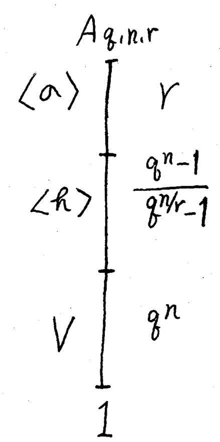
数理解析研究所講究録
第867巻 1994年 53-60

p-radical group と radical の nilpotency index について

群馬大ー教育 福島 博 (Hiroshi Fukushima)

最初に、次の群 $A_{q,n,r}$ を定義する。



q を素数, $F=GF(q^n)$, $F^*=\langle\lambda\rangle$
n の約数 r に対して $\mu=\lambda^{q^{n/r}-1}$ とおく。
$\langle\sigma\rangle=Gal(F/GF(q^{n/r}))$ とおくと $|\sigma|=r$ となる。
このとき $F^*=GF(q^{n/r})^*\times\langle\mu\rangle$
h を F から F への写像で $h(x)=x\mu$ と定めると
h は F の加法群 V の自己同型写像である。
$\langle h\rangle\langle\sigma\rangle\leqq Aut(V)$, ここで半直積 $V\langle h\rangle\langle\sigma\rangle$ を
$A_{q,n,r}$ と定める。これは affine semi-linear group $A\Gamma(V)$ の部分群である。この $A_{q,n,r}$ の特徴は、V の任意の元 x は $\langle h\rangle$ で共役をとると $x^{h^i}=x\mu^i\in GF(q^{n/r})^*$ とできるからので centralize されることである。

§1 p-radical group

G を有限群, P を G の p-シロー群, k を標数 p (>0) の体とする。 このとき $J(kG)\leqq J(kH)kG \Rightarrow p\nmid|G:H|$. ここで

$J(kG)$は群環kGの radical を表す。

逆に $p\nmid|G:H| \Rightarrow J(kG) \subseteq J(kH)kG$ が成立する群Gを p-radical group という。このとき次は同値である。

(i) Gは p-radical group である。

(ii) $(k_P)^G$ が semi-simple.

(iii) $J(kG) \subseteq J(kP)kG$.

(iv) $J(kG) = \bigcap_{x\in G} J(kP)^x kG$

p-radical group の基本的性質は、Feit[1]の5章に述べられている。さて p-radical group については、次の定理がある。

定理1（奥山[9]） p-radical group は p-solvable である。

Gが p-length 1 のときは、次の定理がある。

定理2（津島[11]） $G=PK$, $K=O_{p'}(G)$ のとき

Gが p-radical $\Leftrightarrow$ $[K,D]\cap C_K(D)=1$ for ${}^{\forall}D\subseteq P$.

例

(1) 定理2より $G=PK$, $K=O_{p'}(G)$で、Kが可換群ならば、Gは p-radical group である。

(2) $SL(2,3)$は $p=3$ に対して p-radical group でない。

(3) K: p'-group, Z: cyclic p-group とするとき、$K \wr Z$ が p-radical $\Leftrightarrow$ Kが可換群.

次に p-length が 2 の場合の p-radical group G の構造が問題になるが、これに関して次の結果を得た。

定理3（福島 [4]）

G は次を満すとする。

(1) $|G : O_{p',p,p'}(G)| = p$, $O_p(G) = 1$, $O^{p'}(G) = G$.

(2) $O_{p',p}(G)$ のシロー p 部分群 P_0 は可換群

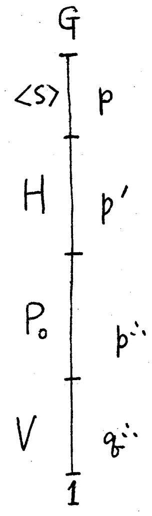
(3) $V = [O_{p'}(G), P_0]$ は G の minimal normal subgroup.

