性は3次元渦面の下でも現れること, 及び渦面の3次元運動の特徴を反映する特異性も同時刻に現れることがわかった. 後者は $(n, 1)$ フーリエ係数が大きな n に対して $n^{-3/2}$ に比例することが特徴である.

3章で行った数値計算では, 渦面の3次元な巻き上がりを確認することができた. 渦面を詳しくみることにより, 渦の伸縮が確認できることがわかった.

数値計算により2章で得られた特異性を確認することを試みたが, 数値計算のスミージングパラメタ依存性を詳しく調べていないこと, 渦面を近似する点の数が十分でないこと等が原因で, 有効な結果は得られなかった. 3次元渦面の性質を解析及び数値計算により, より詳しく調べていくことが今後の課題である.

参考文献

- D.W.Moore: Proc.R.Soc.London **A 365**(1979) 105.
 R.Krasny: J.Comp.Phys. **65**(1986) 292.
 — : Lectures in Applied Math. **28**(1991) 385.
 Y.Kaneda: read at the meeting held in July, 1989 at the Research Institute of
 Mathematical Science, Kyoto University.
 — : Phys. Fluids **A 2**(1990) 458.
 R.E.Cafisch: in Proceedings of the Workshop on mathematical Aspects of Vortex
 Dynamics, edited by R.E.Cafisch, SIAM, Philadelphia, PA, 1989, p.1.
 T.Ishihara & Y.Kaneda: J.Phys.Soc.Jpn. **63**(1994) 388.

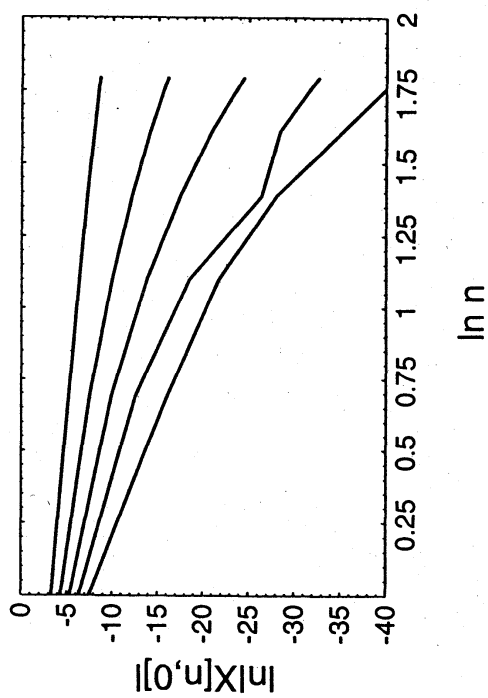


图 1 对数幅度的 $|X_{n,0}|$ 在 $t = 2.0, 4.0, 6.0, 8.0, 10.0$ 从底到顶。

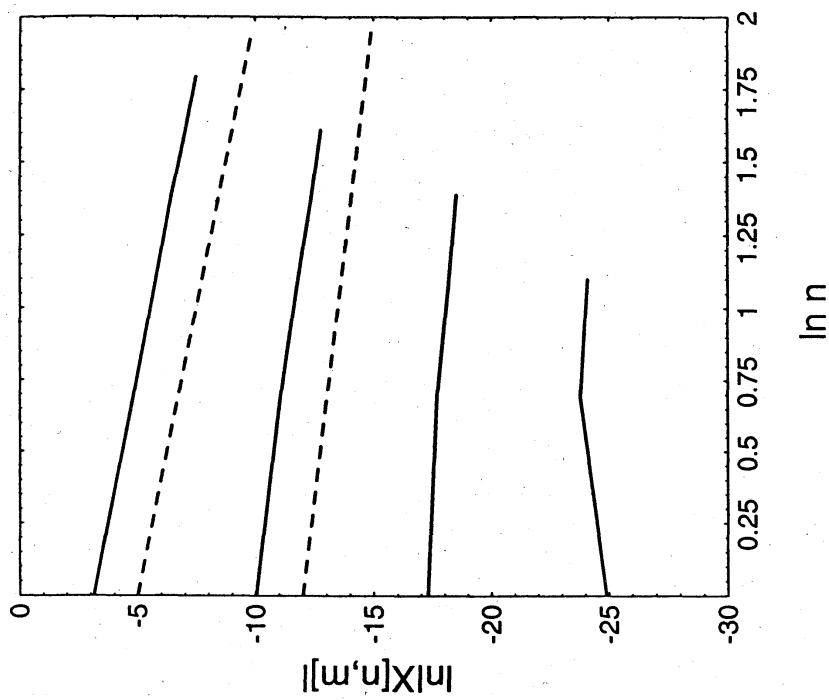


图 2 对数幅度的 $|X_{n,m}|$ 在 $t = 10.3$; $m=0, 1, 2, 3$ 从顶到底。破折线表示斜率 $-5/2$ 和 $-3/2$ 。