このとき G が p-radical であるための必十条件は次が成り立つことである。

(A) $\bar{G} = G/VP_0$ は kernel が $O_{p'}(\bar{G})$ であるフロベニウス群である

(B) V は elementary abelian q-group ($q \neq p$; 素数)

(C) 次の(1)または(2)が成り立つ。



(i) $G = N_G(P_0)V$, $N_G(P_0) \cap V = 1$.

(ii) $P_0 \lhd P_0H \lhd P_0H\langle s\rangle = N_G(P_0)$,

ここで $|s| = p$, H は p'-group.

(iii) 共役で作用させると V は $N_G(P_0)$-module とみなせる。このとき $V = V_1 \times \cdots \times V_p$ (V_i は V_{P_0} の homogeneous complement) と表せる。

(iv) $P_i = C_{P_0}(V_1 \times \cdots \times V_{i-1} \times V_{i+1} \times \cdots \times V_p)$ とおくと、

$P_0 = P_1 \times \cdots \times P_p$

(v) $V_1^{s^i} = V_{i+1}$, $P_1^{s^i} = P_{i+1}$ $(0 \leqq i \leqq p-1)$

(vi) V_i, P_i は H-invariant で, $VP_0 = (V_1P_1) \times \cdots \times (V_pP_p)$.

(vii) $r = |H/C_H(V_1)|$, $|P_1| = p^m$, $|V_1| = q^n$ とおくと,

$r|n$, $\dfrac{q^n-1}{q^{n/r}-1} = p^m$ で

$V_iP_iH/C_H(V_i) \cong A_{q,n,r}$, $(1 \leqq i \leqq p)$ である。

(2) $C_G(v) \leqq O_{p',p,p'}(G)$ for $\forall v \in V^{\#}$.

実際 $r|n$, $\dfrac{q^n-1}{q^{n/r}-1} = p^m$ を満す (q, n, r, m) に対して,

Z を位数 p の巡回群として, $G = (A_{q,n,r}) \wr Z$ は, p-radical group である。

また(1)(2) の性質を満す p-radical group もつくることができる。さらにこの群は, p-length が 3, 4, 5 --- と帰納的に拡張され、次の定理を得ることができる。

定理4 (福島[3])

各自然数 n に対して, p-length n の p-radical group が存在する。

§2 nilpotency index

$J(kG)^{t-1} \neq 0$, $J(kG)^t = 0$ となる自然数 t を $J(kG)$ の nilpotency index (巾零指数)という。

P が位数 p^a の p-group のとき $a(p-1)+1 \leqq t(P) \leqq p^a$ が成り立つ。 G が p-solvable のときも同様なことが成り

立つ。即ち

$$a(p-1) \leqq t(G) \leqq p^a, \quad ここで\ p^a = |P|,\ P \in Syl_p(G).$$

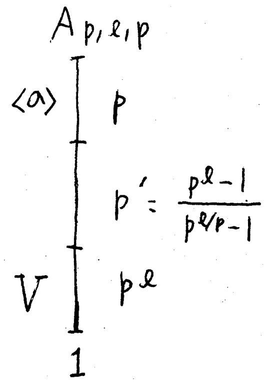
定理5 (越谷[6], 津島[10])

$t(G) = p^a \iff P$: cyclic

定理6 (本瀬，二宮[8])

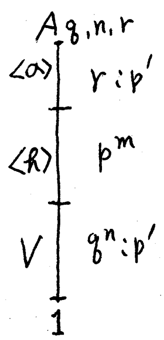
G が p-length 1 のとき $t(G) = a(p-1)+1 \iff P$; elementary abelian

p-length が 2 で $t(G) = a(p-1)+1$ を満す群の例として本瀬[7] は，$A_{p,\ell,p}$ を示した。この群は，先に示したように，V の任意の元 x に対して，$C_G(x)$ が α の共役元を含むから，$C_G(x)$ は Sylow p-部分群を含み，これが $t(G)=a(p-1)+1$ となる本質的な性質となっている。



この性質は，Brauer の height 0 予想を可解群の場合に解いた T. Wolf の論文[13] にもあらわれ，そこでは，$G = VH\langle\alpha\rangle \triangleright VH \triangleright V$，$V$: elementary abelian q-group，H; p'-group，$|\alpha| = p$ としたとき，任意の V の元 x に対して，$C_G(x)$ が Sylow p-部分群を含むような群 G を決定することが Key Theorem となっている。

さらに定理3における $A_{q,n,r}$ と比較してみると，$\frac{q^n-1}{q^{n/r}-1} = p^m$ より，この群においては，V の任意の元 x に対して，$C_G(x)$ は，Hall p'-group を含む。



このように $A_{q,n,r}$ と $A_{p,e,p}$ は，p と p' の立場をかえて同じ性質を持っていることは興味深いことである。

さて $A_{p,e,p}$ は $t(G)=a(p-1)+1$ を満すことを先に述べたが，定理２より，これらは p-radical group でもあることがわかる。そこで $t(G)=a(p-1)+1$ を満す p-radical group の構造を考え、次の結果を得た。

定理７（[5]）

p-radical group G が $t(G)=a(p-1)+1$ であるための必十条件は、$K=O^{p'}(G)$ が，次の条件を満すことである。

$K/O_{p'}(K) = G_1 \times M$; M = elementary abelian p-group.

$G_1 = VN$, $V \cap N = 1$, ここで $V = O_p(G_1)$.

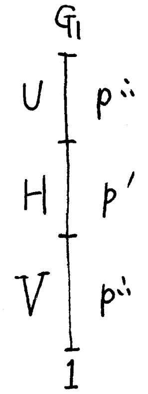
$N = HU \triangleright H$, H : p'-group, U : p-group

$V = V_1 \times \cdots \times V_m$, $H = H_1 \times \cdots \times H_m$

$VH = (V_1H_1) \times \cdots \times (V_mH_m)$

V_i, H_i は U-invariant で，

$V_iH_iU/C_U(V_i) \cong A_{p,e_i,p}$ $(i=1,\cdots,m)$



これからの問題として，次のものがある。

問題１． $G = O_{p',p,p'}(G)$ で $t(G)=a(p-1)+1$ となる群 G を決定せよ。

問題２． $t(G)=a(p-1)+1$ を満す p-solvable group G の p-length は，おさえられるが．

References

[1] W. Feit, " The representation theory of finite group." North-Holland. Amsterdam, 1982.

[2] H. Fukushima, On groups G of p-length 2 whose nilpotency indices of J(KG) are a(p-1)+1, Hokkaido Math J. 20 (1991) 523-530.

[3] H. Fukushima, p-length of p-radical groups are unbounded, to appear J. Algebra.

[4] H. Fukushima, On p-radical groups G and the nilpotency indices of J(kG). 投稿中.

[5] H. Fukushima, Y. Hieda, T. Okuyama, .Tanaka, On p-radical groups G whose nilpotency indices of J(kG) are a(p-1)+1. 作成中.

[6] S. Koshitani, On nilpotency indices of the radicals of group algebras of p-solvable groups, Proc. Japan Acad. 53, No 1, 13-16.

[7] K. Motose, On the nilpotency index of the radical of a group algebra III, J. London Math Soc 25 (1982), 39-42.

[8] K. Motose, Y. Ninomiya, On the nilpotency index of the radical of a group algebra, Hokkaido Math J 4 (1975), 261-264.

[9] T. Okuyama, p-Radical groups are p-solvable, Osaka J. Math 23 (1986) 467-469.

[10] Y. Tsushima, Some notes on the radical of a finite group ring, Osaka J. Math 15, 647-653.

[11] Y. Tsushima, On p-radical groups, J. Algebra 103 (1986) 80-86.

[12] D. A. R. Wallace, Lower bounds for the radical of the group algebra of a finite souble group, Proc. Edinburgh Math Soc 16, 127-134.

[13] T. R. Wolf, Defect groups and character heights in blocks of solvable groups, J. Algebra 72, 183-209.