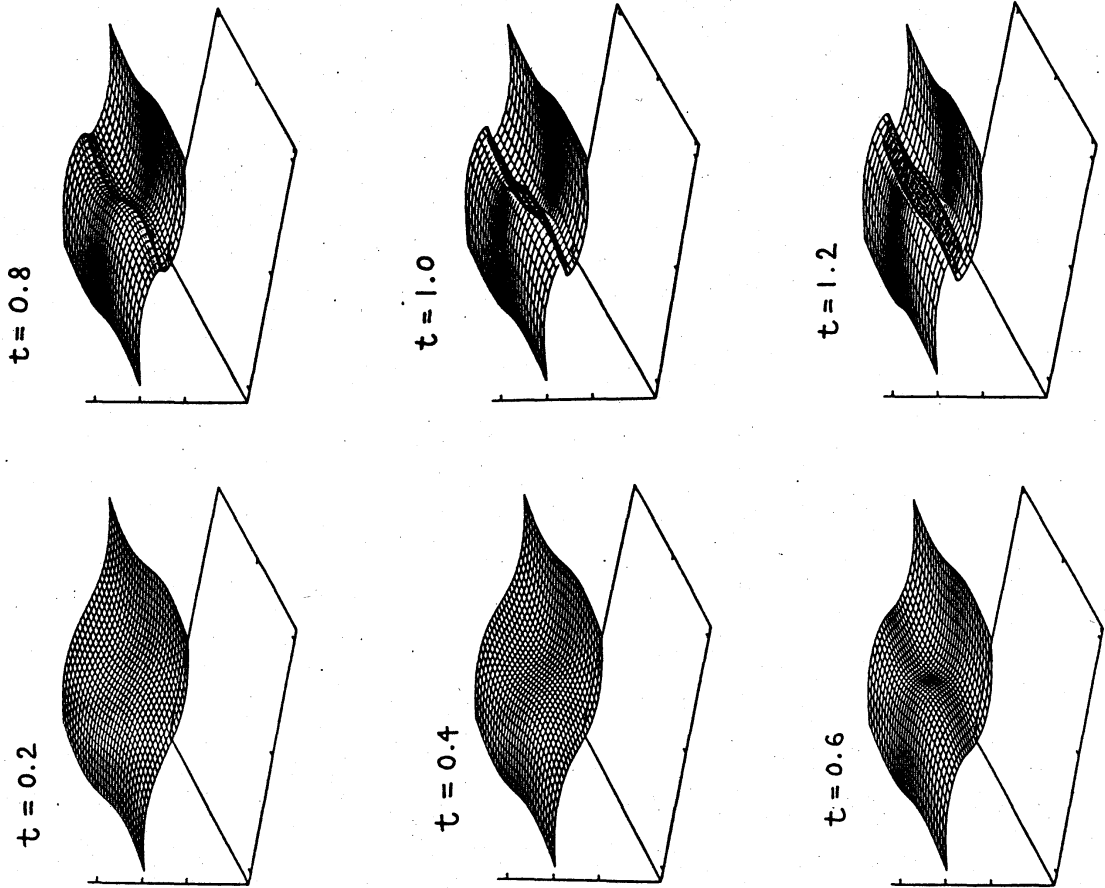
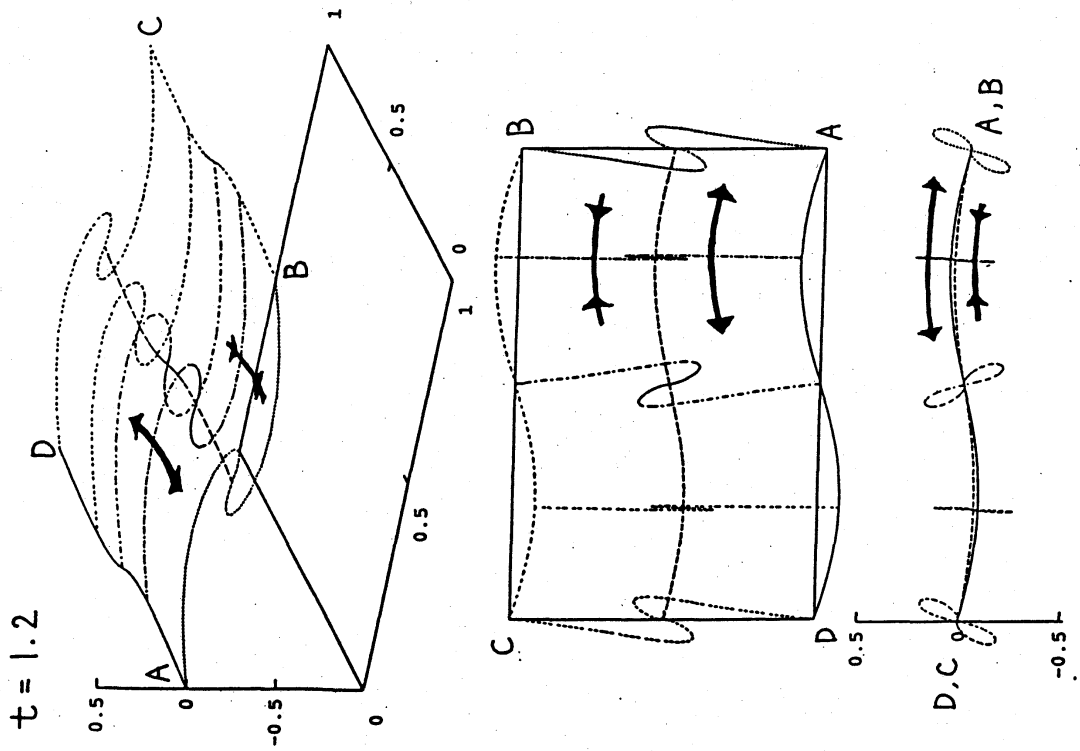


图 3

图 4